ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εξετάσεις στη Μιγαδική Ανάλυση
ΟΜΑΔΑ: Α

cauchy-Riemann

24 Ιουνίου, 2016

παραγωγίσιμη
• C-R κι ισχύει
• αναλυτική στο $\mathbb{C}$
• συνεχείς μερ. παραγ.

Θ1. Να βρεθούν όλα τα σημεία του $\mathbb{C}$ στα οποία η $f(z) = \cos \overline{z}$ είναι παραγωγίσιμη και να υπολογιστεί η παράγωγος. Σε ποια σημεία του $\mathbb{C}$ είναι η f αναλυτική; (1 μον.)

συνεχείς μερικές παραγ.

Θ2. (α΄) Διατυπώστε την *αρχή ελαχίστου* για ένα φραγμένο τόπο $G \subset \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ και συνεχής στον κύκλο $|z| = 1$ που είναι το σύνορο του $D(0,1)$. Αν $f(0) = i$ και $|f(z)| > 1$, για κάθε $|z| = 1$, δείξτε ότι η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $D(0,1)$. (1,3 μον.)

(β΄) Έστω $\alpha \in D(0,1)$. Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $\varphi_\alpha : D(0,1) \to D(0,1)$ με

$$\varphi_\alpha(z) := \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$$

είναι αναλυτική, $1-1$ και απεικονίζει το μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ στον εαυτό του. Δηλαδή η συνάρτηση φ_α είναι $1-1$ και επί. Η

$$\varphi_{-\alpha}(z) = \frac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z}$$

είναι η αντίστροφη συνάρτηση της φ_α.
Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ με $f(\alpha) = 0$ και $|f(z)| \leq 1$, για κάθε $|z| < 1$. Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Schwarz για τη συνάρτηση $g(z) := f(\varphi_{-\alpha}(z))$ στην ειδική περίπτωση του μοναδιαίου δίσκου $D(0,1)$, δείξτε ότι

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{1}{1-|\alpha|^2}.$$

(1,2 μον.)

Θ3. Έστω f αναλυτική στον τόπο $G \subseteq \mathbb{C}$. Αν η f έχει ρίζα στο G που δεν είναι μεμονωμένο σημείο του Z_f(Z_f είναι το σύνολο των ριζών της f στο G), από το θεώρημα ταυτοτισμού είναι γνωστό ότι η f είναι ταυτοτικά μηδέν στο G.

Υποθέτουμε ότι ο τόπος G περιέχει τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D(0,1)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

(α΄) Αν $f(1/(n+1)) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι $f \equiv 0$ στο G. (1 μον.)

(β΄) Έστω g αναλυτική συνάρτηση στον τόπο G και έστω $k \in \mathbb{N}$. Αν

$$\oint_{|z|=1} \frac{g(z)}{((n+1)z-1)^{k+2}}\,dz = 0, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

δείξτε ότι η g είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ k στο G. (1 μον.)

Θ4. ~~(α΄)~~ Να βρεθεί η σειρά(ανάπτυγμα) Laurent της

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z^2+1)}$$

με κέντρο το $z_0 = -i$ στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $1+i$. (1 μον.)

(β') Έστω $\dfrac{z(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $g(z) = \frac{z(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)}$ στο δακτύλιο

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\} \text{ με κέντρο το } z_0 = 0\,.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent καθώς επίσης και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n, για κάθε $n \leq -1$. (1,5 μον.)

Θ5. Έστω τα πολυώνυμα $P(z) = 1$ και $Q(z) = z^4 + 4$.

(α') (i) Δείξτε ότι για R_0 αρκετά μεγάλο, $R_0 > \sqrt{2}$, υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{M}{|z|^4}\,, \quad \text{για κάθε } |z| \geq R_0\,.$$

(ii) Αν γ_R είναι το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με εξίσωση $\gamma(t) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, δείξτε ότι

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 0\,.$$

(1 μον.)

(β') Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση, δείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+4}\,dx = \frac{\pi}{8}\,.$$

(1 μον.)

Σημείωση : Αν το $z_0 \in \mathbb{C}$ είναι πόλος τάξης $k \in \mathbb{N}$ της συνάρτησης f, το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0 δίνεται από τον τύπο

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \left[(z-z_0)^k f(z)\right]^{(k-1)}\,.$$

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες