ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ – ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ – ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2016-17
Φυσική Συμπυκνωμένης Ύλης (Ενότητα: Ημιαγωγοί)
Ασκήσεις

Ι. Ράπτης

1. Κρύσταλλος πυριτίου ($E_g = 1.17\,eV = 1170\,meV$) νοθεύεται με προσμίξεις αρσενικού, ($E_C - E_D = 40\,meV$), σε συγκέντρωση 10^{16} (άτομα As)/cm^3. Να υπολογιστεί η στάθμη Fermi σε θερμοκρασίες, α) δωματίου (300K), β) υγρού αζώτου (77K), γ) υγρού ηλίου (4K), με βάση τη συνθήκη ουδετερότητας, στη μη-προσεγγιστική της έκφραση. (Υπόδειξη: Για κάθε μία από τις τρεις θερμοκρασίες, σχεδιάστε, με τη βοήθεια υπολογιστή, συναρτήσει της μεταβλητής E_F, την συνάρτηση συνολικού φορτίου $Q = p + N_D^+ - n - N_A^-$, και προσδιορίστε την τιμή της μεταβλητής για την οποία η συνάρτηση φορτίου Q μηδενίζεται). δ) Να υπολογιστούν τα ποσοστά ιονισμού των προσμείξεων, σε κάθε περίπτωση. ε) Να σχολιασθεί η συνέπεια των απαντήσεων στα ερωτήματα α-δ, αν αυτά προέκυπταν με βάση την σχέση που προϋποθέτει τον ολικό ιονισμό.

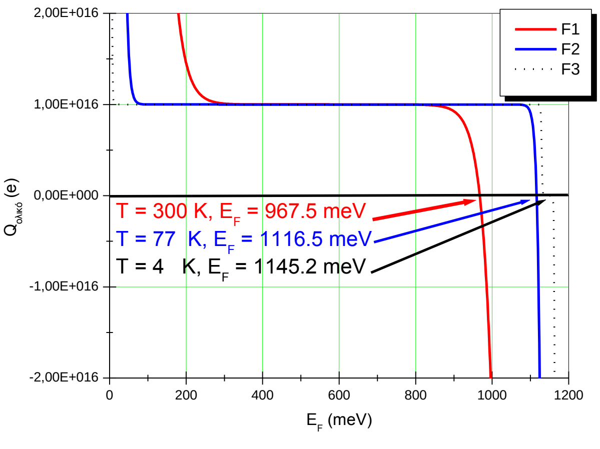
Απάντηση

(α – γ) Η απαίτηση ουδετερότητας του συστήματος «Ημιαγωγός-προσμείξεις-φορείς» ισοδυναμεί με την σχέση $Q(E_F) = |e|\left(p(E_F) + N_D^+(E_F) - n(E_F) - N_A^-(E_F)\right) = 0$, της οποίας ρίζα είναι η ζητούμενη στάθμη Fermi. Στην παράσταση αυτή τα p, N_D^+, n, N_A^- είναι μη-γραμμικές συναρτήσεις του E_F και του kT, Στη συγκεκριμένη περίπτωση, μάλιστα λείπει εντελώς ο όρος των αποδεκτών ($N_A = 0 \Rightarrow N_A^- = 0$)

Η ρίζα της παράστασης μπορεί να προσδιοριστεί γραφικά, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα, όπου έχει χαραχτεί, ως συνάρτηση του $x \equiv E_F$, η παράσταση

*Q=1*10^16/(1+2*exp(-(1170-40-x)/kT))+1*10^19*exp(-(x)/kT)-2.4*10^19*exp(-(1170-x)/kT).*

Στον προηγούμενο τρόπο γραφής έχει ληφθεί ως επίπεδο μηδενικής ενέργειας το μέγιστο της στάθμης σθένους ($E_V \equiv 0$), ενώ ο όρος kT παίρνει τις τιμές 26 meV, (77/300)26=6.7 meV, και (4/300)26=0.35 meV, για τις θερμοκρασίες 300K, 77K, και 4K, αντίστοιχα.



Τα σημεία μηδενισμού του ολικού φορτίου (ρίζες της παράστασης) δίνουν τις τιμές των αντιστοίχων επιπέδων Fermi.

T=300K$\Rightarrow E_F$ = 967.5 meV

T=77K $\Rightarrow E_F$ = 1116.5 meV

T=4K $\Rightarrow E_F$ = 1145.2 meV

ενώ η οριακή τιμή είναι

$E_F = 1150\,meV$

$\left(E_F[T \to 0] = \dfrac{E_C + E_D}{2}\right)$.

(δ) Στην προσέγγιση του ολικού ιονισμού και του εξωγενούς χαρακτήρα του συστήματος ($n \approx N_D^+ \approx N_D$), η στάθμη Fermi υπολογίζεται από τη σχέση

$E_F = E_C - kT \ln\left({N_C}/{N_D} \right)$, σύμφωνα με την οποία παίρνουμε, αντίστοιχα

T=300K⇒E_F≈ 963.6 meV (έναντι του ακριβούς: 967.5 meV) (διαφορά: 0.4%)

T=77K ⇒E_F≈ 1116.8 meV (έναντι του ακριβούς: 1116.5 meV) (διαφορά: 1.1%)

T=4K ⇒E_F≈ 1167.2 mev (έναντι του ακριβούς: 1145.2 meV) (διαφορά: 1.9%)

(ε) Παρ' ότι οι διαφορές, από τις ακριβείς τιμές της στάθμης Fermi, δεν φαίνεται να ξεπερνούν το 2%, εντούτοις, υπάρχει αυξανόμενη ασυνέπεια (στις χαμηλές θερμοκρασίες) ανάμεσα στην προσέγγιση του ολικού ιονισμού και στο αντίστοιχα υπολογιζόμενο ποσοστό ιονισμού $N_D^+ = \dfrac{N_D}{1 + 2\exp\left(-\dfrac{E_D - E_F}{kT} \right)}$, με βάση την προσεγγιστική τιμή της E_F.

2. α) Υπολογίστε το επίπεδο Fermi, σε θερμοκρασία δωματίου, για τρία δείγματα πυριτίου (Si) εμπλουτισμένα με προσμίξεις γαλλίου (Ga) με συγκεντρώσεις 10^{14} άτομα/cm^3, 10^{16} άτομα/cm^3, 10^{18} άτομα/cm^3, αντίστοιχα, <u>υποθέτοντας πλήρη ιονισμό των προσμείξεων</u>. β) Χρησιμοποιείστε τις τιμές που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα για το επίπεδο Fermi του καθενός δείγματος και ελέγξτε κατά πόσο η υπόθεση του ολικού ιονισμού ευσταθεί, κατά περίπτωση.

<u>Απάντηση</u>

(α – β) Οι προσμείξεις είναι τύπου «αποδέκτες» και, στην προσέγγιση του ολικού ιονισμού, με δεδομένο ότι οι ενδογενείς συγκεντρώσεις σε θερμοκρασία δωματίου, στο Si, είναι της τάξης του $\approx 10^{10} cm^{-3}$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι φορείς πλειονότητας προέρχονται με πολύ καλή προσέγγιση από τους ιονισμένους αποδέκτες, (που είναι από 4 μέχρι 8 τάξεις μεγέθους πολυπληθέστεροι των ενδογενών), δηλαδή, $p_p = N_A^- \approx N_A$, οπότε η στάθμη Fermi υπολογίζεται από τη σχέση $E_F = E_V + kT \ln\left[N_V / p_p \right] = E_V + kT \ln\left[N_V / N_A \right]$, όπου $N_V = 1 \times 10^{19} cm^{-3}$. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Πίνακα που ακολουθεί, όπου έχει ληφθεί ως επίπεδο αναφοράς των ενεργειών η στάθμη σθένους, $E_V = 0$, Στον ίδιο Πίνακα φαίνονται και τα ποσοστά ιονισμού, όπως προκύπτουν από τη σχέση

$$N_A^- = N_A - N_A^0 = N_A - \frac{N_A}{1 + \frac{1}{2}\exp\left(\dfrac{E_F - E_A}{kT} \right)} = \frac{N_A}{1 + 2\exp\left(-\dfrac{E_F - E_A}{kT} \right)}$$

στην οποία υποθέτουμε μία τυπική στάθμη αποδεκτών $E_A - E_V \approx 70\, meV$, όπως προκύπτει από σχετικούς πίνακες και σχήματα από το Απόσπασμα Σημειώσεων.

N_A	E_F	N_A^- / N_A	Ολικός Ιονισμός
10^{14}	299.0	99,97%	Ισχύει πολύ καλά
10^{16}	179.6	97,71%	Ισχύει σχετικά καλά
10^{18}	59.9	25.32%	Δεν ισχύει

3. Ενας στοιχειακός ημιαγωγός έχει πυκνότητα ενδογενών ηλεκτρονίων, σε θερμοκρασία δωματίου, $n_i=10^{11}$ cm^{-3}. Στον ημιαγωγό αυτόν προσθέτουμε ομοιόμορφα κατανεμημένες προσμείξεις, τύπου «δότες», με συγκέντρωση, $N_D=3\times10^{16}$ cm^{-3}, και τύπου «αποδέκτες», με συγκέντρωση $N_A=8\times10^{16}$ cm^{-3}. Να υπολογισθούν, σε θερμοκρασία δωματίου, οι συγκεντρώσεις ηλεκτρονίων (n) και οπών (p), καθώς και η διαφορά E_F-E_V, του επιπέδου Fermi από την κορυφή της ζώνης σθένους, αν το ενεργειακό χάσμα του υλικού είναι 0.8 eV, και οι ενεργές μάζες πυκνότητας καταστάσεων είναι $m_n^*=m_0$ και $m_p^*=0.5m_0$,

Απάντηση

Αν προσθέσουμε στον ημιαγωγό αυτόν ομοιόμορφα κατανεμημένες προσμείξεις, τύπου «δότες», με συγκέντρωση, $N_D=3\times10^{16}$ cm^{-3}, και τύπου «αποδέκτες», με συγκέντρωση $N_A=8\times10^{16}$ cm^{-3}, τότε έχουμε ένα ημιαγωγό τύπου p, αφού υπερτερούν οι αποδέκτες ηλεκτρονίων. Υποθέτοντας ότι, λόγω της χαμηλής συγκέντρωσης των προσμείξεων, έχουμε ολικό ιονισμό και για τα δύο είδη, ($N_A^- \approx N_A,\ \ N_D^+ \approx N_D$), μπορούμε να γράψουμε την συνθήκη ουδετερότητας με τη μορφή $n_p + N_A = p_p + N_D$.

Συνδυάζοντας αυτή την σχέση με τον νόμο δράσης των μαζών, υπολογίζουμε τις συγκεντρώσεις φορέων μειονότητας και πλειονότητας

$$\left\{\begin{matrix} n_p + N_A = p_p + N_D \\ n_p p_p = n_i^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} p_p = \frac{1}{2}\left[(N_A - N_D) + \sqrt{(N_A - N_D)^2 + 4n_i^2}\right] \\ n_p = n_i^2 \big/ p_p \end{matrix}\right\}$$

Αν ο ημιαγωγός αυτός έχει πυκνότητα ενδογενών ηλεκτρονίων, σε θερμοκρασία δωματίου, $n_i=10^{11}$ cm^{-3}, ο δεύτερος όρος στην έκφραση για την συγκέντρωση p_p είναι ασήμαντος ($4\times10^{22} << 25\times10^{32}$), οπότε : $p_p \simeq N_A - N_D = 5\times10^{16} cm^{-3}$, και $n_p = 2\times10^5 cm^{-3}$.

Για τον υπολογισμό της στάθμης Fermi, $p_p = N_V \cdot e^{\frac{E_V - E_F}{kT}} \Rightarrow E_F = E_V + kT\ln\left[N_V / p_p\right]$,

όπου πρέπει να υπολογιστεί η ενεργός πυκνότητα καταστάσεων της ζώνης σθένους, N_V.

Για τον υπολογισμό αυτόν, συνδυάζουμε τις σχέσεις

$$\left\{ N_V = 2\left(\frac{m_p^* kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2},\quad N_C = 2\left(\frac{m_n^* kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \right\} \Rightarrow \frac{N_V}{N_C} = \left(\frac{m_p^*}{m_n^*}\right)^{3/2} \approx 0.35$$

και την σχέση $n_i^2 = N_V N_C e^{-\frac{E_g}{kT}} \Rightarrow N_V N_C = n_i^2 e^{\frac{E_g}{kT}} \approx 7.9\times10^{35} cm^{-3}$,

οπότε : $N_V \simeq 5,25\times10^{17} cm^{-3}$

Τελικά: $E_F - E_V = kT\ln\left[N_V / p_p\right] \simeq 59\ meV$

4. Ημιαγωγικό υλικό έχει $E_V = 0, E_C = 1\text{eV}$, και ενεργές πυκνότητες καταστάσεων, για τη ζώνη αγωγιμότητας και τη ζώνη σθένους τέτοιες ώστε $N_C = \left(N_V / 2\right) = 10^{18} cm^{-3}$.

(α) Να υπολογίσετε την ενδογενή πυκνότητα φορέων του ημιαγωγού σε θερμοκρασίας T=300K.

(β) Αν οι ευκινησίες ηλεκτρονίων και οπών, σε θερμοκρασία T=300K, είναι αντίστοιχα $\mu_e = 1200\,\mathrm{cm^2/Vs}$ και $\mu_h = 400\,\mathrm{cm^2/Vs}$, να υπολογίσετε την αγωγιμότητα του υλικού, σε μονάδες $\mathrm{Ohm^{-1}cm^{-1}} = \mathrm{S\,cm^{-1}}$.

(γ) Από των παραπάνω ημιαγωγό κατασκευάζουμε επαφή $p-n$, με προσμίξεις, στις αντίστοιχες περιοχές, $N_A = 10^{12}\,\mathrm{cm^{-3}}$ και $N_D = 10^{14}\,\mathrm{cm^{-3}}$, που θεωρούνται ολικά ιονισμένες. Να υπολογίσετε: (γ_1) το είδος και την συγκέντρωση φορέων μειονότητας (μειοψηφίας) σε κάθε περιοχή (p,n), (γ_2) το δυναμικό επαφής, και (γ_3) να κάνετε ένα σχεδιάγραμμα των ενεργειακών ζωνών στην περιοχή της επαφής $p-n$, [σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας, για T=300^{o}K]

(δ) Να υπολογίσετε την απόσταση της κοινής στάθμης Fermi, από το μέγιστο της ζώνης σθένους, σε κάθε μία από τις δύο περιοχές (p,n) της επαφής $p-n$.

Φορτίο ηλεκτρονίου: $e = -1.6\times10^{-19}C$, $kT(300K) \approx 25\,meV$,

$1eV = 1.6\times10^{-19}J$, $\quad \hbar = 6.58\times10^{-16}eVs$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) $n_i = p_i = \sqrt{N_C N_V}\exp\left(-\dfrac{E_g}{2kT}\right) = \sqrt{2}\times10^{18}\mathrm{cm^{-3}}e^{-\frac{1000meV}{50meV}} \Rightarrow \boxed{n_i = p_i \approx 2.90\times10^{9}\,\mathrm{cm^{-3}}}$

(β)

Συνολική αγωγιμότητα λόγω ηλεκτρονίων (n) και οπών (h): $\sigma = \sigma_e + \sigma_h = |e|(n\mu_e + p\mu_h)$

$$\sigma = 1.6\times10^{-19}C\times n_i\times(\mu_e+\mu_h) = 1.6\times10^{-19}C\times2\sqrt{2}\times10^{9}\,\mathrm{cm^{-3}}\times1600\frac{\mathrm{cm^2}}{\mathrm{Vs}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\sigma = 7.24\times10^{-7}\,\mathrm{cm^{-1}\Omega^{-1}} = 7.24\times10^{-7}\,\mathrm{S\,cm^{-1}}}$$

(γ) Αν κατασκευάσουμε, από των παραπάνω ημιαγωγό, επαφή $p-n$, με προσμίξεις, που θεωρούνται ολικά ιονισμένες, τότε έχουμε στις αντίστοιχες περιοχές, $p_p \approx N_A^- \approx N_A = 10^{12}\,\mathrm{cm^{-3}}$ και $n_n \approx N_D^+ \approx N_D = 10^{14}\,\mathrm{cm^{-3}}$, οπότε:

(γ_1)η συγκέντρωση φορέων μειονότητας (μειοψηφίας) σε κάθε περιοχή (p,n), υπολογίζεται από τον νόμο δράσης των μαζών:

$$n_p = \frac{n_i^2}{p_p} = \frac{8.4\times10^{18}}{10^{12}}\mathrm{cm^{-3}} \Rightarrow \boxed{n_p = 8.4\times10^{6}\ \mathrm{cm^{-3}}}$$

$$p_n = \frac{n_i^2}{n_n} = \frac{8.4\times10^{18}}{10^{14}}\mathrm{cm^{-3}} \Rightarrow \boxed{p_n = 8.4\times10^{4}\ \mathrm{cm^{-3}}}$$

(γ_2) το δυναμικό επαφής, υπολογίζετε από τη σχέση :

$$V_0 = \frac{kT}{e}\ln\left(\frac{N_A N_D}{n_i^2}\right) = 25mV\ln\left(\frac{10^{26}}{5\times10^{18}}\right) \Rightarrow \boxed{V_0 = 408\,\mathrm{mV}}$$

(γ_3) το σχεδιάγραμμα των ενεργειακών ζωνών στην περιοχή της επαφής $p-n$, προκύπτει με βάση την απαίτηση ενιαίου χημικού δυναμικού (δηλ., επιπέδου Fermi), λόγω θερμοδυναμικής ισορροπίας, σε όλη την έκταση της επαφής (p-n)

(δ) $n_n = N_C e^{-\frac{E_C - E_{F(n)}}{kT}} \Rightarrow E_{F_{(n)}} = E_C - kT\ln\left(N_C / n_n\right) \Rightarrow \boxed{E_{F_{(n)}} \simeq 770\,\text{meV}}$

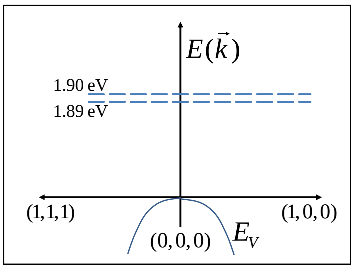
$$p_p = N_V e^{-\frac{E_{F(p)} - E_V}{kT}} \Rightarrow E_{F_{(p)}} = E_V + kT\ln\left(N_V / p_p\right) \Rightarrow \boxed{E_{F_{(p)}} \simeq 362\,\text{meV}}$$

Τα δύο αποτελέσματα οδηγούν σε μία διαφορά συνεπή με την υπολογισμένη τάση επαφής

$$E_{F_{(n)}} - E_{F_{(p)}} \simeq (770 - 362)\,\text{meV} = 408\,\text{meV} = eV_0$$

5. Ο τριμερής ημιαγωγός $Al_{0.4}Ga_{0.6}As$, χαρακτηρίζεται από τα παρακάτω τοπικά ελάχιστα της ζώνης αγωγιμότητας, (σε σχέση με το μέγιστο της ζώνης σθένους): $E_\Gamma = E_X = 1.89\,eV$ και $E_L = 1.90\,eV$.

Οι ενεργές πυκνότητες καταστάσεων των ηλεκτρονίων, στα τρία ακρότατα, είναι $N_\Gamma = N_X = 0.1 \times N_L$ και $N_V = N_\Gamma$, (όπου, N_V =ενεργός πυκνότητα καταστάσεων οπών στο μέγιστο της ζώνης σθένους).

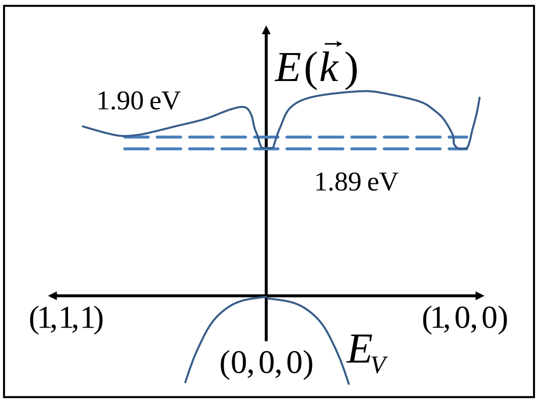


(α) Να σχεδιαστεί ποιοτικά η σχέση $E_C = E_C(\vec{k})$ σε ένα σχήμα όπως το διπλανό, να γραφεί η συνθήκη υπολογισμού της ενδογενούς στάθμης Fermi, (λαμβάνοντας υπόψη τα τρία ακρότατα, Γ, Χ, L), και να προσδιορισθεί η τιμή της, σε σχέση με το μέγιστο της ζώνης σθένους.

(β) Πόσο διαφέρει η τιμή που υπολογίσατε από την τιμή που θα προέκυπτε, αν δεν λαμβάνατε υπόψη σας το ακρότατο στο σημείο L ;

(γ) Αν υποθέσουμε ότι οι τιμές των E_Γ, E_X, E_L, (ως προς την E_V) καθώς και των ενεργών μαζών των ηλεκτρονίων, σε όλα τα ακρότατα, δεν μεταβάλλονται με τη θερμοκρασία, διερευνήστε αν υπάρχει περιοχή θερμοκρασιών για την οποία στο ακρότατο του σημείου L υπάρχει ίσος ή και περισσότερος πληθυσμός ηλεκτρονίων απ' ότι στα άλλα δύο ακρότατα Γ και Χ μαζί. Αν ΟΧΙ: γιατί; Αν ΝΑΙ: σε ποια περιοχή θερμοκρασιών συμβαίνει αυτό; Σχολιάστε.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



(α) Τα δύο ακρότατα με την ίδια ενέργεια, 1.89 eV αντιστοιχούν στα σημεία Γ≡(0,0,0) και Χ≡(1,0,0). Το ακρότατο με την υψηλότερη τιμή ενέργειας, 1,90 eV αντιστοιχεί στο L≡(1,1,1).

Επιπλέον, η ενεργός πυκνότητα καταστάσεων στο σημείο L≡(1,1,1) είναι πολύ μεγαλύτερη από την ενεργό πυκνότητα καταστάσεων στα σημεία Γ≡(0,0,0) και Χ≡(1,0,0), άρα η τοπική καμπυλότητα της σχέσης διασποράς είναι πολύ μικρότερη στο L από ότι στα Γ και Χ.

Λαμβάνοντας υπόψη διεγέρσεις από το μέγιστο της ζώνης σθένους και προς τα τρία ακρότατα της ζώνης αγωγιμότητας (Γ, Χ, L), η συνθήκη ουδετερότητας (διατήρηση φορτίου) γράφεται:

$$\left.\begin{array}{l} N_\Gamma e^{-\frac{E_\Gamma - E_F}{kT}} + N_X e^{-\frac{E_X - E_F}{kT}} + N_L e^{-\frac{E_L - E_F}{kT}} = N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{kT}} \\ E_\Gamma = E_X, \quad \kappa\alpha\iota \qquad N_\Gamma = N_X = N_L/10 = N_V \end{array}\right\} \Rightarrow N_\Gamma e^{-\frac{E_\Gamma - E_F}{kT}} + N_\Gamma e^{-\frac{E_\Gamma - E_F}{kT}} + 10 N_\Gamma e^{-\frac{E_L - E_F}{kT}} = N_\Gamma e^{-\frac{E_F - E_V}{kT}}$$

$$2e^{-\frac{E_\Gamma - E_F}{kT}} + 10e^{-\frac{E_L - E_F}{kT}} = e^{-\frac{E_F - E_V}{kT}} \Rightarrow e^{\frac{2E_F}{kT}}\left(2e^{-\frac{E_\Gamma}{kT}} + 10e^{-\frac{E_L}{kT}}\right) = e^{\frac{E_V}{kT}} = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow e^{\frac{2E_F}{kT}} = \frac{1}{\left(2e^{-\frac{E_\Gamma}{kT}} + 10e^{-\frac{E_L}{kT}}\right)} \Rightarrow \boxed{E_F = \frac{kT}{2}\left[\ln\left(2e^{\frac{E_\Gamma}{kT}} + 10e^{\frac{E_L}{kT}}\right)\right]}$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση $E_\Gamma = 1890\, meV$, $E_L = 1900\, meV$ και $kT(300K) = 26\, meV$,

παίρνουμε: $E_F = (E_V/2) + 916.8\, meV$.

(β) Αν δεν λαμβανόταν υπόψη το ελάχιστο στο σημείο L, τότε η τελική σχέση θα γραφόταν

$$E_F = \frac{E_V}{2} - \frac{kT}{2}\ln\left(e^{-\frac{E_\Gamma}{kT}} + \cancel{5e^{-\frac{E_L}{kT}}}\right)^{-1} = \frac{E_V}{2} - \frac{kT}{2}\ln\left(e^{-\frac{E_\Gamma}{kT}}\right) \Rightarrow \boxed{E_F = \frac{E_V + E_\Gamma}{2} = \frac{E_V}{2} + 936.99\, meV}$$

(γ) Δεδομένου ότι οι ενεργές μάζες των ηλεκτρονίων δεν εξαρτώνται από την θερμοκρασία, αυτό σημαίνει ότι και οι ενεργές πυκνότητες καταστάσεων των ηλεκτρονίων στα σημεία Γ, Χ και L, επίσης δεν εξαρτώνται από τη θερμοκρασία, όπως και τα ακρότατα, και

$$\left.\begin{array}{l} n_\Gamma + n_X \le n_L \Rightarrow N_\Gamma e^{-\frac{E_\Gamma - E_F}{kT}} + N_X e^{-\frac{E_X - E_F}{kT}} \le N_L e^{-\frac{E_L - E_F}{kT}} \\ E_\Gamma = E_X, \quad \kappa\alpha\iota \qquad N_\Gamma = N_X = N_L/10 \end{array}\right\} \Rightarrow N_\Gamma e^{-\frac{E_\Gamma - E_F}{kT}} + N_\Gamma e^{-\frac{E_\Gamma - E_F}{kT}} \le 10 N_\Gamma e^{-\frac{E_L - E_F}{kT}} \Rightarrow$$

$$e^{-\frac{E_\Gamma - E_F}{kT}} \le 5e^{-\frac{E_L - E_F}{kT}} \Rightarrow 5 \ge e^{\frac{E_L - E_\Gamma}{kT}} \Rightarrow \ln 5 \ge \frac{E_L - E_\Gamma}{kT} \Rightarrow$$

$$\boxed{kT \ge \frac{E_L - E_\Gamma}{\ln 5} \approx \frac{10meV}{1.61} \approx 6.2\, meV \Rightarrow T \ge 300\frac{6.2}{26}K \simeq 72K}$$

6. Ενδογενής ημιαγωγός με δομή αδάμαντα και πλεγματική σταθερά a, έχει μέγιστο της ζώνης σθένους στο κέντρο της ζώνης Brillouin (σημείο Γ) και παρουσιάζει την εξής δομή ζώνης-αγωγιμότητας:

i) υπάρχουν έξι (6) ελάχιστα στα 6 ισοδύναμα σημεία που απέχουν $0.1\times k_{\max}$, από το όριο της ζώνης Brillouin στο σημείο X, [κατά μήκος της διεύθυνσης (0,0,k) και των συμμετρικά ισοδυνάμων διευθύνσεων του αντίστροφου χώρου], με ενέργεια E_X, ως προς το μέγιστο της ζώνης σθένους,

ii) υπάρχει επίσης ένα τοπικό ελάχιστο της ζώνης αγωγιμότητας, στο σημείο Γ της ζώνης Brillouin, με ενέργεια E_Γ, ως προς το μέγιστο της ζώνης σθένους,και $E_\Gamma > E_X$.

Οι ενεργές μάζες των ελευθέρων ηλεκτρονίων, στη ζώνη αγωγιμότητας είναι $m^*(\Gamma)$, $m^*(X)_\parallel$, $m^*(X)_\perp$.

α) Δώστε, συναρτήσει του a, τις συντεταγμένες (k_x, k_y, k_z) των 6 ισοδύναμων τοπικών ελαχίστων $E_C(X)$.

β Με ενεργειακό επίπεδο αναφοράς το μέγιστο της ζώνης σθένους, γράψτε μία έκφραση για την ενέργεια των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας, που έχουν κρυσταλλική ορμή (k_x, k_y, k_z) τέτοια ώστε να ευρίσκονται, ενεργειακά, λίγο πάνω από το τοπικό ελάχιστο $E_C(\Gamma)$

γ) Μέ ενεργειακό επίπεδο αναφοράς το μέγιστο της ζώνης σθένους, γράψτε μία έκφραση για την ενέργεια των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας, που έχουν κρυσταλλική ορμή (k_x, k_y, k_z) τέτοια ώστε να ευρίσκονται, ενεργειακά, λίγο πάνω από το τοπικό ελάχιστο $E_C(X)$, κοντά σε ένα από τα 6 σημεία της ερώτησης (α), το οποίο μπορείτε να επιλέξετε ελεύθερα.

δ) Ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν τα μεγέθη $m^*(\Gamma)$, $m^*(X)_\parallel$, $m^*(X)_\perp$, ώστε να υπάρχει πεπερασμένη θερμοκρασία κατά την οποία οι πυκνότητες ηλεκτρονίων στα ελάχιστα Γ και X να εξισώνονται;

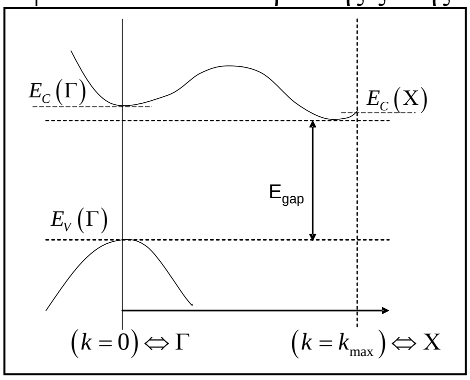
ε) Στην περίπτωση που ικανοποιείται η συνθήκη (δ), υπολογίστε, συναρτήσει των E_Γ, E_X, $m^*(\Gamma)$, $m^*(X)_\parallel$, $m^*(X)_\perp$, τη θερμοκρασία κατά την οποία εξισώνονται οι πυκνότητες ηλεκτρονίων στα δύο ελάχιστα (Γ και X) της ζώνης αγωγιμότητας;

Λύση

(α)Τα έξι ισοδύναμα ελάχιστα βρίσκονται στα σημεία

$$\left(\pm\frac{1.8\pi}{a},\ 0,\ 0\right),\qquad \left(0,\ \pm\frac{1.8\pi}{a},\ 0\right),\qquad \left(0,\ 0,\ \pm\frac{1.8\pi}{a}\right),$$

Αφού *2π/a* είναι το όριο της ζώνης Brillouin, με *a* την πλεγματική σταθερά.



(β) Η δομή ζώνης, όπως περιγράφεται στην άσκηση, έχει την μορφή που φαίνεται στο σχήμα, όπου

k=0 : το σημείο Γ του αντίστροφου χώρου

και

$k=k_{max}$: το σημείο X του αντίστροφου χώρου

Η ενέργεια των ηλεκτρονίων κοντά στο ελάχιστο (Γ) της ζώνης αγωγιμότητας γράφεται

$$E_{C,\Gamma}(\vec{k}) = E_{C,\Gamma} + \frac{\hbar^2\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)}{2m^*(\Gamma)}$$

(γ) Η ενέργεια των ηλεκτρονίων κοντά στο ελάχιστο (X) της ζώνης αγωγιμότητας γράφεται :

$$E_{C,X}(\vec{k}) = E_{C,X} + \frac{\hbar^2\left(k_x - 2\pi/a\right)}{2m_\parallel^*(X)} + \frac{\hbar^2\left(k_y^2+k_z^2\right)}{2m_\perp^*(X)}$$

(δ) Προκειμένου να εξισωθούν οι πυκνότητες ηλεκτρονίων στα ελάχιστα Χ και Γ πρέπει

$$N_{C,\Gamma}e^{-\frac{E_{C,\Gamma}-E_F}{kT}}=N_{C,X}e^{-\frac{E_{C,X}-E_F}{kT}}\Rightarrow\left(\frac{m_\Gamma^*}{m_X^*}\right)^{3/2}=\frac{e^{-\frac{E_{C,X}-E_F}{kT}}}{e^{-\frac{E_{C,\Gamma}-E_F}{kT}}}=e^{\frac{-E_X+E_F+E_\Gamma-E_F}{kT}}\Rightarrow\left(\frac{m_\Gamma^*}{m_X^*}\right)^{3/2}=e^{\frac{E_\Gamma-E_X}{kT}}$$

όπου

$$m_X^{*\,3}=M^2\left(m_\perp^2m_\|\right)\Rightarrow\left(m_X^*\right)^{3/2}=M\left(m_\perp^2m_\|\right)^{1/2}$$, οπότε

$$\frac{m_\Gamma^{3/2}}{M\left(m_\perp^2m_\|\right)}=e^{\frac{E_\Gamma-E_X}{kT}}\Rightarrow kT=\frac{2\left(E_\Gamma-E_X\right)}{\ln\left(m_\Gamma^3/m_\perp^2m_\|\right)}.$$

Επομένως, προκειμένου να υπάρχει *T>0* που να ικανοποιείται η προηγούμενη σχέση πρέπει $\ln\left(m_\Gamma^3/m_\perp^2m_\|\right)>0\Rightarrow m_\Gamma^3>m_\perp^2m_\|$.

(ε) Στην περίπτωση που ικανοποιείται η προηγούμενη συνθήκη (ερώτημα (γ)), η θερμοκρασία στην οποία εξισώνονται οι συγκεντρώσεις ηλεκτρονίων στα δύο ελάχιστα, δίνεται από τη σχέση

$$T=\frac{2\left(E_\Gamma-E_X\right)}{k\ln\left(m_\Gamma^3/m_\perp^2m_\|\right)}$$

7. Θεωρήστε γνωστό ότι η συγκέντρωση ατόμων πυριτίου, σε έναν καθαρό κρύσταλλο πυριτίου είναι 5×10^{22} cm^{-3}, η πυκνότητα ενδογενών φορέων σε θερμοκρασία δωματίου $n_i=1.45\times10^{10}$ cm^{-3}, ενώ οι κινητικότητες ηλεκτρονίων και οπών είναι $\mu_e=1350$ cm^{2}V^{-1}s^{-1} και $\mu_h=450$ cm^{2}V^{-1}s^{-1}, αντίστοιχα.
α) Δείξτε ότι, τόσο στην περίπτωση προσμίξεων τύπου n, (με συγκέντρωση N_D), όσο και (ανεξάρτητα) στην περίπτωση προσμίξεων τύπου p, (με συγκέντρωση N_A), μπορεί να προσδιορισθεί κατάλληλη συγκέντρωση προσμείξεων, ($N_{D,\text{κρίσιμη}}$= ; , ή $N_{A,\text{κρίσιμη}}$ = ; , αντίστοιχα), για την οποία το υλικό παρουσιάζει ελάχιστη αγωγιμότητα. Ποια είναι η τιμή της ελάχιστης αγωγιμότητας στις δύο περιπτώσεις;
β) Να υπολογιστεί η αντίσταση ενός κύβου 1×1×1 cm^3 πυριτίου σε θερμοκρασία δωματίου όταν είναι: β$_1$) απολύτως καθαρός, β$_2$) όταν έχει προσμίξεις αρσενικού (As: της στήλης V του περιοδικού συστήματος) σε αναλογία ατόμων $1/10^9$, β$_3$) όταν έχει προσμίξεις βορίου (B: της στήλης III του περιοδικού συστήματος) στην ίδια αναλογία ατόμων $1/10^9$, ως προς το πυρίτιο.
[Σε όλους τους υπολογισμούς να θεωρηθεί ότι έχουμε ολικό ιονισμό προσμείξεων**]**

<u>Απάντηση</u>

(α) Υπολογισμός ελάχιστης αγωγιμότητας : $\sigma=e\left(n\mu_n+p\mu_p\right)$

Προσμείξεις τύπου – n με $n\approx N_D$ και $p=\frac{n_i^2}{N_D}$, οπότε $\sigma=e\left(N_D\mu_n+\frac{n_i^2}{N_D}\mu_p\right)$

Για το ακρότατο: $\frac{d\sigma}{dN_D}=0\Rightarrow e\left(\mu_n-\frac{n_i^2}{N_D^2}\mu_p\right)=0\Rightarrow N_{D,critical}=n_i\sqrt{\mu_p/\mu_n}$.

Όμοια, για προσμείξεις τύπου – p , με $p \approx N_A$, προκύπτει $N_{A,critical} = n_i \sqrt{\mu_n / \mu_p}$

Και στις δύο περιπτώσεις, η ελάχιστη αγωγιμότητα προκύπτει $\sigma_{p,\min} = 2en_i\sqrt{\mu_n\mu_p} = \sigma_{n,\min}$.

(β) για τον υπολογισμό της αντίστασης, έχουμε:

$R = \rho\dfrac{L}{S}, \qquad L = 1cm, \quad S = 1cm^2, \quad \rho = 1/\sigma$, επομένως: $R = \dfrac{1cm^{-1}}{\sigma}$

(β1) στο καθαρό πυρίτιο έχουμε $n = p = n_i$, και αντικαθιστώντας τις τιμές της ενδογενούς συγκέντρωσης και των ευκινησιών, παίρνουμε: $R = 2.4\times10^5\Omega$.

(β2) $[As] = [Si]\times10^{-9} = 5\times10^{22}cm^{-3}\times10^{-9} \Rightarrow [As] = 5\times10^{17}cm^{-3} = n$ και $p = \dfrac{n_i^2}{n} = 420$

Αντικαθιστώντας στη σχέση $\sigma = e\left(n\mu_n + p\mu_p\right)$, παίρνουμε $R = 9.26\times10^{-3}\Omega$

(β3) $[B] = 5\times10^{17}cm^{-3} = p$ και $n = \dfrac{n_i^2}{p} = 420$

Αντικαθιστώντας στη σχέση $\sigma = e\left(n\mu_n + p\mu_p\right)$, παίρνουμε $R = 28\times10^{-3}\Omega$

8. Υποθέστε ότι οι ενεργές μάζες πυκνότητας καταστάσεων ηλεκτρονίων και οπών του πυριτίου (Si) και του γερμανίου (Ge) είναι της ίδιας τάξης μεγέθους, τα ενεργειακά τους χάσματα είναι 1.17eV και 0.66eV, αντίστοιχα, και η ενδογενής συγκέντρωση φορέων του πυριτίου σε θερμοκρασία δωματίου είναι n_i=1.5x10^{10}cm^{-3}. Εξηγείστε γιατί προσμείξεις Sb, σε συγκέντρωση 10^{12} cm^{-3}, καθιστούν, σε θερμοκρασία 300K, ημιαγωγό τύπου n το πυρίτιο αλλά όχι το γερμάνιο.

<u>Απάντηση</u>

(α) $\qquad m^*_{DoS}(Si) \simeq m^*_{DoS}(Ge), \qquad E_g(Si) = 1.17eV, \quad E_g(Ge) = 0.66eV$

Επίσης:

$$n_i(Si,300K) = \sqrt{N_C(Si)N_V(Si)}e^{-\frac{E_g(Si)}{2kT}} = 1.5\times10^{10}cm^{-3}$$

$$m^*_{DoS}(Si) \simeq m^*_{DoS}(Ge) \Rightarrow N_{C(V)}(Si) = N_{C(V)}(Ge) \Rightarrow \frac{n_i(Ge)}{n_i(Si)} = e^{-\frac{E_g(Ge)-E_g(Si)}{2kT}} \Rightarrow n_i(Ge) = 2.7\times10^{14}cm^{-3}$$

Επομένως:

$$n_i(Si) = 1.5\times10^{10}cm^{-3} << 10^2\ Sb/cm^3 << n_i(Ge) = 2.7\times10^{14}cm^{-3}$$

Άρα, οι προσμείξεις αντιμονίου (Sb) είναι περίπου 100 φορές περισσότερες από τις ενδογενείς προσμείξεις του Si, το οποίο καθιστούν εξωγενή ημιαγωγό τύπου-n, αλλά είναι 100 φορές λιγότερες από τις ενδογενείς προσμείξεις του Ge, ο ο ποίος, επομένως, παραμένει κατά βάση ενδογενείς σε αυτή τη θερμοκρασία.

9. Ο λεγόμενος νόμος δράσης των μαζών, np=n_i^2=$N_VN_C$exp(-Eg/kT), ισχύει ανεξάρτητα από την προέλευση (ενδογενή ή εξωγενή) των ηλεκτρονίων και των οπών, με συγκεντρώσεις n και p, αντίστοιχα. α) Να υπολογίσετε τις ενδογενείς συγκεντρώσεις ηλεκτρονίων και οπών στο ομογενές πυρίτιο, σε θερμοκρασία 600K, οπότε το ενεργειακό του χάσμα έχει μειωθεί στο 1eV. β) Να υπολογίσετε τις συγκεντρώσεις φορέων, για πυρίτιο με ομογενείς προσμείξεις δοτών και αποδεκτών, σχεδόν ολικά ιονισμένων, ($N_D \approx N_D^+$, και $N_A \approx N_A^-$, αντίστοιχα) όπου $N_D - N_A = \Delta n = (5\times10^{16} - 1\times10^{16})$ cm^{-3}. γ) Να υπολογίσετε την τιμή της στάθμης Fermi, σε θερμοκρασία 600K, ως προς το μέγιστο της ζώνης αγωγιμότητας, για τις περιπτώσεις (α) και (β), αντίστοιχα.

Δίδονται, για το πυρίτιο σε θερμοκρασία δωματίου (kT≈26meV):
Ενεργειακό χάσμα= 1.1 eV, Ενεργές πυκνότητες κβαντικών ενεργειακών καταστάσεων: (Ζώνη Σθένους)= 1.×10^{19} cm^{-3}, (Ζώνη Αγωγιμότητας)=2.4×10^{19}cm^{-3},

Απάντηση

(α) $n_i = \sqrt{N_C N_V}\, e^{-\frac{E_g}{2kT}} = 1.5\times10^{10} cm^{-3}$,

και $N_C(300K) = 2.4\times10^{19} cm^{-3}$, $N_V(300K) = 1.0\times10^{19} cm^{-3}$

Αλλά, $\dfrac{N_{C(V)}(600K)}{N_{C(V)}(300k)} = \left(\dfrac{600}{300}\right)^{3/2} = 2^{3/2} = 2.83$

Επομένως, $N_C(600K) = 6.8\times10^{19} cm^{-3}$ και $N_V(600K) = 2.8\times10^{19} cm^{-3}$

Και οι ενδογενείς συγκεντρώσεις υπολογίζονται

$$n_i(600) = p_i(600) = \sqrt{2.8\times6.8}\times10^{19} cm^{-3} e^{-\frac{1000}{2\times(2\times26)}} = 2.9\times10^{15} cm^{-3}$$

(β) $n = N_D - N_A = 4\times10^{16} cm^{-3}$, $p = \dfrac{n_i^2}{n} = 2.5\times10^{3} cm^{-3}$ ν

(γ) $E_C - E_F = kT \ln\left[{N_C}/{n_n}\right]$, $kT = 2\times26 meV$

(γ1) $E_C - E_F = 2\times26 meV \ln\left[{6.8\times10^{19}}/{2.9\times10^{15}}\right] = 523.3\, meV$

(γ2) $E_C - E_F = 2\times26 meV \ln\left[{6.8\times10^{19}}/{4\times10^{16}}\right] = 386.8\, meV$

10. Ημιαγωγός με έμμεσο ενεργειακό χάσμα E_g=1.2 eV έχει ενεργές μάζες πυκνότητας καταστάσεων ηλεκτρονίων $\left(m^*_{e,DoS}\right)$ και οπών $\left(m^*_{h,DoS}\right)$ ίσες μεταξύ τους και ίσες με τη μισή μάζα του ελεύθερου ηλεκτρονίου. (α) Να υπολογίσετε την ενδογενή πυκνότητα φορέων του ημιαγωγού σε θερμοκρασίας T=300K. (β) Αν οι ευκινησίες ηλεκτρονίων και οπών, σε θερμοκρασία T=300K, είναι αντίστοιχα $\mu_e = 1000 cm^2/Vs$ και $\mu_h = 500 cm^2/Vs$, να υπολογίσετε: (β_1) την αγωγιμότητα του υλικού, (β_2) τις οριακές ταχύτητες ολίσθησης ηλεκτρονίων και οπών, όταν ευρίσκονται σε περιοχές όπου έχουν εφαρμοσθεί τυπικές διαφορές δυναμικού $\Delta V = 1 Volt$, μεταξύ τυπικών αποστάσεων $\Delta l = 1\,\mu m$, και να τις συγκρίνετε με τις τυπικές θερμικές ταχύτητες σε θερμοκρασία T=300K. (γ) Από των παραπάνω ημιαγωγό κατασκευάζουμε επαφή $p-n$, με προσμίξεις, στις αντίστοιχες περιοχές, $N_A = 10^{15} cm^{-3}$ και $N_D = 10^{17} cm^{-3}$, που θεωρούνται ολικά ιονισμένες. Να υπολογίσετε: (γ_1) το είδος και την συγκέντρωση φορέων μειονότητας (μειοψηφίας) σε κάθε περιοχή (p,n), (γ_2) το δυναμικό επαφής, και (γ_3) να κάνετε ένα σχεδιάγραμμα των ενεργειακών ζωνών στην περιοχή της επαφής $p-n$.

Μάζα ελεύθερου ηλεκτρονίου: $m_0 = 9.1\times10^{-31}kg$, Φορτίο ηλεκτρονίου: $e = -1.6\times10^{-19}C$

$kT(300K) \approx 26\, meV, \quad 1eV = 1.6\times10^{-19}\, J, \quad \hbar = 6.58\times10^{-16} eVs$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Από τις βασικές σχέσεις της Φυσικής των Ημιαγωγών που μοιράζονται κατά τη διάρκεια του διαγωνίσματος:

Ενεργός πυκνότητα καταστάσεων στη ζώνη αγωγιμότητας: $N_{C,eff} = 2\left(\dfrac{m^*_{n,DoS}kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$

Ενεργός πυκνότητα καταστάσεων στη ζώνη σθένους: $N_{V,eff} = 2\left(\dfrac{m^*_{p,DoS}kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$

Αφού, σύμφωνα με την εκφώνηση του θέματος, $m^*_{n,DoS} = m^*_{p,DoS}$, έχουμε:

$$m^*_{n,DoS} = m^*_{p,DoS} \Rightarrow N_{C,eff} = N_{V,eff} = 2\left(\frac{m^*kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2},$$

όπου $m^* = m_0/2$, άρα:

$$N_{V,eff} = N_{C,eff} = 2\left(\frac{(m_2/2)kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} = 2\left(\frac{4.55\times10^{-31}kg\times26\times10^{-3}eV}{2\pi\times4.33\times10^{-31}(eV)^2s^2}\right) = 8.9\times10^{12}cm^{-3}$$

Η ενδογενής συγκέντρωση φορέων, επομένως, υπολογίζεται (σύμφωνα με την αντίστοιχη σχέση του τυπολογίου):

$$n_i = p_i = 2\left(\frac{kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\left(m_e^*m_h^*\right)^{3/4}\exp\left(-{(E_C-E_V)}\big/{2kT}\right) = \sqrt{N_CN_V}\exp\left(-\frac{E_g}{2kT}\right) \Rightarrow$$

$$n_i = p_i = 8.9\times10^{18}cm^{-3}e^{-\frac{1200meV}{2\times26meV}} = 8.9\times10^{18}cm^{-3}\times9.5\times10^{-11} \Rightarrow \boxed{n_i = p_i = 8.46\times10^{8}cm^{-3}}$$

(β) Αν οι ευκινησίες ηλεκτρονίων και οπών, σε θερμοκρασία T=300K, είναι αντίστοιχα $\mu_e = 1000\, cm^2/Vs$ και $\mu_h = 500\, cm^2/Vs$, υπολογίζουμε:

(β_1) την αγωγιμότητα του υλικού, (από τη σχετική σχέση του τυπολογίου):

Συνολική αγωγιμότητα λόγω ηλεκτρονίων (n) και οπών (h): $\sigma = \sigma_e + \sigma_h = |e|(n\mu_e + p\mu_h)$

$$\sigma = 1.6\times10^{-19}C\times n_i\times(\mu_e+\mu_h) = 1.6\times10^{-19}C\times8.46\times10^{8}cm^{-3}\times1500\frac{cm^2}{Vs} \Rightarrow$$

$$\boxed{\sigma = 2\times10^{-7}cm^{-1}\Omega^{-1} = 2\times10^{-7}Scm^{-1}}$$

(β_2) τις οριακές ταχύτητες ολίσθησης ηλεκτρονίων και οπών, όταν ευρίσκονται σε περιοχές όπου έχουν εφαρμοσθεί τυπικές διαφορές δυναμικού $\Delta V = 1Volt$, μεταξύ τυπικών αποστάσεων $\Delta l = 1\,\mu m$, άρα η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου είναι $E = \Delta V/l = 1V/10^{-4}cm \Rightarrow \boxed{E = 10^4 V/cm}$, οπότε:

$$\mu = \frac{\upsilon_{o\rho}}{E} \Rightarrow \upsilon_{o\rho} = \mu E \quad \Rightarrow \quad \boxed{\upsilon_{o\rho,e} = \mu_e E = 10^7\frac{cm}{s}}, \quad \boxed{\upsilon_{o\rho,h} = \mu_h E = 0.5\times10^7\frac{cm}{s}}$$

Άρα, οι οριακές ταχύτητες είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τις μέσες θερμικές ταχύτητες, που προκύπτουν από την σχέση $\frac{1}{2}m\upsilon^2 \approx kT$, για θερμοκρασία περιβάλλοντος $\left(kT \simeq 26meV\right)$

(γ) Αν κατασκευάσουμε, από των παραπάνω ημιαγωγό, επαφή $p-n$, με προσμίξεις, που θεωρούνται ολικά ιονισμένες, τότε έχουμε στις αντίστοιχες περιοχές, $p_p \approx N_A^- \approx N_A = 10^{15}cm^{-3}$ και $n_n \approx N_D^+ \approx N_D = 10^{17}cm^{-3}$, οπότε:

(γ$_1$) η συγκέντρωση φορέων μειονότητας (μειοψηφίας) σε κάθε περιοχή $\left(p,n\right)$, υπολογίζεται από τον νόμο δράσης των μαζών:

$$n_p = \frac{n_i^2}{p_p} = \frac{\left(8.46\times 10cm^{-3}\right)^2}{10^{15}cm^{-3}} \Rightarrow \boxed{n_p = 716\ cm^{-3}}$$

$$p_n = \frac{n_i^2}{n_n} = \frac{\left(8.46\times 10cm^{-3}\right)^2}{10^{17}cm^{-3}} \Rightarrow \boxed{p_n = 7\ cm^{-3}}$$

(γ$_2$) το δυναμικό επαφής, υπολογίζετε από τη σχέση :

$$V_0 = \frac{kT}{e}\ln\left(\frac{N_A N_D}{n_i^2}\right) = 26mV\ln\left(\frac{10^{32}}{7.15\times 10^{17}}\right) \Rightarrow \boxed{V_0 = 0.847\,V}$$

(γ$_3$) το σχεδιάγραμμα των ενεργειακών ζωνών στην περιοχή της επαφής $p-n$, προκύπτει με βάση την απαίτηση ενιαίου χημικού δυναμικού (δηλ., επιπέδου Fermi), λόγω θερμοδυναμικής ισορροπίας, σε όλη την έκταση της επαφής (p-n)

12. Ημιαγωγικό υλικό έχει ενεργειακό χάσμα E_g=1.5 eV, και ενεργές πυκνότητες καταστάσεων: N_V=5×10^{19} cm^{-3}, N_C=8×10^{18} cm^{-3}, σε θερμοκρασία T_0=300K.

(α) Υπολογίστε την ενδογενή πυκνότητα φορέων του ημιαγωγού, σε θερμοκρασία T_0=300K.

(β) Σε θερμοκρασία T_0=300K, υπολογίστε την απόσταση της ενδογενούς στάθμης Fermi από τη ζώνη σθένους και από τη ζώνη αγωγιμότητας.

(γ) Εμφυτεύουμε στο υλικό προμίξεις τύπου-Δότες με συγκέντρωση N_D=5×10^{12} cm^{-3} και ενδοχασματική κατάσταση Δοτών που βρίσκεται 100meV χαμηλότερα από τη ζώνη αγωγιμότητας. Υποθέτοντας ότι υπάρχει ολικός ιονισμός των προσμίξεων, υπολογίστε την απόσταση της νέας στάθμης Fermi από τη ζώνη αγωγιμότητας, σε T_0=300K, στην περιοχή εμφυτευσης, και την αντίστοιχη συγκέντρωση των φορέων μειονότητας.

(δ) Με βάση την απάντηση του (γ), υπολογίστε το ποσοστό ιονισμού των προσμίξεων σε T_0=300K, και σχολιάστε την παραδοχή του ερωτήματος-γ.

(ε) Σε περίπτωση που η εμφύτευση των δοτών προχωρά μόνο μέχρι ένα ορισμένο βάθος στο ημιγωγικό υλικό, εξηγήστε ποιές διαδικασίες διάχυσης λαμβάνουν χώρα, όταν αποκαθίσταται θερμοδυναμική ισορροπία στο σύστημα, εκτιμήστε την αναπτυσσόμενη διαφορά δυναμικού μεταξύ των περιοχών ενδογενούς και εξωγενούς συμπεριφοράς, και σχεδιάστε ποιοτικό διάγραμμα των ζωνών στην περιοχή αυτού του βάθους, σημειώνοντας τα κρίσιμα μεγέθη.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $n = N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}}$, $p = N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{kT}}$,

$$np = n_i^2 \Rightarrow n_i^2 = N_C N_V e^{-\frac{E_C - E_F + E_F - E_V}{kt}} = N_C N_V e^{-\frac{E_C - E_V}{kt}} \Rightarrow n_i = \sqrt{N_C N_V}\, e^{-\frac{E_g}{2kt}}$$

$$n_i = \sqrt{N_C N_V}\, e^{-\frac{E_g}{2kt}} \Rightarrow n_i = \sqrt{4\times10^{38}} \times cm^{-3} e^{-\frac{1500\,meV}{2\times25\,meV}} \Rightarrow \boxed{n_i = 1.9\times10^{6} cm^{-3}}$$

(β) Ενδογενείς ημιαγωγοί

$$n_i = p_i \Rightarrow N_C e^{-\frac{E_C - E_i}{kt}} = N_V e^{-\frac{Ei - E_V}{kt}} \Rightarrow \left(\frac{N_C}{N_V}\right) = e^{\frac{-E_i + E_V + E_C - E_i}{kt}} = e^{\frac{(E_C - E_F) - 2E_i}{kt}}$$

Επομένως: $kT \ln\left(\frac{N_C}{N_V}\right) = (E_V + E_C) - 2E_i \Rightarrow \boxed{E_i = \frac{(E_V + E_C)}{2} + \frac{kT}{2}\ln\left(\frac{N_V}{N_C}\right)}$

Με E_V=0, $E_i = \frac{1500\,meV}{2} + \frac{25\,meV}{2}\ln(50/8) \Rightarrow \boxed{E_i = 750\,meV + 22.9meV = 772.9meV}$

Επομένως: $E_C - E_i = (1500 - 772.9)meV \Rightarrow \boxed{E_C - E_i = 727.9meV}$

(γ) Επειδή η ενδογενής συγκέντρωση είναι $n_i = 1.9\times10^{6} cm^{-3}$, αν υποθέσουμε ολικό ιονισμό των προσμίξεων, τότε :

$$n_n \approx N_D^+ \approx N_D \quad \Rightarrow \quad N_D = N_C e^{-\frac{E_C - E_{F(n)}}{kT}} \Rightarrow \boxed{E_{F(n)} = E_C - kT\ln\left(N_C / N_D\right)}$$

$$E_{F(n)} = E_C - kT\ln\left(N_C / N_D\right) = \left(1500 - 25\ln(8\times10^{18}/5\times10^{12})\right)meV \Rightarrow \boxed{E_{F(n)} = 1142.9meV}$$

Οι φορείς μειονότητας: $n_n p_n = n_i^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{p_n = n_i^2 / n_n = 0.71cm^{-3}}$

(δ) Με βάση την απάντηση του (γ), το ποσοστό ιονισμού των προσμίξεων σε T_0=300K,

$$\left(N_D^+ / N_D\right) = \frac{1}{1 + 2\exp\left(-\frac{E_D - E_{F(n)}}{kT}\right)} = \frac{1}{1 + 2\exp\left(-\frac{257.1}{25}\right)} \Rightarrow \boxed{\left(N_D^+ / N_D\right) = 99.993\%}$$

Άρα, η προσέγγιση του ολικού ιονισμού ισχύει.

(ε) Σε περίπτωση που η εμφύτευση των δοτών προχωρά μόνο μέχρι ένα ορισμένο βάθος στο ημιγωγικό υλικό, τότε υπάρχουν δύο περιοχές

(i) η ενδογενής περιοχή με : $n_i = p_i = 1.9\times10^{6} cm^{-3}$

(ii) η εξωγενής περιοχή με : $n_n \approx N_D^+ \approx N_D = 5\times10^{12} cm^{-3}$ και

$$p_n = n_i^2 / n_n \simeq 1\,cm^{-3}$$

Σε θερμοδυναμική ισορροπία υπάρχει διάχυση φορέων τύπου-n προς την ενδογενή περιοχή και διάχυση φορέων τύπου-p προς την εξωγενή περιοχή, με αποτέλεσμα την ανάπτυξη μίας περιοχή απογύμνωσης με θετικό φορτίο, στην εξωγενή περιοχή, και μία συσσώρευση αρνητικών φορέων στην ενδογενή περιοχή. Η συσσώρευση αυτών των φορτίων προκαλεί την ανάπτυξη ενός εσωτερικού ηλεκτρικού πεδίου και μία διαφοράς δυναμικού, ίσης με την διαφορά των σταθμών Fermi στις δύο περιοχές, $\boxed{\Delta V = E_{F(n)} - E_i = 1142.9 - 772.9 = 370 meV}$

13. Ημιαγωγός, της ομάδας IV του περιοδικού συστήματος, με έμμεσο ενεργειακό χάσμα E_g=1.1 eV έχει ενιαία ενεργό μάζα πυκνότητας καταστάσεων και για τα δύο είδη φορέων $\left(m^*_{e,DoS}\right) = \left(m^*_{h,DoS}\right) = m^*_{DoS} = 0.88 m_0$.

(α) Να υπολογίσετε την ενδογενή πυκνότητα φορέων του ημιαγωγού σε θερμοκρασία T=300K.

(β) Αν οι ευκινησίες ηλεκτρονίων και οπών, σε θερμοκρασία T=300K, είναι αντίστοιχα $\mu_e = 1200 cm^2/Vs$ και $\mu_h = 300 cm^2/Vs$, να υπολογίσετε: (β$_1$) τις οριακές ταχύτητες ολίσθησης ηλεκτρονίων και οπών, όταν ευρίσκονται σε περιοχές όπου έχουν εφαρμοσθεί τυπικές διαφορές δυναμικού $\Delta V = 5 Volt$, μεταξύ τυπικών αποστάσεων $\Delta l = 1\,\mu m$, και να τις συγκρίνετε με τις τυπικές θερμικές ταχύτητες σε θερμοκρασία T=300K. (β$_2$) την ενδογενή αγωγιμότητα του υλικού,

(γ) Με βάση το παραπάνω υλικό θέλουμε να κατασκευάσουμε εξωγενή ημιαγωγό τύπου-*p*, με την ελάχιστη δυνατή αγωγιμότητα, σε θερμοκρασία δωματίου. (γ$_1$) Δείξτε ότι αυτό είναι εφικτό και υποδείξτε το κατάλληλο είδος προσμίξεων και την κατάλληλη συγκέντρωσή τους. (γ$_2$) Υπολογίστε τις συγκεντρώσεις των φορέων πλειονότητας και μειονότητας, για την κατάσταση ελάχιστης αγωγιμότητας. (γ$_3$) Υπολογίστε την ελάχιστη αγωγιμότητα

(δ) Αν οι προσμίξεις, που υπολογίσατε στο ερώτημα (γ$_1$), εμφυτευτούν μέχρι ένα πεπερασμένο βάθος, σε μία περιοχή του ενδογενούς υλικού, να εξηγήσετε γιατί σχηματίζεται μία επαφή τύπου ~*p-n*. Να αντιστοιχίσετε τα χαρακτηριστικά *p* και *n* στην κατάλληλη περιοχή (ενδο- ή εξω-γενή) και να υπολογίσετε το αντίστοιχο δυναμικό επαφής.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Από τις βασικές σχέσεις της Φυσικής των Ημιαγωγών που μοιράζονται κατά τη διάρκεια του διαγωνίσματος:

Ενεργός πυκνότητα καταστάσεων στη ζώνη αγωγιμότητας: $N_{C,eff} = 2\left(\dfrac{m^*_{n,DoS} kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$

Ενεργός πυκνότητα καταστάσεων στη ζώνη σθένους: $N_{V,eff} = 2\left(\dfrac{m^*_{p,DoS} kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$

Αφού, σύμφωνα με την εκφώνηση του θέματος, $\left(m^*_{e,DoS}\right) = \left(m^*_{h,DoS}\right) = m^*_{DoS} = 0.88 m_0$, έχουμε:

$$m^*_{n,DoS} = m^*_{p,DoS} \Rightarrow N_{C,eff} = N_{V,eff} = 2\left(\frac{m^* kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2},$$

όπου $m^* = 0.88 m_0 = 0.88 \times 9.1 \times 10^{-31} kg \simeq 8 \times 10^{-31} kg$, άρα:

$$N_{V,eff}=N_{C,eff}=2\left(\frac{m^*kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}=2\left(\frac{8\times10^{-31}kg\times26\times10^{-3}eV}{2\pi\times4.33\times10^{-31}(eV)^2s^2}\right)^{3/2}=2\left(7.65\times10^{-3}\frac{kg\,s^{-2}}{(1.6\times10^{-19}J)}\right)^{3/2}$$

$$=2\left(4.78\times10^{-3}\frac{kg\,s^{-2}}{(10^{-19}kg\,m^2s^{-2})}\right)^{3/2}=20.89\times10^{24}m^{-3}\Rightarrow\boxed{N_C=N_V\approx2.1\times10^{19}cm^{-3}}$$

Η ενδογενής συγκέντρωση φορέων, επομένως, υπολογίζεται (σύμφωνα με την αντίστοιχη σχέση του τυπολογίου):

$$n_i=p_i=\sqrt{N_CN_V}\exp\left(-\frac{E_g}{2kT}\right)=N_C\exp\left(-\frac{E_g}{2kT}\right)\Rightarrow$$

$$n_i=p_i=2.1\times10^{19}cm^{-3}e^{-\frac{1100meV}{2\times26meV}}=2.1\times10^{19}cm^{-3}\times6.5\times10^{-10}\Rightarrow\boxed{n_i=p_i=1.37\times10^{10}cm^{-3}}$$

(β1) Από τον ορισμό της ευκινησίας

$$\mu\equiv\frac{\upsilon_{o\rho}}{E}\Rightarrow\upsilon_{o\rho}=E\mu_{(e,h)}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\upsilon_{o\rho,e}=\dfrac{5V}{10^{-4}cm}1200\dfrac{cm^2}{Vs}\\ \upsilon_{o\rho,h}=\dfrac{5V}{10^{-4}cm}300\dfrac{cm^2}{Vs}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\upsilon_{o\rho,e}=6\times10^7\dfrac{cm}{s}\\ \upsilon_{o\rho,h}=1.5\times10^7\dfrac{cm}{s}\end{matrix}\right\}$$

Η τυπική θερμική ταχύτητα :

$$\frac{1}{2}m\upsilon_{th}^2\approx\frac{1}{2}kT\Rightarrow\upsilon_{th}\approx\sqrt{\frac{kT}{m}}=\sqrt{\frac{26meV}{9.1\times10^{-31}kg}}=\sqrt{\frac{26\times10^{-3}1\times1.6\times10^{-19}J}{9.1\times10^{-31}kg}}\Rightarrow\boxed{\upsilon_{th}\approx7.6\times10^6\frac{cm}{s}}$$

Άρα, οι ταχύτητες ολίσθησης είναι συγκρίσιμες με τις θερμικές ταχύτητες,

(β2) Για την ενδογενή αγωγιμότητα του υλικού, $\sigma=e\left(n\mu_n+p\mu_p\right)$

$$\sigma_i=en_i\left(\mu_n+\mu_p\right)=1.6\times10^{-19}C\times1.37\times10^{10}cm^{-3}1500\frac{cm^2}{Vs}\Rightarrow\boxed{\sigma_i\approx3.3\times10^{-6}cm^{-1}Ohm^{-1}}$$

(γ1) Ελάχιστη αγωγιμότητα

Αγωγιμότητα : $\sigma=e\left(n\mu_n+p\mu_p\right)$

Προσμείξεις τύπου – p με $p\approx N_A$ και $n=\dfrac{n_i^2}{N_A}$, οπότε $\sigma=e\left(\dfrac{n_i^2}{N_A}\mu_n+N_A\mu_p\right)$

Για το ακρότατο: $\dfrac{d\sigma}{dN_A}=0\Rightarrow N_{A,critical}=n_i\sqrt{\mu_n/\mu_p}\Rightarrow\boxed{N_{A,critical}=2n_i}$.

(γ2) Υπολογίστε τις συγκεντρώσεις των φορέων πλειονότητας και μειονότητας, για την κατάσταση ελάχιστης αγωγιμότητας.

$$\boxed{p_{p,crit}=N_A=2n_i}\quad\Rightarrow\quad n_{p,crit}=\frac{n_i^2}{p_{p,crit}}=\frac{n_i^2}{2n_i}\Rightarrow\boxed{n_{p,crit}=0.5n_i}$$

(γ3) Η ελάχιστη αγωγιμότητα προκύπτει:

$$\sigma_{p,\min}=2en_i\sqrt{\mu_n\mu_p}=2\times1.6\times10^{-19}\times1.37\times10^{10}cm^{-3}\times\sqrt{36\times10^4}\frac{cm^2}{Vs}\Rightarrow\boxed{\sigma_{\min}=2.63\times10^{-6}cm^{-1}Ohm^{-1}}$$

(δ) το δυναμικό επαφής, υπολογίζετε από τη σχέση :

$$V_0=\frac{kT}{e}\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)=26mV\ln\left(\frac{2n_i}{n_i}\right)\Rightarrow\boxed{V_0=25mV}$$

14. Υποθέστε ότι οι ενεργές πυκνότητες καταστάσεων ηλεκτρονίων και οπών $\left(N_C, N_V\right)$ του πυριτίου (Si) και του γερμανίου (Ge) είναι της ίδιας τάξης μεγέθους, τα ενεργειακά τους χάσματα είναι 1.2eV και 0.6eV, αντίστοιχα, και η ενδογενής συγκέντρωση φορέων του πυριτίου σε θερμοκρασία δωματίου είναι n_i=2x10^{10}cm^{-3}.
(α) Υπολογίστε την ενδογενή συγκέντρωση φορέων του γερμανίου σε θερμοκρασία δωματίου
(β) Νοθεύουμε και τα δύο υλικά με προσμείξεις As, σε συγκέντρωση 10^{12} άτομα As/cm^3, και με ενδοχασματική κατάσταση τέτοια ώστε E_C-E_D=0.03 eV. Εξηγείστε ποιό υλικό (Si ή Ge) συμπεριφέρεται, με καλή προσέγγιση, ως εξωγενής και ποιό ως ενδογενής ημιαγωγός και υπολογίστε τη συγκέντρωση φορέων τύπου n και τύπου p σε κάθε ένα από τα δύο υλικά.
(γ) Υποθέστε ότι έχετε επαφή p-n πυριτίου με συγκεντρώσεις ολικά ιονισμένων προσμείξεων N_A και N_D, αντίστοιχα σε κάθε πλευρά. Αν Vo είναι η τάση επαφής, εκφράστε τη διαφορά $eV_0 - E_g$, συναρτήσει της θερμοκρασίας T, των συγκεντρώσεων N_A και N_D, και των ενεργών πυκνοτήτων $\left(N_C, N_V\right)$.

<u>Απάντηση</u>

(α) $m^*_{DoS}(Si) \simeq m^*_{DoS}(Ge), \qquad E_g(Si) = 1.2eV, \quad E_g(Ge) = 0.6eV$

Επίσης:

$$n_i(Si, 300K) = \sqrt{N_C(Si) N_V(Si)}\, e^{-\frac{E_g(Si)}{2kT}} = 2\times 10^{10} cm^{-3}$$

$$m^*_{DoS(e,h)}(Si) \simeq m^*_{DoS(e,h)}(Ge) \Rightarrow N_{C(V)}(Si) = N_{C(V)}(Ge)$$

$$\Rightarrow \frac{n_i(Ge)}{n_i(Si)} = e^{-\frac{E_g(Ge)-E_g(Si)}{2kT}} = e^{\frac{600meV}{50meV}} \Rightarrow n_i(Ge) = n_i(Si)\times 1.63\times 10^5 = 3.26\times 10^{15} cm^{-3}$$

(β) Επομένως: $n_i(Si) = 2\times 10^{10} cm^{-3} << 10^{12}\ As/cm^3 << n_i(Ge) = 3.26\times 10^{15} cm^{-3}$

Άρα, οι προσμείξεις αρσενικού (As) είναι περίπου 100 φορές περισσότερες από τις ενδογενείς προσμείξεις του Si, το οποίο καθιστούν εξωγενή ημιαγωγό τύπου-n, αλλά είναι 1000 φορές λιγότερες από τις ενδογενείς προσμείξεις του Ge, ο ο ποίος, επομένως, παραμένει κατά βάση ενδογενείς σε αυτή τη θερμοκρασία.

Si: $\boxed{n_n(Si) = 10^{12}\ As/cm^3} \Rightarrow \quad p_n = n_i^2 / n_n = 4\times 10^{20} / 10^{12} \Rightarrow \quad \boxed{p_n = 4\times 10^8}$

Ge: $\boxed{n_i(Ge) = p_i(Ge) = 3.26\times 10^{15} cm^{-3}}$

$$\text{(γ)} \left\{ V_0 = \frac{kT}{e}\ln\left(\frac{N_A N_D}{n_i^2}\right), \quad n_i^2 = N_C N_V e^{-\frac{E_g}{kT}} \right\} \Rightarrow V_0 = \frac{kT}{e}\ln\left(\frac{N_A N_D}{N_C N_V} e^{\frac{E_g}{kT}}\right) \Rightarrow$$

$$V_0 = \frac{kT}{e}\left[\ln\left(\frac{N_A N_D}{N_C N_V}\right) + \frac{E_g}{kT}\right] \Rightarrow \boxed{eV_o - E_g = kT\ln\left(\frac{N_A N_D}{N_C N_V}\right)}$$