

Θέμα 1. Έστω η στοχαστική οικονομία με σύνολο καταστάσεων $S = \{1, 2, \dots, S\}$, σύνολο χρονικών περιόδων $T = \{0, 1, 2, \dots, T\}$ και διαμέριση πληροφορίας $\delta = \{\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_T\}$. Υποθέτουμε ότι ένα μέγεθος της οικονομίας (π.χ. χρηματοοικονομικό συμβόλαιο) αναπαρίσταται από τη συνάρτηση $x : T \times S \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω $\Delta_{t_0} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{k_0}\}$ η πληροφορία τη χρονική στιγμή t_0 .

- 1) Ποια είναι η φυσική σημασία της ιδιότητας: $x(t_0, i) = x(t_0, j)$ για κάθε $i, j \in \sigma_r$ και για κάθε $r = 1, 2, \dots, k_0$ την οποία υποθέτουμε ότι ικανοποιεί το x ;
- 2) Ποια είναι η εκλέπτυνση (filtration) που αντιστοιχεί στη δ ;
- 3) Αν $p = (p_1, p_2, \dots, p_S)$ είναι το διάνυσμα πιθανότητας των διαφόρων καταστάσεων, τότε η x είναι στοχαστική ανέλιξη και τότε ορίζει martingale;
- 4) Ποιά είναι η άλγεβρα F_{t_0} που παράγεται από τη Δ_{t_0} και ποιά είναι το σύνολο των μετρήσιμων συναρτήσεων ως προς την F_{t_0} ;

Θέμα 2. Έστω η στοχαστική οικονομία με σύνολο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, σύνολο χρονικών περιόδων $T = \{0, 1, 2, 3\}$ και διαμέριση πληροφορίας $\Delta_0 = \{S\}$, $\Delta_1 = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}\}$, $\Delta_2 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}\}$, $\Delta_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}\}$. Έστω το χρηματοοικονομικό συμβόλαιο $V = (0, 3, 3, 2, 3, 4, 4, 0, 3, 4, 1, 4, 6, 5, 1)$, ως προς τους κόμβους του δένδρου πληροφόρησης και έστω W δικαίωμα αγοράς που εγγράφεται στο V τη χρονική στιγμή $t = 0$ με ημερομηνία λήξης $t = 3$ και τιμή εξάσκησης $k = 2$. Αν $p = (\frac{1}{15}, \frac{4}{15}, \frac{1}{15}, \frac{3}{15}, \frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}, \frac{2}{15})$ είναι το διάνυσμα πιθανότητας των διαφόρων καταστάσεων τη χρονική στιγμή $t = 3$, να τιμολογηθεί το W όταν είναι (i) Ευρωπαϊκού τύπου, (ii) Αμερικάνικου τύπου.

Θέμα 3. Έστω μετοχή εξελίσσεται σύμφωνα με το διωνυμικό μοντέλο σε διάστημα μιας χρονικής περιόδου με αρχική τιμή $S_0 = 10$, συντελεστή ανόδου $u = 1.1$, συντελεστή καθόδου $d = 0.9$. Έστω δικαίωμα αγοράς W Ευρωπαϊκού τύπου που εγγράφεται στη μετοχή τη χρονική στιγμή 0 με τιμή εξάσκησης $k = 10$ και ημερομηνία λήξης $T = 1$. Προσδιορίσετε χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης του W , εκ μέρους του εκδότη του δικαιώματος και εξηγήστε τον τρόπο με τον οποίο το χαρτοφυλάκιο προφυλάσσει τον πράκτορα από τον κίνδυνο. Υποθέτουμε ότι το σταθερό επιτόκιο μεταξύ δυο χρονικών περιόδων είναι $r = 0$.

Θέμα 4. Έστω στοχαστική οικονομία με σύνολο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, σύνολο χρονικών περιόδων $T = \{0, 1, 2, 3\}$ και διαμέριση πληροφορίας $\Delta_0 = \{S\}$, $\Delta_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$, $\Delta_2 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$, $\Delta_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$, διάνυσμα πιθανότητας $p = (\frac{1}{12}, \frac{4}{12}, \frac{1}{12}, \frac{3}{12}, \frac{1}{12}, \frac{2}{12})$ και έστω το τα χρηματοοικονομικό συμβόλαιο $V = (0, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 0, 3, 2, 1, 6)$ (ως προς τους κόμβους του δένδρου πληροφόρησης). Να γραφεί και στη συνέχεια να τιμολογηθεί το forward-start δικαίωμα αγοράς ευρωπαϊκού τύπου που εγγράφεται στο χρηματοοικονομικό συμβόλαιο V τη χρονική στιγμή 0, με ημερομηνία λήξης τη χρονική στιγμή 3, τιμή εξάσκησης $k = 1$, ως προς τη χρονική περίοδο 1.

Θέμα 5. Περιγράψτε τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (futures) και δώστε παράδειγμα ενός τέτοιου συμβολαίου 6 χρονικών περιόδων, 5.000 μετοχών με τιμή την ημέρα υπογραφής του συμβολαίου 20 ευρώ ανα μετοχή, όπου ο επενδυτής υιοθετεί τη short position.

Καλή Επιτυχία.