ΜΑΘΗΜΑ: «ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ», ΣΕΜΦΕ-ΕΜΠ, ΑΚΑΔ. ΕΤΟΣ 2018-2019
ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 28/1/2019, ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Λ. ΤΣΕΤΣΕΡΗΣ

Το 1ο Θέμα είναι υποχρεωτικό. Επιλέξτε και 2 από τα υπόλοιπα Θέματα (δηλαδή 2 από το 2ο, 3ο, ή 4ο Θέμα). Όλα τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα. **Δεν επιτρέπεται η χρήση βιβλίων, σημειώσεων, τηλεφώνου ή οποιασδήποτε άλλης ηλεκτρονικής συσκευής. Διάρκεια: 2 ώρες.**

Θέμα 1ο: Η Χαμιλτονιανή του άτομου του υδρογόνου (συμπεριλαμβανομένης της σύζευξης σπιν-τροχιάς) γράφεται ως $H_1 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2m_e^2c^2}\frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{L}}{r^3}$. (1) Οι ιδιοενέργειες της H_1 συμβολίζονται ως E_{nj} και θεωρούνται γνωστές. Στα επόμενα αναφερόμαστε σε p-ηλεκτρόνιο, δηλαδή με $l=1$. Ορίζουμε επίσης τον τελεστή της ολικής στροφορμής ως $\mathbf{J} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{L}+\mathbf{S}$. **(α) (13 μονάδες)** Βρείτε τρεις καταστάσεις $|j\, m_j\rangle$ που είναι ιδιοκαταστάσεις της H_1 ως προς το γωνιακό-σπιν μέρος. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές των κβαντικών αριθμών j και m_j; **(β) (7 μονάδες)** Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $[J^2,[J^2,S_z]] = 2\hbar^2(J^2S_z + S_zJ^2) - 4\hbar^2(\mathbf{S}\cdot\mathbf{J})J_z$ για να δείξετε ότι ισχύει $\langle jm_j|(J^2S_z+S_zJ^2)|jm_j\rangle = 2\langle jm_j|(\mathbf{S}\cdot\mathbf{J})J_z|jm_j\rangle$. (2) **(γ) (13 μονάδες)** Χρησιμοποιώντας την σχέση (2) και θεωρία διαταραχών πρώτης τάξης, βρείτε τις διορθώσεις που επιφέρει ασθενές ομογενές μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}=B\,\hat{\mathbf{z}}$ στις ιδιοενέργειες της Χαμιλτονιανής H_1.

Θέμα 2ο: (α) (18 μονάδες) Με αφετηρία τις μεταθετικές σχέσεις που συνδέουν τις συνιστώσες της τροχιακής στροφορμής, αποδείξτε ότι ο τελεστής $L_+ \stackrel{\text{def}}{=} L_x + i L_y$ είναι τελεστής αναβίβασης, δηλαδή ότι ισχύει $L_+|l,m\rangle = C_{l,m}|l,m+1\rangle$. Βρείτε τον συντελεστή $C_{l,m}$ και εξηγήστε με βάση την αλγεβρική μέθοδο τι τιμές παίρνουν οι κβαντικοί αριθμοί l και m. **(β) (15 μονάδες)** Βρείτε την αβεβαιότητα που έχει μέτρηση του τελεστή L_x πάνω σε μία ιδιοκατάσταση $|l,m\rangle$.

Θέμα 3ο: (α) (15 μονάδες) Χρησιμοποιώντας την αλγεβρική μέθοδο και την σύμβαση $S_zX_\uparrow = \frac{\hbar}{2}X_\uparrow, S_zX_\downarrow = -\frac{\hbar}{2}X_\downarrow$, όπου $X_\uparrow = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, X_\downarrow = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ είναι διανύσματα βάσης ενός χώρου V, βρείτε τους τελεστές S_x, S_y και S_z για σωματίδιο με σπιν $S=1/2$. Μπορείτε να θέσετε $\hbar=1$. **(β) (5 μονάδες)** Δείξτε ότι οποιαδήποτε κατάσταση-διάνυσμα X του χώρου V είναι ιδιοκατάσταση του τελεστή $S^2 \stackrel{\text{def}}{=} S_x^2+S_y^2+S_z^2$. Ποιες είναι οι αντίστοιχες ιδιοτιμές; **(γ) (8 μονάδες)** Έστω ότι το σωματίδιο βρίσκεται την χρονική στιγμή $t=0$ στην κατάσταση $X_0 = N\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$, όπου N σταθερά. Αν η Χαμιλτονιανή είναι η $H = AS^2 + BS_z$, όπου A και B σταθερές με κατάλληλες φυσικές διαστάσεις, βρείτε την κατάσταση σε κατοπινή χρονική στιγμή $t>0$. **(δ) (5 μονάδες)** Βρείτε την μέση τιμή μέτρησης του S_x πάνω στην κατάσταση X_0.

Θέμα 4ο: (α) (8 μονάδες) Αποδείξτε ότι για τους τελεστές δημιουργίας $a^\dagger$ και καταστροφής a ενός μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή ισχύει η σχέση $a(a^\dagger)^n|0\rangle = n(a^\dagger)^{n-1}|0\rangle, \forall\, n\in\mathbb{N}$, όπου $|0\rangle$ είναι η βασική κατάσταση. **(β) (16 μονάδες)** Έστω ότι $|\lambda\rangle$ είναι ιδιοκατάσταση του τελεστή a, δηλαδή ισχύει $a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$. Δείξτε ότι η κανονικοποιημένη κατάσταση $|\lambda\rangle$ μπορεί να γραφτεί ως $|\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2}e^{\lambda a^\dagger}|0\rangle$. **(γ) (9 μονάδες)** Την χρονική στιγμή $t=0$ ταλαντωτής βρίσκεται στην κατάσταση $|\lambda\rangle$ και γίνεται μέτρηση της ενέργειας. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές της μέτρησης και ποιες οι αντίστοιχες πιθανότητες; Ποια είναι η μέση τιμή της μέτρησης;