

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1 (25). Ένα τυχαίο πείραμα έχει δύο αποτελέσματα: Επιτυχία (E) με πιθανότητα  $p$  και Αποτυχία (A) με πιθανότητα  $q = 1 - p$ . Θεωρούμε το εξής τυχερό παιχνίδι: Εκτελούμε ανεξάρτητες επαναλήψεις του εν λόγω πειράματος μέχρι να έρθει η πρώτη Επιτυχία. Αν η Επιτυχία έρθει στην 1η εκτέλεση κερδίζουμε 2 Ευρώ, αν έρθει στην 2η εκτέλεση κερδίζουμε 1 Ευρώ, αν έρθει στην 3η εκτέλεση κερδίζουμε  $1/2$  Ευρώ, αν έρθει στην 4η εκτέλεση κερδίζουμε  $1/4$  Ευρώ, αν έρθει στην 5η εκτέλεση κερδίζουμε  $1/8$  Ευρώ, κλπ.

(α) Να βρεθεί το αναμενόμενο κέρδος στο παιχνίδι αυτό.

(β) Αν  $p = 1/3$ , είναι δίκαιο να κοστίζει 1 Ευρώ η συμμετοχή σε ένα τέτοιο παιχνίδι. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

2 (40). Έστω  $X$  και  $Y$  δύο τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x, y) = c|x||y|, \quad (x, y) \in D \quad \text{και} \quad f(x, y) = 0, \quad (x, y) \notin D,$$

όπου  $D$  είναι ο μοναδιαίος δίσκος, δηλ.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

(α) Να υπολογιστεί η σταθερά  $c$ .

(β) Να προσδιοριστούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας  $f_X(x)$  και  $f_Y(y)$  των  $X$  και  $Y$  αντίστοιχα, καθώς και η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $f(x|y)$  της  $X$ , δεδομένου  $Y = y$ .

(γ) Να υπολογιστούν οι μέσες τιμές  $E[X]$  και  $E[Y]$  των  $X$  και  $Y$  αντίστοιχα, καθώς και η συνδιακύμανση  $Cov(X, Y)$  των  $X$  και  $Y$ .

(δ) Είναι οι τυχαίες μεταβλητές  $X$  και  $Y$  ανεξάρτητες; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

3 (35). Ένα μηχάνημα καζίνο (slot machine) έχει προγραμματιστεί να προσφέρει κάθε ώρα στους παίκτες ένα συνολικό κέρδος  $X$  Ευρώ, ανεξάρτητα από τις άλλες ώρες, με  $\mu_X = E[X] = 180$  και  $\sigma_X^2 = V[X] = 10.125$  ( $\sigma_X = 45\sqrt{5}$ ). Από μακροχρόνια δεδομένα γνωρίζουμε ότι το ποσό  $Y$  (σε Ευρώ) που παίζεται από τους παίκτες κάθε ώρα στο μηχάνημα είναι επίσης ανεξάρτητο από τα ποσά που παίζονται τις άλλες ώρες, καθώς και τα ποσά που κερδίζονται, και έχει ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $[100, 300]$ .

(α) Να υπολογιστεί προσεγγιστικά η πιθανότητα μέσα σε ένα μήνα το μηχάνημα να προσφέρει συνολικά κέρδη πάνω από 135.000 Ευρώ.

(β) Να υπολογιστεί προσεγγιστικά η πιθανότητα μέσα σε ένα μήνα το καθαρό κέρδος που απέφερε το μηχάνημα στο καζίνο (δηλ. το συνολικό ποσό που παίχτηκε μείον το συνολικό ποσό που πρόσφερε το μηχάνημα) να είναι πάνω από 10.000 Ευρώ.

(γ) Έστω ότι θέλουμε να αλλάξουμε την παράμετρο  $\sigma$  στο πρόγραμμα του μηχανήματος. Ποιά είναι η μεγαλύτερη τιμή του  $\sigma$  για την οποία το καθαρό κέρδος που θα αποφέρει κάθε μήνα το μηχάνημα στο καζίνο να είναι πάνω από 10.000 Ευρώ με πιθανότητα τουλάχιστον 95%;

(Υποθέτουμε ότι το καζίνο λειτουργεί όλο το 24ωρο και ότι ο μήνας έχει 30 ημέρες).