Πρόοδος 2014

Άσκηση 3

α)

$$\hat{\mathscr{H}}\,|u_1\rangle = E_1\,|u_1\rangle$$
$$\hat{\mathscr{H}}\,|u_2\rangle = E_2\,|u_2\rangle$$
$$\hat{\mathscr{H}} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \sigma\tau\eta\ \beta\alpha\sigma\eta\ \{|u_{1,2}\rangle\}$$
$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sigma\tau\eta\nu\ \iota\delta\iota\alpha\ \beta\alpha\sigma\eta$$

Μετά τη μέτρηση της φυσικής ποσότητας που αντιστοιχεί στον $\hat{A}$, το σύστημα μπορεί να βρεθεί σε δυο kets, τα

$$|\Psi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|u_1\rangle \pm |u_2\rangle\right]$$

Το $|u_1\rangle$ στη βάση $\{|u_{1,2}\rangle\}$ γράφεται ως $[1;0]$ και το $|u_2\rangle$ ως $[0;1]$. Άρα η δράση του $\hat{A}$ στα kets βάσης της $\hat{\mathscr{H}}$ δίνει

$$\hat{A}\,|u_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |u_2\rangle$$
$$\hat{A}\,|u_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |u_1\rangle$$
$$\begin{aligned}\hat{A}\,|\Psi_\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{A}\,|u_1\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{A}\,|u_2\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|u_2\rangle \pm |u_1\rangle\right] \\ &= \pm\,|\Psi_\pm\rangle\end{aligned}$$

Οι ιδιοτιμές του $\hat{A}$ θα είναι ± 1 και ο $\hat{A}$ μπορεί να γραφτεί διαγώνιος στη βάση $\{|\Psi_\pm\rangle\}$ και θα είναι

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

όπου φυσικά ± 1 οι δυνατές μετρήσιμες τιμές του $\hat{A}$.

β)

Αν το σύστημα είναι στην καθαρή κατάσταση

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{2}\,|\Psi_+\rangle + |\Psi_-\rangle\right]$$

τότε οι μέσες τιμές $\left\langle\hat{\mathcal{H}}\right\rangle$ και $\left\langle\hat{A}\right\rangle$ θα δίνονται από τον γενικό τύπο $\left\langle\hat{X}\right\rangle = \langle\Phi|\,\hat{X}\,|\Phi\rangle$. Άρα

$$
\begin{aligned}
\left\langle\hat{\mathcal{H}}\right\rangle &= \langle\Phi|\,\hat{\mathcal{H}}\,|\Phi\rangle = \frac{1}{3}\left(\left[\sqrt{2}\,\langle\Psi_+| + \langle\Psi_-|\right]\right)\hat{\mathcal{H}}\left(\left[\sqrt{2}\,|\Psi_+\rangle + |\Psi_-\rangle\right]\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\left[\cancel{\sqrt{2}}\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\left[\langle u_1| + \langle u_2|\right] + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\langle u_1| - \langle u_2|\right]\right]\right)\hat{\mathcal{H}}\left(\left[\cancel{\sqrt{2}}\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\left[|u_1\rangle + |u_2\rangle\right] + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|u_1\rangle - |u_2\rangle\right]\right]\right)\\
&= \ldots = \frac{1}{3}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\,\langle u_1| + \frac{2-\sqrt{2}}{2}\,\langle u_2|\right)\hat{\mathcal{H}}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\,|u_1\rangle + \frac{2-\sqrt{2}}{2}\,|u_2\rangle\right)\\
&= \ldots = \frac{3+2\sqrt{2}}{6}E_1 + \frac{3-2\sqrt{2}}{6}E_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle\hat{A}\right\rangle &= \langle\Phi|\,\hat{A}\,|\Phi\rangle = \frac{1}{3}\left(\left[\sqrt{2}\,\langle\Psi_+| + \langle\Psi_-|\right]\right)\hat{A}\left(\left[\sqrt{2}\,|\Psi_+\rangle + |\Psi_-\rangle\right]\right)\\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

$\gamma)$

Το Στατιστικό Μείγμα θα έχει έναν $\hat{\rho}$ στη βάση των $\{|u_{1,2}\rangle\}$

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho} &= p(u_1)\hat{\rho_{u_1}} + p(\Phi)\hat{\rho_\Phi} = \frac{1}{2}\hat{\rho_{u_1}} + \frac{1}{2}\hat{\rho_\Phi}\\
\hat{\rho_{u_1}} &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\
\hat{\rho_\Phi} &= |\Phi\rangle\langle\Phi| = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\,|\Psi_+\rangle + |\Psi_-\rangle\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\,\langle\Psi_+| + \langle\Psi_-|\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\cancel{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\left(|u_1\rangle + |u_2\rangle\right)\right] + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_1\rangle - |u_2\rangle\right)\right)\left(\cancel{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\left(\langle u_1| + \langle u_2|\right)\right] + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle u_1| - \langle u_2|\right)\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\,|u_1\rangle\langle u_1| + \frac{1}{2}\,|u_1\rangle\langle u_2| + \frac{1}{2}\,|u_2\rangle\langle u_1| + \frac{3-2\sqrt{2}}{2}\,|u_2\rangle\langle u_2|\right)\\
&= \begin{pmatrix}\frac{3+2\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{3-2\sqrt{2}}{6}\end{pmatrix}\\
\Rightarrow \hat{\rho} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{3+2\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{3-2\sqrt{2}}{6}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{9+2\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{3-2\sqrt{2}}{6}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{9+2\sqrt{2}}{12} & \frac{1}{12}\\ \frac{1}{12} & \frac{3-2\sqrt{2}}{12}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

όπου φυσικά $Tr\{\hat{\rho}\} = 1$. Επομένως η $\left\langle\hat{\mathcal{H}}\right\rangle$ θα είναι

$$
\begin{aligned}
\left\langle\hat{\mathcal{H}}\right\rangle = Tr\{\hat{\rho}\hat{\mathcal{H}}\} &= Tr\left\{\begin{pmatrix}\frac{9+2\sqrt{2}}{12} & \frac{1}{12}\\ \frac{1}{12} & \frac{3-2\sqrt{2}}{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_1 & 0\\ 0 & E_2\end{pmatrix}\right\}\\
&= \frac{9+2\sqrt{2}}{12}E_1 + \frac{3-2\sqrt{2}}{12}E_2
\end{aligned}
$$

και η $\left\langle \hat{A} \right\rangle$ θα είναι

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle = Tr\{\hat{\rho}\hat{A}\} = Tr\left\{\begin{pmatrix} \frac{9+2\sqrt{2}}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{3-2\sqrt{2}}{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$
$$= \frac{1}{6}$$

Η εντροπία $S(\hat{\rho})$ θα είναι

$$S(\hat{\rho}) = -Tr\{\hat{\rho}Ln\hat{\rho}\}$$

όπου εδω βολεύει να εκφράσουμε τον $\hat{\rho}$ στη βάση των $\{|\Psi_{\pm}\rangle\}$ που θα είναι

$$\hat{\rho} = p(u_1)\hat{\rho_{u_1}} + p(\Phi)\hat{\rho_{\Phi}} = \frac{1}{2}\hat{\rho_{u_1}} + \frac{1}{2}\hat{\rho_{\Phi}}$$
$$|u_1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(|\Psi_+\rangle + |\Psi_-\rangle\right)$$
$$\Rightarrow \hat{\rho_{u_1}} = |u_1\rangle\langle u_1| = \frac{1}{2}\left(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| + |\Psi_+\rangle\langle\Psi_-| + |\Psi_-\rangle\langle\Psi_+| + |\Psi_-\rangle\langle\Psi_-|\right)$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$\hat{\rho_{\Phi}} = |\Phi\rangle\langle\Phi| = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\,|\Psi_+\rangle + |\Psi_-\rangle\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\,\langle\Psi_+| + \langle\Psi_-|\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(2\,|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| + \sqrt{2}\,|\Psi_+\rangle\langle\Psi_-| + \sqrt{2}\,|\Psi_-\rangle\langle\Psi_+| + |\Psi_-\rangle\langle\Psi_-|\right)$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \hat{\rho} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{3+2\sqrt{2}}{6} \\ \frac{3+2\sqrt{2}}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{3+2\sqrt{2}}{12} \\ \frac{3+2\sqrt{2}}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

με $Tr\{\hat{\rho}\} = 1$. Άρα η εντροπία θα είναι

$$S(\hat{\rho}) = -Tr\{\hat{\rho}Ln\hat{\rho}\} = -Tr\left\{\begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{3+2\sqrt{2}}{12} \\ \frac{3+2\sqrt{2}}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} Ln\left\{\begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{3+2\sqrt{2}}{12} \\ \frac{3+2\sqrt{2}}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}\right\}\right\}$$
$$= 1.38$$

Άσκηση 4

α)

Η Χαμιλτονιανή κάθε συστήματος στη βάση $\left\{\left|u_{1.2}^{A(B)}\right\rangle\right\}$ είναι

$$\hat{\mathcal{H}}_A = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$$
$$\hat{\mathcal{H}}_B = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$$

Η νέα κατάσταση στον κοινό χώρο Hilbert $\mathcal{E}_{tot}$ των δυο ανεξάρτητων συστημάτων με χώρους Hilbert $\mathcal{E}_A$ με βάση $\left|\Psi_{\pm}^A\right\rangle$ και $\mathcal{E}_B$ με βάση $\left|\Psi_{\pm}^B\right\rangle$ που έρχονται σε επαφή με δοχείο θερμότητας θα είναι

$$\left|\Psi_{\pm}^A\right\rangle \otimes \left|\Psi_{\pm}^B\right\rangle$$
$$|\Phi\rangle = \left|\Psi_{\pm}^A\right\rangle \otimes \left|\Psi_{\pm}^B\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|u_1^A\right\rangle \pm \left|u_2^A\right\rangle\right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|u_1^B\right\rangle \pm \left|u_2^B\right\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(|u_1u_1\rangle \pm |u_1u_2\rangle \pm |u_2u_1\rangle + |u_2u_2\rangle\right)$$

Η βάση θα είναι δηλαδή η $\left\{\left|u_iu_j\right\rangle; i,j = 1,2\right\}$ και η συνολική Χαμιλτονιανή θα είναι

$$\hat{\mathcal{H}}\,|u_1u_1\rangle = \left(\hat{\mathcal{H}}_A + \hat{\mathcal{H}}_B\right)|u_1u_1\rangle = 2E_1$$
$$\left(\hat{\mathcal{H}}_A + \hat{\mathcal{H}}_B\right)|u_1u_2\rangle = E_1 + E_2$$
$$\left(\hat{\mathcal{H}}_A + \hat{\mathcal{H}}_B\right)|u_2u_1\rangle = E_2 + E_1$$
$$\left(\hat{\mathcal{H}}_A + \hat{\mathcal{H}}_B\right)|u_2u_2\rangle = 2E_2$$
$$\Rightarrow \hat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} 2E_1 & \dots & & \mathbb{0} \\ \vdots & E_1 + E_2 & & \vdots \\ & & E_2 + E_1 & \\ \mathbb{0} & \dots & & 2E_2 \end{pmatrix}$$

Αν ήθελα να τη γράψω στη βάση $\left\{\left|\Psi_{\pm}^A\right\rangle \otimes \left|\Psi_{\pm}^B\right\rangle\right\}$ θα πρέπει πρώτα να βρω τη Hamiltonian του κάθε συστήματος στη βάση $\left\{\left|\Psi_{\pm}^{A(\mathrm{B})}\right\rangle\right\}$. Θα έχω

$$\hat{\mathcal{H}}^{A(B)} = \begin{pmatrix} \dfrac{E_1+E_2}{2} & \dfrac{E_1-E_2}{2} \\ \\ \dfrac{E_1-E_2}{2} & \dfrac{E_1+E_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\mathcal{H}}^{AB} = \hat{\mathcal{H}}_A \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_2 \otimes \hat{\mathcal{H}}_B$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a & b & b & 0 \\ b & 2a & 0 & b \\ b & 0 & 2a & b \\ 0 & b & b & 2a \end{pmatrix}$$

Αντικαθιστώντας τις ενέργειες βλέπουμε ότι όντως το trace της ολικής Hamiltonian στη βάση $\left\{\left|\Psi_{\pm}^{A}\right\rangle \otimes \left|\Psi_{\pm}^{B}\right\rangle\right\}$ είναι ίδιο με αυτό στη βάση $\{|u_i\rangle \otimes |u_j\rangle\}$, πράγμα αναμενόμενο και από τη θεωρία. Έχω $Tr\left\{\hat{\mathcal{H}}\right\} = 4E_1 + 4E_2$. Οι υπόλοιπες ποσότητες κατά τα γνωστά.

Αν τώρα σε κάθε χώρο Hilbert δρα και ένας άλλος ερμιτιανός τελεστής $\hat{G}$ με ιδιοκαταστάσεις $\{|\Psi_{\pm}\rangle\}$ και ιδιοτιμές $g_{\pm}$, τότε αυτός στη βάση αυτή σε κάθε χώρο Hilbert $\mathcal{E}_{\mathcal{A},(\mathcal{B})}$ θα γράφεται

$$\hat{G}_{A,(B)} = \begin{pmatrix} g_+ & 0 \\ 0 & g_- \end{pmatrix}$$

και άρα είτε πραγματοποιώντας απλά μια επέκταση χώρου και αθροίζοντας τους τελεστές των δυο συστημάτων, είτε εφόσον είναι διαγώνιοι στις βάσεις αυτές, παίρνοντας απευθείας τις νέες καταστάσεις στον κοινό χώρο Hilbert, θα έχουμε

$$\hat{G}_{AB} = \begin{pmatrix} 2g_+ & & & \mathcal{O} \\ & g_+ + g_- & & \\ & & g_- + g_+ & \\ \mathcal{O} & & & 2g_- \end{pmatrix}$$

Συνεπώς είμαστε πλέον σε θέση να γράψουμε τον ολικό τελεστή πυκνότητας, ο οποίος θα είναι

$$\hat{\rho}_{AB} = \frac{1}{\mathcal{Z}_{AB}} \begin{pmatrix} e^{-\beta 2a - \lambda_G 2g_+} & e^{-\beta b} & e^{-\beta b} & 0 \\ e^{-\beta b} & e^{-\beta 2a - \lambda_G (g_+ + g_-)} & 0 & e^{-\beta b} \\ e^{-\beta b} & 0 & e^{-\beta 2a - \lambda_G (g_+ + g_-)} & e^{-\beta b} \\ 0 & e^{-\beta b} & e^{-\beta b} & e^{-\beta 2a - \lambda_G 2g_-} \end{pmatrix}$$

με συνάρτηση επιμερισμού

$$\mathcal{Z}_{AB} = e^{-\beta 2a - \lambda_G 2g_+} + 2e^{-\beta 2a - \lambda_G (g_+ + g_-)} + e^{-\beta 2a - \lambda_G 2g_-}$$

Οπότε η μέση τιμή $\left\langle \hat{G}_{AB} \right\rangle$ θα είναι

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{G}_{AB} \right\rangle &= -\frac{\partial Ln \mathcal{Z}_{AB}}{\partial \lambda_G} = -\frac{1}{\mathcal{Z}_{AB}} \frac{\partial \mathcal{Z}_{AB}}{\partial \lambda_G} \\
&= -\frac{-2g_+ e^{-\beta 2a - \lambda_G 2g_+} - 2(g_+ + g_-) e^{-\beta 2a - \lambda_G (g_+ + g_-)} - 2g_- e^{-\beta 2a - \lambda_G 2g_-}}{e^{-\beta 2a - \lambda_G 2g_+} + 2e^{-\beta 2a - \lambda_G (g_+ + g_-)} + e^{-\beta 2a - \lambda_G 2g_-}} \\
&= -\frac{-2g_+ e^{-\lambda_G 2g_+} - 2(g_+ + g_-) e^{-\lambda_G (g_+ + g_-)} - 2g_- e^{-\lambda_G 2g_-}}{e^{-\lambda_G 2g_+} + 2e^{-\lambda_G (g_+ + g_-)} + e^{-\lambda_G 2g_-}}
\end{aligned}$$

και η μέση τιμή της Hamiltonian θα είναι

$$\left\langle \hat{\mathcal{H}}_{AB} \right\rangle = -\frac{1}{\mathcal{Z}_{AB}} \frac{\partial \mathcal{Z}_{AB}}{\partial \beta} = ... = E_1 + E_2$$

ενώ ένας δεύτερος τρόπος υπολογισμού είναι

$$\left\langle \hat{\mathcal{H}}_{AB} \right\rangle = Tr\left\{ \hat{\rho}_{AB} \hat{\mathcal{H}}_{AB} \right\} = E_1 + E_2$$

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{AB} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
\mathcal{S} &= -kTr\{\hat{\rho} Ln \hat{\rho}\} = kLn2 \\
\left\langle \hat{G}_{AB} \right\rangle &= \frac{1}{2}(g_+^A + g_+^B) + \frac{1}{2}(g_-^A + g_-^B) \\
\left\langle \hat{\mathcal{H}}_{AB} \right\rangle &= E_1^A + E_2^A + E_1^B + E_2^B
\end{aligned}$$

Σιδηρομαγνητική μετάβαση - Προσέγγιση Landau

Μετάβαση πρώτης τάξης.

Ελεύθερη ενέργεια

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \mathcal{F}_0(T) + \alpha_0(T - T_c)m^2 + \frac{1}{2}\beta m^4 + \frac{1}{3}\gamma m^6 \\
\alpha &= \alpha_0(\mathrm{T} - \mathrm{T}_c) > 0, \quad \beta < 0, \quad \gamma > 0
\end{aligned}$$

Μετάβαση δεύτερης τάξης.

Ελεύθερη ενέργεια

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \mathcal{F}_0(T) + \alpha_0(T - T_c)m^2 + \frac{1}{2}\beta m^4 \\
\alpha &= \alpha_0(\mathrm{T} - \mathrm{T}_c) > 0, \quad \beta > 0 \\
d\mathcal{F} &= 2m\alpha_0(T - T_c) + 2\beta m^3 = 0 \\
\cancel{m = 0} & \quad or \quad m^2 = \frac{\alpha_0(T_c - T)}{\beta} \\
\mathcal{S} &= -\frac{d\mathcal{F}}{dT} = -\frac{d\mathcal{F}_0(T)}{dT} + \frac{2\alpha_0^2(T - T_c)}{\beta} = \mathcal{S}_0(T) + \frac{2\alpha_0^2(T - T_c)}{\beta} \\
C_v &= T\frac{d\mathcal{S}}{dT} = C_{v_0}(T) + T\frac{2\alpha_0^2}{\beta}
\end{aligned}
$$

Για να βρω επιδεκτικότητα ξαναγράφω την ελεύθερη ενέργεια με προσθήκη όρου μικρού μαγνητικού πεδίου.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \mathcal{F}_0(T) + \alpha_0(T - T_c)m^2 + \frac{1}{2}\beta m^4 - mB \\
d\mathcal{F} &= 2m\alpha_0(T - T_c) + 2\beta m^3 - B = 0
\end{aligned}
$$

Αγνοώ m^3 καθώς m είναι ήδη πολύ μικρό και άρα

$$
\begin{aligned}
2m\alpha_0(T - T_c) - B = 0 \Leftrightarrow m &= \frac{B}{2\alpha_0(T - T_c)} \\
\mathcal{X} = \frac{dm}{dB} &= \frac{1}{2\alpha_0(T - T_c)}
\end{aligned}
$$

Γενικά στη Σ/Μ μετάβαση η παράμετρος τάξης είναι η μαγνήτιση και το σύστημα θεωρείται αναλλοίωτο υπό τη συμμετρία $m \to -m$, συνεπώς δεν θα έχω περιττές δυνάμεις. Για τη τάξη της μετάβασης εξετάζω πρόσημα των συντελεστών της παραμέτρου τάξεως.