ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Επαναληπτική Εξέταση στη Μιγαδική Ανάλυση
ΟΜΑΔΑ: Β

30 Σεπτεμβρίου, 2016

√ **Θ1.** Να βρεθεί η τιμή του $a \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση $u(x,y) = -3x^2y + ay^3 + 2x$ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$. Στη συνέχεια να βρεθεί η συζυγής αρμονική v της u καθώς επίσης και η ακέραια συνάρτηση $f = u + iv$, με $f(0) = i$. Να εκφράσετε την f σαν συνάρτηση του $z = x + iy$. (1,5 μον.)

Θ2. Έστω $f : G \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση στον απλά συνεκτικό τόπο $G \subseteq \mathbb{C}$ με $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in G$ και έστω $z_0 \in G$.

Μιγαδικός λογάριθμος

(α′) Παίρνουμε μια τιμή του $\log f(z_0)$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $g : G \to \mathbb{C}$ με

$$g(z) := \int_{z_0}^{z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta + \log f(z_0)\,.$$

Δείξτε ότι η g είναι αναλυτική στο G με $e^{g(z)} = f(z)$ για κάθε $z \in G$ και

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}\,, \quad \text{για κάθε } z \in G\,.$$

(1 μον.)

(β′) Αν $[z_0, z_1]$ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα στο G και $w = \exp z$ είναι η εκθετική συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\exp\left(\int_{[z_0,z_1]} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta\right) = \frac{f(z_1)}{f(z_0)}\,.$$

(0,5 μον.)

Θ3. (α′) Διατυπώστε την *αρχή μεγίστου* και την *αρχή ελαχίστου* για ένα ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$, δηλαδή για ένα φραγμένο τόπο. (0,5 μον.)

(β′) Υποθέτουμε ότι οι μιγαδικές συναρτήσεις f, g είναι αναλυτικές στον ανοικτό δίσκο $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, $R > 0$, συνεχείς στο κλειστό δίσκο $\overline{D}(0,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ και ότι $f(z) \neq 0$, $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \overline{D}(0,R)$. Αν $|f(z)| = |g(z)|$ για κάθε $|z| = R$, δείξτε ότι υπάρχει μια σταθερά $c \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $|c| = 1$ και $f(z) = cg(z)$ για κάθε $z \in \overline{D}(0,R)$. (1 μον.)

Αρχή ταυτοσμού για 2 συναρτήσεις
$\lim_{x\to 0}(f-g)(x) = 0$
$|f|-|g| = 0 \to |f| = |g|$

Θ4. (α′) Να βρεθεί η σειρά(ανάπτυγμα) Laurent της

$$f(z) = \frac{7z-2}{z(z+1)(z-2)} = \frac{1}{z} - \frac{3}{z+1} + \frac{2}{z-2}$$

με κέντρο το $z_0 = -1$ στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $i + 2$. (1 μον.)

(β′) Έστω $\dfrac{1}{z^2(e^z - e^{-z})} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $g(z) = \frac{1}{z^2(e^z - e^{-z})}$ στο δακτύλιο

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \pi < |z| < 2\pi\} \ \text{ με κέντρο το } z_0 = 0\,.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent καθώς επίσης και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n, για κάθε $n \leq -2$. (2 μον.)

Θ5. (α′) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $z^4 - z^2 + 1 = 0$. Ποιές ρίζες βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο; (0,5 μον.)

$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \cdot \frac{|z|}{\frac{1}{2}|z|^4}$

Από γνωστή πρόταση ~~α-σ-γ...~~ ανάλυση

$\frac{1}{2}|z|^4 \leq |Q(z)| \leq \frac{3}{2}|z|^4$

(β) Εστω τα πολυώνυμα $P(z) = z^2$ και $Q(z) = z^4 - z^2 + 1$.

(i) Δείξτε ότι για R_0 αρκετά μεγάλο, $R_0 > 1$, υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{M}{|z|^2}, \quad \text{για κάθε } |z| \geq R_0 .$$

(ii) Αν γ_R είναι το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με εξίσωση $\gamma(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, δείξτε ότι

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = 0 .$$

(1 μον.)

(γ) Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση, δείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}\, dx = \frac{\pi}{2} .$$

(1 μον.)

Σημείωση : Αν το $z_0 \in \mathbb{C}$ είναι πόλος τάξης $k \in \mathbb{N}$ της συνάρτησης f, το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0 δίνεται από τον τύπο

$$\mathrm{Res}\,(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \left[(z - z_0)^k f(z)\right]^{(k-1)} .$$

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες