



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

«ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ»

A

2 Φεβρουαρίου 2015

ΘΕΜΑ 1^ο (A) Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : 2x - y + 1 = 0, 3x - z + 2 = 0 \text{ και } \varepsilon_2 : x - 1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι συνεπίπεδες και να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου P που τις περιέχει. **Μονάδες 1**

(β) Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου Q που περνάει από το σημείο $M(2,3,6)$ και είναι παράλληλο προς το επίπεδο P . **Μονάδες 0,5**

(B) Να αναγνωρίσετε τις επιφάνειες που ορίζονται από τις εξισώσεις:

$$(α) x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z - 11 = 0, \quad (β) \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$$

και να περιγράψετε τα βασικά χαρακτηριστικά τους.

Μονάδες 1

ΘΕΜΑ 2^ο (α) Να διερευνήσετε και να λύσετε το γραμμικό σύστημα $(\Sigma) : \begin{cases} \kappa x + \lambda y + z = 1 \\ x + \kappa \lambda y + z = \lambda \\ x + \lambda y + \kappa z = 1 \end{cases}$

για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας. **Μονάδες 1,5**

(β) Επιλέξτε ένα ζεύγος (κ, λ) ώστε το (Σ) να έχει απειρία λύσεων και για αυτές τις τιμές των κ, λ δώστε μία γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ που να έχει ως πυρήνα $\text{Ker } f$ το σύνολο λύσεων του αντιστοίχου ομογενούς γραμμικού συστήματος (Σ_0) , χωρίς να λύσετε το (Σ_0) .

Μονάδες 1

ΘΕΜΑ 3^ο Δίνονται οι υποχώροι του \mathbb{R}^3 :

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\} \text{ και } V_2 = [(1, -1, 1), (1, -5, -1), (1, 1, 2)].$$

(α) Βρείτε μία βάση και τη διάσταση για τον καθένα από τους V_1 και V_2 .

(β) Βρείτε μία βάση και τη διάσταση του υποχώρου $V_1 \cap V_2$.

(γ) Βρείτε τη διάσταση του υποχώρου $V_1 + V_2$.

Μονάδες 2,5

ΘΕΜΑ 4^ο Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$f(x, y, z) = (x - y + z, -x + 2y + z, y + 2z).$$

(α) Βρείτε τον πίνακα της f ως προς την κανονική βάση του \mathbb{R}^3 .

Μονάδες 0,5

(β) Βρείτε τον πίνακα της f ως προς τη βάση $\{\varepsilon_1 = (1, 1, -1), \varepsilon_2 = (1, 1, 0), \varepsilon_3 = (1, 0, 0)\}$.

Μονάδες 1

(γ) Βρείτε την εικόνα $\text{Im } f$ της f , μία βάση της και δώστε την γεωμετρική της ερμηνεία.

Μονάδες 1

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!