



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Τομέας Μαθηματικών

Εξέταση στις ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, ΟΜΑΔΑ Β
ΣΕΜΦΕ, Φεβρουάριος 2015

ZHTHMA PΡΩΤΟ:

- α) Να διατυπωθεί και αποδειχθεί το Θεώρημα που συνδέει τη γραμμική ανεξαρτησία τριών συναρτήσεων $f_1(\omega), f_2(\omega), f_3(\omega), \omega \in I$, I ανοιχτό διάστημα, με την ορίζουσα Wronski. (μον. 1)
- β) Να δοθεί η μορφή της γενικής λύσης της εξίσωσης $y''' - y'' + y' - y = t^2 + \cos t$ (μον. 0.75)

- ZHTHMA ΔΕΥΤΕΡΟ:** α) Δίνεται η διαφορική εξίσωση Legendre $(1-t^2)y'' - 2ty' + \alpha(\alpha+1)y = 0$. Αν $P_n(t), P_m(t)$ είναι οι πολυωνυμικές λύσεις της εξίσωσης για $a = n, m \in \mathbb{N}$ αντιστοίχως να διατυπωθεί και αποδειχθεί η σχέση ορθογωνιότητας που συνδέει τα πολυώνυμα Legendre. (μον. 0.5)
- β) Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών $x^2y'' - 2y = 0, y(2) = 1, y'(2) = a$. Να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς α ώστε η λύση του προβλήματος να είναι φραγμένη του $x \rightarrow +\infty$. (μον. 0.5)
- γ) Να χαρακτηριστούν τα ιδιάζοντα σημεία και για τα κανονικά να καθοριστεί η δείκτρια εξίσωση, οι εκθέτες ιδιομορφίας και το διάστημα σύγκλισης της λύσης σε δυναμοσειρά της εξίσωσης $(x+2)^4(x+1)y'' + 3(x^2+1)y' + 3y = 0$ (μον. 0.75)

- δ) Να λυθεί με χρήση ολοκληρωτικού μετασχηματισμού η εξίσωση

$$y'' + y = \begin{cases} \text{cost}, 0 \leq t < \pi \\ 1, \pi \leq t < \infty \end{cases} \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

(μον. 1.5)

ZHTHMA ΤΡΙΤΟ:

- α) Να βρεθεί το γενικό ολοκλήρωμα της διαφορικής εξίσωσης $\left(y^2 + x^2 \sqrt{x^2 + 1}\right)dx + 2xy \ln x dy = 0$. (μον. 1)
- β) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών και να προσδιορισθεί το διάστημα ορισμού της λύσης
- $$y' - \frac{y}{x} = xy^2, \quad y(-1) = -1 \quad (\text{μον. 1})$$
- γ) Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών $y' = \ln(t^2 - y^2), y(t_o) = y_o$. Να προσδιορισθούν οι περιοχές του επιπέδου $t y$ στις οποίες ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (μον. 0.5)

ZHTHMA ΤΕΤΑΡΤΟ:

Με την μέθοδο των ιδιοτυπών και ιδιοδιανυσμάτων να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\underline{x}' = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}, \quad \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad \text{Να προσδιορισθεί το είδος και η ευστάθεια του κρίσιμου σημείου του συστήματος και να σχεδιασθεί κατά προσέγγιση το επίπεδο φάσεων.}$$

(μον. 2.5)

Δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

$$L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad L(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad L(e^{at}f(t)) = F(s-a), \quad L(u_a(t)f(t-a)) = e^{-sa}F(s),$$

αν $F(s) = L(f(t))$ και $u_a(t) = H(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t \geq a. \end{cases}$

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Καλή επιτυχία