ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Στοχαστικές Διαδικασίες (ΣΕΜΦΕ & ΣΗΜΜΥ) - Πέμπτη 29 Ιουνίου 2017

ΑΣΚΗΣΗ 1 (40) Δίνεται μια αλυσίδα $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ στον χώρο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ για την οποία

$$p(1,1) = p(2,1) = p(4,2) = p(4,3) = p(5,4) = p(6,7) = \frac{1}{2}, \qquad p(1,2) = p(3,4) = p(5,6) = p(7,7) = p(8,8) = \frac{1}{3},$$

$$p(2,3) = p(2,4) = p(6,4) = p(6,5) = \frac{1}{4}, \qquad p(1,3) = p(5,7) = \frac{1}{6}, \qquad p(3,2) = p(7,8) = p(8,7) = \frac{2}{3}.$$

Όλες οι υπόλοιπες πιθανότητες μετάβασης $p(x,y)$ είναι ίσες με μηδέν.

α) Ταξινομήστε τις καταστάσεις σε κλάσεις επικοινωνίας και χαρακτηρίστε τις ως προς την επαναληπτικότητα.

β) Βρείτε μια αναλλοίωτη κατανομή π της αλυσίδας για την οποία $\pi(1) > 0$.

γ) Υπολογίστε το όριο $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_n = 1 \,|\, X_1 = 1]$.

δ) Αν $X_0 = 6$, υπολογίστε την πιθανότητα η αλυσίδα να καταλήξει σε καθεμιά από τις κλειστές της κλάσεις.

ε) Αν $X_0 = 6$ και κερδίζουμε 1 ευρώ κάθε φορά που η αλυσίδα βρίσκεται σε κατάσταση με δείκτη που είναι πρώτος αριθμός, υπολογίστε το μέσο κέρδος μας ανά κίνηση σε βάθος χρόνου. Θα πρέπει να προσδιορίσετε ποιες τιμές μπορεί να πάρει και με ποια πιθανότητα (το 1 δεν είναι πρώτος).

ΑΣΚΗΣΗ 2 (20) Οι γεννήσεις σε μια πόλη συμβαίνουν όπως οι αφίξεις μιας διαδικασίας Poisson με ρυθμό 0,5/ημέρα. Για το φύλλο των παιδιών υποθέτουμε φυσικά ότι είναι τυχαίο και ανεξάρτητο από τη διαδικασία γεννήσεων.

α) Ποια είναι η πιθανότητα την επόμενη εβδομάδα να γεννηθούν τουλάχιστον 2 παιδιά;

β) Ποια είναι η πιθανότητα την επόμενη εβδομάδα να γεννηθούν τουλάχιστον 2 κορίτσια;

γ) Με δεδομένο ότι τον περασμένο Φεβρουάριο γεννήθηκαν 14 παιδιά, ποια κατανομή ακολουθεί το πλήθος των παιδιών που γεννήθηκαν Δευτέρα;

δ) Μετρώντας από αυτή τη στιγμή, ποια κατανομή ακολουθεί το πλήθος των κοριτσιών που θα έχουν γεννηθεί μέχρι να γεννηθεί το τέταρτο αγόρι;

ΑΣΚΗΣΗ 3 (45) Ένας φίλος σας ισχυρίζεται ότι πολλές στατιστικές ιδιότητες των δεκαδικών ψηφίων του π προκύπτουν κάνοντας την υπόθεση ότι κάθε ψηφίο επιλέγεται ομοιόμορφα από τα $\{0, 1, \ldots, 9\}$ και ανεξάρτητα από τα άλλα. Ο φίλος σας διάβασε ότι η πρώτη εμφάνιση 9 διαδοχικών ίδιων ψηφίων στο δεκαδικό ανάπτυγμα του π συμβαίνει ξεκινώντας από το 24.658.601 ψηφίο (οπότε εμφανίζονται 9 διαδοχικά 7άρια) και σάς ζητά να τον βοηθήσετε να ελέγξει κατά πόσον αυτή η παρατήρηση είναι συμβατή με τον ισχυρισμό του.

Θεωρήστε μια ακολουθία $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ από ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με ομοιόμορφη κατανομή στο σύνολο $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Θα συμβολίζουμε με X_n του τρέχον μήκος του σερί από ίδια αποτελέσματα. Συγκεκριμένα

ίδια απ.

$$X_0 = 0 \qquad \text{και} \qquad X_n = \max\{k \le n : \xi_{n-k+1} = \xi_n\}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Για παράδειγμα, αν $(\xi_1, \ldots, \xi_7) = (3, 5, 5, 5, 9, 6, 6)$, τότε $(X_0, X_1, \ldots, X_7) = (0, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 2)$. Η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον χώρο καταστάσεων $\mathbb{N}_0$.

α) Περιγράψτε τις πιθανότητες μετάβασης της $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

β) Δείξτε ότι η αναλλοίωτη κατανομή της είναι η $\pi : \mathbb{N}_0 \to [0,1]$ με $\pi(0) = 0$ και $\pi(n) = 9 \times 10^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.

γ) Για ένα σερί που ξεκινά τώρα δείξτε ότι η πιθανότητα να φτάσει σε μήκος 9 πριν σπάσει είναι 10^{-8} ενώ το αναμενόμενο μήκος του σερί είναι 10/9.

δ) Αν N είναι ο αριθμός των ψηφίων που πρέπει να δούμε μέχρι να σχηματιστεί για πρώτη φορά ένα σερί από 9 ίδια ψηφία, δείξτε ότι $\mathbb{E}[N] = \frac{10^9 - 1}{9}$.

ε) Από την απάντηση στα ερωτήματα (γ,δ) φαίνεται ότι κάθε προσπάθεια για τον σχηματισμό ενός σερί από ίδια αποτελέσματα είναι μια δοκιμή Bernoulli με πολύ μικρή πιθανότητα επιτυχίας και χρειάζεται να κάνουμε πολλές τέτοιες προσπάθειες μέχρι να σημειώσουμε την πρώτη επιτυχία. Αυτό σημαίνει ότι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $E = N/\mathbb{E}[N]$ είναι περίπου εκθετική $\mathcal{E}(1)$ (θεωρήστε το δεδομένο). Με βάση αυτή την παρατήρηση πώς θα κρίνατε τον ισχυρισμό του φίλου σας;

Διάρκεια Εξέτασης 2,5 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!