ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙΙ
ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ
23/9/2016

√ **ΘΕΜΑ 1.** ~~(i)~~ (1,2 μ.) Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_A \cos(y^2)\,dx\,dy$, όπου

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \ \ x \le y \le 1\}.$$

~~(ii)~~ (1,3 μ.) Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_A (y^2+3x)\,dx\,dy$, όπου $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x^2+y^2 \le 4, \ \ x \le 0, \ y \le 0\}$.

ΘΕΜΑ 2. (i) (1,3 μ.) Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_A \exp\left(\frac{x+y}{x-y}\right) dx\,dy$, όπου A το τραπέζιο με κορυφές τα σημεία $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-1)$, $(0,-2)$. γραμμικός μετασχημ.

~~(ii)~~ (1,2 μ.) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που βρίσκεται μέσα στη σφαίρα $x^2+y^2+z^2=2$ και μέσα στο παραβολοειδές $z=x^2+y^2$.

√ **ΘΕΜΑ 3.** ~~(i)~~ (1,2 μ). Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $\vec{F}(x,y,z) = (x+y, x-z, z-y)$ για κάθε $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \vec{F}$ πάνω σε οποιαδήποτε λεία καμπύλη C του $\mathbb{R}^3$ με αρχή στο $(1,0,-1)$ και πέρας στο $(0,-2,3)$. $\gamma[(b)] - \gamma[f(a)]$

ανεξάρτητο ... ολοκλ. από το δρόμο ...

~~(ii)~~ (1,3 μ). Θεωρούμε το στερεό $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \le 1, \ \text{και } z \ge 0\}$. Αν S είναι το σύνορο του Ω και $\vec{\Phi}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ το διανυσματικό πεδίο με $\vec{\Phi}(x,y,z) = (zx^3, x, y)$, για κάθε $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S \vec{\Phi} \cdot \vec{n}\, d\sigma$, όπου $\vec{n}$ είναι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα της S. μέσω θεωρήματος!

√ **ΘΕΜΑ 4.** ~~(i)~~ (1 μ). Έστω $\vec{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,5-2z)$ για κάθε $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Βρείτε ένα C^2 διανυσματικό πεδίο $\vec{G}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $\nabla \times \vec{G} = \vec{F}$. $\nabla \cdot F = 0 \Rightarrow \exists\ G$

~~(ii)~~ (1,5 μ). Αν S είναι το τμήμα της επιφάνειας $z = \sqrt{x^2+y^2}$ για το οποίο $z \le 4$, υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma$ όπου $\vec{F}$ το πεδίο του υποερωτήματος (i) και $\vec{n}$ το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα της S.

ανοικτή επιφ. κωνική $\boxed{\text{Stokes}}$