

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 3^{ΟΥ} ΕΞΑΜΗΝΟΥ
στις ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, 2015

ΖΗΤΗΜΑ ΠΡΩΤΟ:

α) Δίνεται ότι η ορίζουσα Wronski δύο συναρτήσεων είναι η $W(t) = t^2 - 3$. Είναι οι συναρτήσεις γραμμικώς ανεξάρτητες ή εξαρτημένες. Διατυπώστε και αποδείξτε τη σχετική πρόταση που συνδέει τη γραμμική ανεξαρτησία δύο συναρτήσεων με την ορίζουσα Wronski, ισχύει και το αντίστροφο, τεκμηριώστε την απάντησή σας. (μον. 1)

β) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $(x-1)y'' - xy' + y = 2(x-1)^2 e^{-x}$, $x > 1$, αν μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η $y_1 = e^x$. (μον. 1.2)

ΖΗΤΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ: α) Δίνεται η εξίσωση $x^2 y'' + ax y' + by = 0$. Να προσδιοριστούν συνθήκες για τα a και b ώστε όλες οι λύσεις της να είναι φραγμένες του $x \rightarrow \infty$. (μον. 1)

β) Να χαρακτηριστούν τα ιδιάζοντα σημείο και αν είναι κανονικό να καθοριστεί η δείκτρια εξίσωση, οι εκθέτες ιδιομορφίας και η ακτίνα σύγκλισης της εξίσωσης $(x^2 + 2)^2 (x+3)y'' + 3(x^2 + 1)y' + 3y = 0$ (μον. 0.6)

α) Να λυθεί με χρήση ολοκληρωτικού μετασχηματισμού η εξίσωση

$$y'' + y = \begin{cases} \cos 3t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & \pi \leq t < \infty \end{cases} \quad y(0) = 0, y'(0) = 0 \quad (\text{μον. 1.2})$$

ΖΗΤΗΜΑ ΤΡΙΤΟ:

α) Να βρεθεί το γενικό ολοκλήρωμα της διαφορικής εξίσωσης $(x^4 \ln x - 2xy^3)dx + 3x^2 y^2 dy = 0$ (μον. 1)

β) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών και να προσδιορισθεί το διάστημα ορισμού της λύσης $x^2 y' - y^2 - 2xy = 0$, $y(1) = 1$ (μον. 1)

γ) Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών $y' = \sqrt{t-y}$, $y(t_0) = y_0$. Να προσδιορισθούν οι περιοχές του επιπέδου ty στις οποίες ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (μον. 0.5)

ΖΗΤΗΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ:

Με τη μέθοδο των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων να βρεθεί η γενική λύση του γραμμικού συστήματος

$$\mathbf{x}' = A \cdot \mathbf{x} \quad \text{όπου} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}. \quad \text{Να προσδιορισθεί το είδος και η ευστάθεια του κρίσιμου σημείου} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ και να σχεδιασθεί κατά προσέγγιση το επίπεδο φάσεων.} \quad (\text{μον. 2.5})$$

Δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

$$L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad L(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}, \quad L(u_a(t)f(t-a)) = e^{-sa}F(s).$$

$$\text{αν } F(s) = L(f(t)) \text{ και } u_a(t) = H(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t \geq a. \end{cases} \quad a \geq 0.$$

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Καλή επιτυχία