

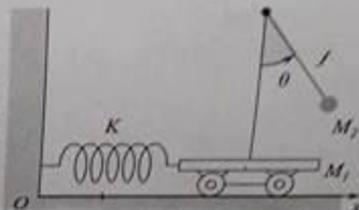
## Φυσική ΙΙ (Κυματική), ΣΕΜΦΕ 3<sup>ο</sup> Εξάμηνο, 2017-2018

Κανονική Εξέταση, Δευτέρα 29/01/2018 08:30, Διάρκεια 2 ώρες

Διδάσκων: Θ. Αλεξόπουλος.

1.

Ένα όχημα με μάζα  $M_1$  συνδέεται μέσω ενός ελατηρίου σταθερός  $K$  με το σταθερό σημείο  $O$ . Το όχημα μπορεί να κινείται χωρίς τριβές κατά μήκος του οριζώντιου άξονα  $x$ . Πάνω στο όχημα στήνουμε ένα απλό εκκεντρικό με μήκος  $l$  και μάζα  $M_2$ . Να υπολογιστούν οι ιδιοσυχνότητες των μικρών ταλαντώσεων του συστήματος γύρω από τη θέση ισορροπίας ως συνάρτηση των μεγεθών  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $l$  της σταθερός του ελατηρίου  $K$  και της επιτάχυνσης της βαρύτητας  $g$ .



2.

Θεωρήστε μια τελείως ελαστική χορδή με γραμμική πυκνότητα  $\mu$ , η οποία τείνεται με δύναμη  $T$  κατά μήκος του άξονα  $x$ .

Υποθέστε ότι η χορδή έχει μήκος  $L$  και ότι το άκρο της  $x = 0$  είναι σταθερό, ενώ το άλλο άκρο  $x = L$  φέρει άμαξο δακτύλιο, ο οποίος μπορεί να ολισθαίνει κατά μήκος ενός κατακόρυφου στύλου χωρίς τριβή. Γράψτε την έκφραση της απομάκρυνσης  $\psi_n(x, t)$  για τον κανονικό τρόπο ταλάνωσης (ΚΤΠ)  $n$  της χορδής, βρείτε την αντίστοιχη συχνότητα  $\omega_n$  αυτού του ΚΤΠ για  $n = 5$  και σχεδιάστε το σχήμα της χορδής.

3.

Η εξίσωση που διέπει τη διάδοση ενός κύματος σε κάποιο μέσο όπως μια μη-ιδανική χορδή είναι της μορφής

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \gamma \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}, \quad \text{όπου } \alpha, \beta, \gamma \text{ είναι σταθερές}$$

Υπολογίστε:

- τη σχέση διασποράς,
- τη φασική και την ομαδική ταχύτητα ως συναρτήσεις του κυματικού αριθμού  $k$ ,
- τη μήκη κύματος και τις αντίστοιχες συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάνωσης της χορδής, αν έχει μήκος  $L$  και τα δύο της άκρα είναι σταθερά. Υποδείξη: Θεωρήστε μετατοπίσεις της μορφής

$$y(x, t) = A e^{i(\omega t - kx)} + B e^{i(\omega t + kx)}$$

4. Σε ένα σύστημα τριών σχισμών (λεπί ευθείας), η μεταξύ τους απόσταση (ανά δυο) είναι  $D$ . Ένα αρμονικό ηλεκτρομαγνητικό κύμα, με μήκος κύματος  $\lambda$  προσπίπτει κάθετα προς τη γραμμή που συνδέει τις σχισμές.

(α) Αν το πλάτος που εξέρχεται από κάθε σχισμή είναι ίσο με  $v_0$ , να υπολογίσετε το συνολικό πλάτος του κύματος στο σημείο  $\Sigma$ , σε ακτινική απόσταση  $r$ , ως συνάρτηση της γωνίας  $\theta$ , ως προς την κάθετο στη γραμμή που συνδέει τις σχισμές.

(β) Βρείτε τις γωνιακές θέσεις  $\theta$  για τις οποίες η ένταση του κύματος ισούται με μηδέν.

### Τυπολόγιο:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dt}$$

$$\text{Νόμος Νεύτωνα: } \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

$$\text{Δυναμική/Κινητική Ενέργεια: } \mathbf{F} = -\nabla U, \quad U(\mathbf{A}) - U(\mathbf{B}) = -\int_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad K = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2, \quad K + U = \text{σταθερή}$$

$$\text{Αρμονικός ταλαντωτής: } \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad x = x_0 \sin(\omega t + \phi), \quad U = \frac{1}{2}Cx^2, \quad F = -kx$$

$$\dots \text{ με απόσβεση: } \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2\tau} \frac{dx}{dt} + \omega^2x = 0, \quad x = x_0 e^{-t/(2\tau)} \sin(\omega t + \phi)$$

$$\text{Κυματική εξίσωση: } \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad \text{διάνυσμα Ρογνιτίνγ: } \langle S \rangle = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

**Ηλεκτρομαγνητικά κύματα:**  $v_\phi = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ , στο κενό.

$v_\phi = c/n$ ,  $n$  = δείκτης διάθλασης μέσου διάδοσης.

**Οριακή ταχύτητα:**  $v_g = \frac{d\omega(k)}{dk}$ , όπου  $\omega = \omega(k)$  η σχέση διασποράς.

**Διάδοση κύματος χωρίς παραμόρφωση:** Η έκφραση  $f(x+vt)$  και  $g(x-vt)$  παριστάνει κύμα (διαταραχή) που διαδίδεται σε μία διάσταση χωρίς παραμόρφωση με στιγμιαία απομάκρυνση  $f$  (αντίστοιχα  $g$ ) και ταχύτητα  $v$  προς τα δεξιά (αντίστοιχα προς τα αριστερά) και ικανοποιεί την κλασική κυματική εξίσωση.

### Οδύον αρμονικό κύμα

Βαθμωτό, σε μία διάσταση:  $\psi(x,t) = A \cos(\omega t \mp kx)$  ή  $\psi(x,t) = A e^{i(\omega t \mp kx)}$

Βαθμωτό, στο χώρο:  $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \psi_0 \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)$

Διανυσματικό, στο χώρο:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z), \quad \text{όπου } \mathbf{E}_0 = E_{0x} \hat{x} + E_{0y} \hat{y} + E_{0z} \hat{z}$$

**Ταχύτητα φάσης:**  $v_\phi = \omega(k)/k$

όπου  $\omega = \omega(k)$  η σχέση διασποράς = κυκλική συχνότητα =  $2\pi$ /περίοδος  $T$

$k = 2\pi$ /μήκος κύματος  $\lambda$  = κυματριθμός

**Ισονική χορδή:**  $v_\phi = \sqrt{T_0/\mu}$ , ανεξάρτητη του  $k$ .  $T_0$  = τείνουσα δύναμη,  $\mu$  = γραμμική πυκνότητα

**Εγκάρσια κύματα σε χορδή με σφαιρίδια μάζας  $M$  και απόστασης  $a$**

$$v_\phi(k) = 2\sqrt{\frac{T_0}{Ma} \frac{\sin(ka/2)}{k}}$$

**Ηχητικά κύματα στον αέρα:**  $v_\phi = \sqrt{\gamma P_0/\rho_0}$ ,  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ ,  $P_0$  = πίεση,  $\rho_0$  = πυκνότητα

**Υδάτινα κύματα:**  $\omega^2(k) = \left(gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3\right) \tanh(kh)$