Άσκηση 1

Γενικά για φωτόνια:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \iff \lambda = \frac{hc}{E}$$

Έπειτα για σωματίδια, γενικά η ενέργεια ($c = 1$) δίνεται από:

$$E = T + m_0$$

ενώ ειδικά για σχετικιστική κίνηση ισχύει η σχέση:

$$E^2 = p^2 + m_0^2$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} (T + m_0)^2 &= p^2 + m_0^2 \\ \iff T^2 + 2Tm_0 &= p^2 \\ \iff p &= \sqrt{T^2 + 2Tm_0} \end{aligned} \tag{1}$$

Πάντα σε μονάδες $c = 1$, δηλαδή m_0 σε μονάδες ενέργειας, αν $T \ll m_0$, τότε προσεγγιστικά η (1) παίρνει τη μορφή:

$$p = \sqrt{2Tm_0\left(\frac{T}{2m_0} + 1\right)} \approx \sqrt{2Tm_0}$$

αφού $T/2m_0 \ll 1$. Έπεται ότι το μήκος κύματος De Brogile θα δίνεται από:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2Tm_0}}$$

ενώ στο σχετικιστικό όριο θα είναι:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{T^2 + 2Tm_0}}$$

Οι απαντήσεις προκύπτουν με απλή αντικατάσταση υποθέτοντας ότι οι ενέργειες που δίνονται είναι οι κινητικές ενέργειες των σωματιδίων.

Άσκηση 2

Αρχικά έχουμε ότι $E = Mc^2 = \gamma m_0 c^2 = \gamma E_0$, αν φυσικά με E_0 νοείται η ενέργεια ηρεμίας. Έπειτα:

$$E = \gamma m_0 c^2 \iff Ev = \gamma m_0 v c^2 \iff E\beta c = pc^2 \iff \beta = \frac{pc}{E}$$

Για το β σκέλος ισχύει από εξ. Newton ότι:

$$\vec{F}_L = \dot{\vec{p}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Όμως:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}} = (m\dot{\gamma \vec{v}}) = m\left(\gamma\dot{\vec{v}} + \dot{\gamma}\vec{v}\right) &= m\left(\gamma\dot{\vec{v}} - \frac{1}{2}\frac{1}{(1-\beta^2)^{3/2}}(-2\beta\dot{\beta})\vec{v}\right) \\ &= m\left(\gamma\dot{\vec{v}} + \frac{\gamma^3\beta}{c}\dot{v}\vec{v}\right) \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\vec{F}_L = m\left(\gamma\dot{\vec{v}} + \frac{\gamma^3\beta}{c}\dot{v}\vec{v}\right)$$

Αν θεωρήσουμε ότι $\vec{F}_L = F_L\hat{k}$ και άρα $\dot{\vec{p}} = \dot{p}\hat{k}$ και $\dot{\vec{v}} = \dot{v}\hat{k}$, τότε για να είναι παράλληλη η δύναμη στην ταχύτητα, θα πρέπει και $\vec{v} = v\hat{k}$. Επομένως:

$$\dot{\vec{p}} = m\left(\gamma\dot{\vec{v}} + \frac{\gamma^3\beta}{c}\dot{v}\vec{v}\right) = m\gamma\left(\dot{\vec{v}} + \frac{\gamma^2\beta}{c}\dot{v}v\hat{k}\right) = m\gamma\left(\dot{\vec{v}} + \gamma^2\beta^2\dot{\vec{v}}\right) = m\gamma\left(1+\gamma^2\beta^2\right)\dot{\vec{v}}$$

Όμως, ισχύει ότι:

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \iff 1 = \gamma^2 - \gamma^2\beta^2$$

και άρα:

$$\dot{\vec{p}} = m\gamma(\gamma^2)\dot{\vec{v}} = m\gamma^3\dot{\vec{v}}$$

Έστω τώρα ότι $\vec{v} = v\hat{j}$ όπου $\hat{k}\cdot\hat{j} = 0$, δηλαδή η δύναμη είναι κάθετη στην ταχύτητα. Τότε έχουμε ότι:

$$\dot{p}\hat{k} = m\gamma\dot{v}\hat{k} + \frac{m\gamma^3\beta}{c}\dot{v}v\hat{j}$$
$$\iff (\dot{p} - m\gamma\dot{v})\hat{k} = \frac{m\gamma^3\beta}{c}\dot{v}v\hat{j}$$

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά με $\hat{k}$ θα έχουμε ότι:

$$(\dot{\vec{p}} - m\gamma\dot{\vec{v}})\hat{k} = 0 \implies \dot{\vec{p}} = m\gamma\dot{\vec{v}}$$

Άσκηση 3

Επιλέγουμε τη μέγιστη κινητική ενέργεια που αποκτά το πρωτόνιο:

$$T = 1\,GeV$$

Ισχύει γενικά η σχέση (1) πάντα για $c = 1$ μονάδες:

$$p = \sqrt{T^2 + 2Tm_p}$$

οπότε με αντικατάσταση αριθμών παίρνουμε ότι:

$$p = \sqrt{2.877}\,GeV$$

Έχοντας την ορμή μπορούμε να υπολογίσουμε την ακαμψία από:

$$B\rho = \frac{p}{q} = 3.333p[GeV]$$

όπου εννοείται το p να είναι σε μονάδες GeV. Ο υπολογισμός δεν χρειάζεται να γίνει, χρησιμοποιούμε απλά το γεγονός ότι η ακαμψία παραμένει αμετάβλητη και άρα $p = p'$ όπου p' η ορμή του δευτερίου, η οποία δίνεται από:

$$p'^2 = T'^2 + 2T'(m_p + m_n)$$

Επομένως, αφού $p = p'$:

$$T'^2 + 2T'(m_p + m_n) - p^2 = 0$$

η οποία δίνει λύσεις:

$$T'_{+,-} = -(m_p + m_n) \pm \sqrt{(m_p + m_n)^2 + p^2}$$

εκ των οποίων απορρίπτουμε τη λύση αρνητικής ενέργειας αφού δεν έχει φυσικό νόημα. Επομένως, με αντικατάσταση αριθμών έχουμε ότι:

$$T' = 0.65\,GeV$$

Άσκηση 1

Η ακτίνα καμπυλότητας είναι η ακτίνα της κυκλικής σήραγγας, εφόσον οι μαγνήτες είναι σε όλη την περιφέρεια και η περιφέρεια αυτής είναι το τόξο που διαγράφει το σωματίδιο για αζιμουθιακή γωνία $\phi = 2\pi$. Εγκαθιστώντας μαγνήτες στο 43% της περιφέρειας θα έχουμε ότι:

$$0.432\pi\rho = 2\pi\rho' \iff \rho' = 64.5\, m$$

Το νέο μέτρο του μαγνητικού πεδίου για την ορμή της άσκησης θα δίνεται από:

$$B' = \frac{3.33p[GeV/c]}{\rho'} = 0.41\, T$$

Άσκηση 2

Οι x, y συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου εκφράζονται από ευθείες που περνάν από την αρχή των αξόνων $B_x(B_y), y(x)$ με κλίση g:

$$B_x(B_y) = gy(x)$$

Επομένως:

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = gr$$

αφού $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Τελικά, προκύπτει ότι:

$$g = \frac{B}{r} = \frac{0.42}{0.07}\, T/m = 6\, T/m$$

το οποίο είναι σταθερό ως κλίση ευθείας και άρα το ίδιο παντού μέσα στο τετράπολο.

Άσκηση 3

α΄

$$I = \frac{Q}{T} = \frac{\sum_{i=1}^{N} q_i}{\frac{L}{c}} = \frac{cNe}{L}$$

όπου L περιφέρεια και T περίοδος. Έπεται ότι:

$$N = \frac{IL}{ce} = 6.25 \cdot 10^{12}$$

β΄ Το ρεύμα θα είναι και πάλι $1\, A$ λόγω ομοιόμορφης κατανομής.

γ΄ Η διάρκεια του παλμού θα ισούται με την περίοδο:

$$T = L/c = 1\, \mu s$$

δ΄ Κλασσική μέθοδος μανάβη. Ένας παλμός ανά περίοδο αντιστοιχεί σε ρεύμα $1\, A$. Σε τι ρεύμα αντιστοιχούν 10 παλμοί ανά δευτερόλεπτο;

$$I_{avg} = 10T\, A/s = 10\, \mu A$$

Άσκηση 4

Θα έχουμε ότι:

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{E_0^2}{E^2} = 0.99$$

Επιπλέον ισχύει ότι:

$$E = T + E_0 = 10.511\, MeV$$

και άρα:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\beta^2 \phi E}{el} = \cdots\ V/cm$$

Το δυναμικό θα είναι ότι βρείτε επί 2, αφού η απόσταση μεταξύ ηλεκτροδίων είναι $2\,cm$. Μπορούμε να θεωρήσουμε τα ηλεκτρόδια τοποθετημένα στις θέσεις $x = \pm 1$.

Άσκηση 1

Κατά την ταπεινή μου γνώμη, το μισό πλάτος της δέσμης στο συγκλίνον ΤΠ είναι σ_x και όχι $\sigma_x/2$, το οποίο είναι μια ποσότητα χωρίς κάποιο νόημα και χρήση κάπου εδώ (το πλάτος της γκαουσιανής για τη x μεταβλητή με βεβαιότητα σ_x είναι $2\sigma_x$). Γενικά δίνεται από:

$$\sigma_x = \sqrt{\epsilon\beta}$$

αλλα ο Γαζής το δίνει $\sigma_x = \sqrt{\epsilon\beta/\pi}$ δίνοντας ταυτόχρονα την εκπεμψιμότητα με π μέσα. Έπειτα η μέγιστη απόκλιση θα δίνεται από

$$\sigma_{x'} = \sqrt{\epsilon\gamma} = \sqrt{\epsilon\frac{1+\alpha^2}{\beta}}$$

για $\alpha = 0$, όταν δηλαδή ο μεγάλος άξονας της έλλειψης συμπίμπτει με τον άξονα x'. Θα είναι δηλαδή:

$$\sigma_{x'} = \sqrt{\epsilon/\beta}$$

Αν είναι να χρησιμοποιηθούν αυτοί οι τύποι χρειάζεται απλά να αφαιρεθεί το π από την τιμή της εκπεμψιμότητας.

Άσκηση 2

Η κανονικοποιημένη εκπεμψιμότητα για $c = 1$ δίνεται από:

$$\epsilon_N = \beta\gamma\epsilon = \frac{p}{E}\frac{E}{E_0}\epsilon = \frac{p}{m_p}\epsilon$$

όπου β, γ είναι πλέον τα σχετικιστικά μεγέθη και όχι οι παράμετροι twiss. Η κανονικοποιημένη εκπεμψιμότητα παραμένει σταθερή στην επιτάχυνση των σωματιδίων και άρα για τη νέα ορμή και τη νέα εκπεμψιμότητα θα ισχύει:

$$\epsilon_N = \frac{p'}{m_p}\epsilon' = \frac{p}{m_p}\epsilon \implies \epsilon' = \frac{p}{p'}\epsilon$$

'Επειτα, κατά τα γνωστά, αντικατάσταση αριθμών στη σχέση:

$$\sigma'_x = \sqrt{\epsilon'\beta}$$

Άσκηση 3

Ισχύει ότι $T \ll E_0$ και άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μη σχετικιστικές σχέσεις. Επομένως:

$$T = \frac{mv^2}{2} \implies v = \sqrt{\frac{2T}{m}}$$

και η απόσταση θα δίνεται από:

$$s = \frac{at^2}{2} = \frac{vt}{2} \iff t = \frac{2s}{v}$$

αφού $v = at$ εφόσον θεωρούμε $v_0 = 0$.

Άσκηση 4

Η λύση είναι για $c = 1$, όπου προφανώς το αποτέλεσμα είναι το ίδιο, είτε πάρετε $c = 1$, είτε όχι. Η τετραορμή του εισερχόμενου σωματιδίου είναι $q^\mu = (E, \vec{p})$, ενώ αυτή του εξερχομένου θα είναι $q'^\mu = (E', \vec{p}')$. Η τετραορμή του εκπεμπόμενου φωτονίου θα είναι $q^\mu_\gamma = (\hbar\omega, \hbar\vec{k})$. Από Α.Δ.Ο θα έχουμε:

$$q^\mu = q^\mu_\gamma + q'^\mu \iff q'^\mu = q^\mu - q^\mu_\gamma = (q - q_\gamma)^\mu$$

και άρα τετραγωνίζοντας την τελευταία ισότητα:

$$\begin{aligned} q'^{\mu}q'_{\mu} = (q-q_{\gamma})^{\mu}(q-q_{\gamma})_{\mu} &= q^{\mu}q_{\mu} - q^{\mu}q_{\gamma\,\mu} - q^{\mu}_{\gamma}q_{\mu} + q^{\mu}_{\gamma}q_{\gamma\,\mu} \\ &= q^{\mu}q_{\mu} - 2q^{\mu}q_{\gamma\,\mu} + q^{\mu}_{\gamma}q_{\gamma\,\mu} \end{aligned}$$

εφόσον ισχύει ότι

$$q^{\mu}q_{\gamma\,\mu} = g_{\mu\nu}q^{\mu}{q_{\gamma}}^{\nu} = g_{\nu\mu}q^{\mu}{q_{\gamma}}^{\nu} = q_{\nu}{q_{\gamma}}^{\nu} = {q_{\gamma}}^{\nu}q_{\nu} = {q_{\gamma}}^{\mu}q_{\mu}$$

Επιπλέον ξέρουμε από $E^2 = p^2 + m_0^2$ ότι:

$$q^{\mu}q_{\mu} = E^2 - p^2 = m_0^2 = E'^2 - p'^2 = q'^{\mu}q'_{\mu}$$

και άρα:

$$2q^{\mu}q_{\gamma\,\mu} = q^{\mu}_{\gamma}q_{\gamma\,\mu}$$

δηλαδή:

$$\begin{aligned} E\hbar\omega - p\hbar k\cos(\theta) &= \frac{\hbar^2\omega^2}{2} - \frac{\hbar^2 k^2}{2} \\ \iff \cos(\theta) &= \frac{E\omega}{pk} - \frac{\hbar\omega^2}{2pk} + \frac{\hbar k}{2p} \end{aligned}$$

όμως ισχύει ότι:

$$v = \frac{1}{n} = \lambda f = \frac{2\pi f}{k} = \frac{\omega}{k}$$

και επίσης ότι $E = \gamma m_0$ και $p = \gamma m_0 v = \gamma m_0 \beta$ (θυμίζω είναι $c = 1$ πάντα). Επομένως:

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{\gamma m_0}{\gamma m_0 \beta n} - \frac{\hbar\omega}{2pn} + \frac{\hbar k}{2p} \\ &= \frac{1}{\beta n} - \frac{\hbar k}{2pn^2} + \frac{\hbar k}{2p} \\ &= \frac{1}{\beta n} + \frac{\hbar k}{2p}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Άσκηση 1:

Εκπεμψιμότητα δέσμης $\varepsilon = 2\pi$ mm·mrad με $\beta = 108$ m

Σε ένα τετράπολο ισχύει η σχέση $\varepsilon = \frac{\pi\sigma^2}{\beta} \Leftrightarrow \sigma = \sqrt{\frac{\varepsilon\beta}{\pi}} \Leftrightarrow$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\pi\,(mm\cdot mrad)\cdot 108\,m}{\pi}} = \sqrt{216\cdot 10^{-3}\, m^2\cdot mrad} = 4,64\, 10^{-1}\, m\cdot (mrad)^{1/2}$$

Άρα, $\frac{\sigma}{2} = 2,52\cdot 10^{-1}\, m\cdot (mrad)^{1/2}$

Στη περίπτωση που $\alpha = 0$, η δέσμη θα έχει μέγιστη απόκλιση

$$\sigma' = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta\pi}} = \sqrt{\frac{2\pi\cdot mm\cdot mrad}{108\,m\cdot\pi}} = \sqrt{\frac{2\cancel{\pi}\,\cancel{mm}\cdot mrad}{108\cdot 10^{3}\,\cancel{mm}\cdot\cancel{\pi}}} = 0,004\sqrt{mrad}$$

Άσκηση 2:

Με τα δεδομένα της προηγούμενης άσκησης, αλλά ορμή πρωτονίου $p = 10\, GeV/c$, η κανονικοποιημένη εκπεμψιμότητα δέσμης θα δίνεται από τη σχέση $\varepsilon_n = \varepsilon\beta\gamma$, $\beta = \frac{v}{c}$ και $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\beta\gamma = \frac{v}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{p\cdot c}{E}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2c^2}{E^2}}} = \frac{pc}{E}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{E^2-p^2c^2}{E^2}}} = \frac{pc}{\cancel{E}}\frac{\cancel{\sqrt{E^2}}}{\sqrt{E^2-p^2c^2}} =$$

$$= \frac{pc}{\sqrt{m_p^2c^4}} = \frac{pc}{m_p\cdot c^2} = \frac{10\frac{GeV}{c}\cdot c}{0,938\frac{GeV}{c^2}\cdot c^2} = 10,66$$

Άρα, $\varepsilon_n = 2\pi\cdot 10,66\cdot mm\cdot mrad = 21,32\pi\cdot mm\cdot mrad$

Με τη νέα ορμή, η κανονικοποιημένη εκπεμψιμότητα μεταβάλλεται.

$$\varepsilon_n' = \varepsilon_n\cdot\frac{p}{p'} = 21,32\pi\,(mm\cdot mrad)\cdot\frac{10\,(GeV/c)}{400\,(GeV/c)} = 0,533\pi\cdot mm\cdot mrad.$$

Οπότε, $\frac{\sigma'}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon'\beta}{\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_n'\cdot\beta\gamma\cdot 109\,m}{\pi}}$

Όπως, $\beta\gamma = \frac{400}{0{,}938} = 426{,}44$ (από προηγούμενη σχέση) (2

Άρα, $\frac{\sigma}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{21{,}32\cancel{\pi}\ (mm\cdot mrad)\cdot 426{,}44\cdot 109\,m}{\cancel{\pi}}} =$

$= \frac{1}{2}\, 31{,}48\ m\cdot(mrad)^{1/2} = 15{,}74\ m(mrad)^{1/2}$

Άσκηση 3

Εμβέλεια e^- $x^* = 200\,\mu m$, ενέργειας $E_0 = 100\,keV$.

Υποθέτουμε ότι το e^- μέχρι να σταματήσει εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Η αρχική ταχύτητα του e^- θα είναι: $E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{m_e}} = \sqrt{\frac{200\,keV}{511\,\frac{keV}{c^2}}} = \sqrt{0{,}39c^2} = 0{,}63c = 1{,}89\cdot 10^8\ m/s$$

• Τη χρονική στιγμή που ψάχνουμε, t^*, θα έχει διανύσει $x^* = 200\,\mu m$ και θα έχει μηδενική ταχύτητα, οπότε:

$$v = v_0 - at \overset{t=t^*}{\Rightarrow} 0 = v_0 - at^* \Rightarrow a = \frac{v_0}{t^*} \quad (1)$$

$$x = -\frac{1}{2}at^2 + v_0 t \overset{t=t^*}{\Rightarrow} x^* = -\frac{1}{2}at^{*2} + v_0 t^* \overset{(1)}{\Rightarrow} x^* = -\frac{1}{2}v_0 t^* + v_0 t^*$$

$$200\cdot 10^{-6} = \left(-\frac{1}{2}1{,}89\cdot 10^8 + 1{,}89\cdot 10^8\right)t^* \Leftrightarrow$$

$$t^* = \frac{200\cdot 10^{-6}}{0{,}945\cdot 10^8} \Rightarrow t^* = 2\cdot 10^{-12}\ sec$$

Άσκηση 4 : γωνία Cherenkov.

Έστω σωματίδιο $\vec{p}_0, m_0$, με p_γ η ορμή του φωτονίου που εκπέμπεται από αυτό κατά γωνία θ. Έχουμε:

- $\vec{p}_0 = \vec{p} + \vec{p}_\gamma \iff \vec{p}_0 - \vec{p}_\gamma = \vec{p} \iff p^2 = p_0^2 + p_\gamma^2 - 2p_0 p_\gamma \cos\theta$ (1)

  ↳ τελική ορμή σωματιδίου

- $E_0 = E + E_\gamma \iff (p_0^2c^2 + m^2c^4)^{1/2} = (p^2c^2 + m^2c^4)^{1/2} + hf \iff$

$$\iff (p_0^2c^2 + m^2c^4)^{1/2} - hf = (p^2c^2 + m^2c^4)^{1/2} \iff$$

$$p_0^2c^2 + \cancel{m^2c^4} + h^2f^2 - 2hf(p_0^2c^2 + m^2c^4)^{1/2} = p^2c^2 \cancel{+ m^2c^4} \overset{(1)}{\iff}$$

$$\cancel{p_0^2c^2} + h^2f^2 - 2hf(p_0^2c^2 + m^2c^4)^{1/2} = \cancel{p_0^2c^2} + p_\gamma^2c^2 - 2p_\gamma p_0 \cos\theta\, c^2$$

$$-2hf(p_0^2c^2 + m^2c^4)^{1/2} + h^2f^2 = \frac{h^2}{\lambda^2}c^2 - 2p_\gamma p_0 \cos\theta\, c^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} p_\gamma &= \frac{h}{\lambda} \\ f &= \frac{c}{n\lambda} \end{aligned}}$$

$$2p_\gamma p_0 \cos\theta\, c^2 = 2hf(p_0^2c^2 + m^2c^4)^{1/2} - h^2f^2 + \frac{h^2}{\lambda^2}c^2 \iff$$

$$2\frac{hc}{\lambda}p_0 \cos\theta\, c = hf\left(2(p_0^2c^2 + m^2c^4)^{1/2} - hf\right) + \frac{h^2f^2n^2}{\cancel{c^2}}\cdot\cancel{c^2}$$

$$2\frac{h\cancel{c}fn}{\cancel{c}}p_0 \cos\theta\, c = hf\left(2(p_0^2c^2 + m^2c^4)^{1/2} - hf + hfn^2\right) \iff$$

$$\cos\theta = \frac{\cancel{hf}\left(2(p_0^2c^2 + m^2c^4)^{1/2} - hf + hfn^2\right)}{2\cancel{hf}\cdot n p_0 \cdot c} \iff$$

$$\cos\theta = \frac{2(p_0^2c^2 + m^2c^4)^{1/2} + hf(n^2 - 1)}{2np_0 \cdot c}$$