# ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

## 0. Εισαγωγική συζήτηση

Έστω $\Omega$ ο δειγματοχώρος ενός πειράματος τύχης δηλαδή ένα σύνολο που περιέχει σύμβολα αντίστοιχα των αποτελεσμάτων του πειράματος που είναι δυνατόν να παρατηρηθούν. Ας εξετάσουμε π.χ. το πείραμα τύχης που είναι η απόπειρα να τεθεί σε λειτουργία ένα σύστημα. Αν ε είναι η επιτυχής απόπειρα και α η μη-επιτυχής τότε ο δ.χ. είναι $\Omega = \{\omega_1 = \varepsilon, \omega_2 = \alpha\varepsilon, \omega_3 = \alpha\alpha\varepsilon, \ldots\}$ όπου τα στοιχεία $\omega_i$ έχουν την προφανή ερμηνεία. Αν για κάθε στοιχείο $\omega_i$ είναι δοσμένη η πιθανότητα $q_i = P(\{\omega_i\}) \geq 0$ και ορίσουμε για κάθε $A \subset \Omega$

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) \tag{0.1}$$

τότε έχουμε την πιθανότητα P ορισμένη σε κάθε υποσύνολο του $\Omega$ (αρκεί βέβαια να έχει εξασφαλιστεί ότι $\sum_{i=1}^{\infty} q_i = 1$).

Να σημειωθεί ότι ο δ.χ. $\Omega$ του παραδείγματος αυτού είναι αριθμήσιμο σύνολο και είναι φανερό ότι για δειγματοχώρους που είναι υπεραριθμήσιμα σύνολα η παραπάνω διαδικασία καθίσταται προβληματική. Τα πράγματα όμως είναι «ακόμα χειρότερα». Ας εξετάσουμε το πείραμα τύχης που συνίσταται στην τυχαία επιλογή ενός αριθμού από το διάστημα $(0,1]$. Προφανώς ο δ.χ. του πειράματος αυτού μπορεί να είναι $\Omega = (0,1]$ και είναι εύλογο να αναζητηθεί μια πιθανότητα P τέτοια ώστε $P((a,b])$ να είναι ανάλογη του μήκους $b-a$ και αφού $P((0,1]) = 1$ θα είναι $P((a,b]) = b-a$. Γενικότερα είναι εύλογο να παραμένει αναλλοίωτη στη μεταφορά δηλαδή $P(A \oplus x) = P(A)$ για κάθε $A \subset \Omega$ όπου για $x, y \in (0,1]$ ορίζεται $x \oplus y = x + y$ αν $x + y \in (0,1]$ ή $x \oplus y = x + y - 1$ αν $x + y \notin (0,1]$ ώστε να είναι πάντοτε $A \oplus x \subset (0,1]$. Μια τέτοια πιθανότητα P ορισμένη σε όλα τα υποσύνολα $A \subset \Omega = (0,1]$ θα είχε λοιπόν τις ακόλουθες ιδιότητες:

i) $P(A) \geq 0$

ii) $P(\Omega) = 1$

iii) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ με $A_n \cap A_m = \varnothing$ όταν $n \neq m$

iv) $P(A \oplus x) = P(A)$ για κάθε $x \in (0,1]$ και $A \subset \Omega$

v) $P((a,b]) = b - a$.

Ως συνέπεια των ιδιοτήτων αυτών θα είχε επίσης την ιδιότητα:

vi) $P(\{\omega\}) = 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$.

Ισχύει όμως το επόμενο θεώρημα.

***Θεώρημα.*** Δεν υπάρχει συνολοσυνάρτηση $A \to P(A)$ ορισμένη σε όλα τα υποσύνολα του $\Omega = (0,1]$ με τις ιδιότητες i-v.

Η απόδειξη του θεωρήματος μπορεί να βρεθεί στο [1] σελ. 37 ή στο [7] σελ. 135*. Μάλιστα με την υπόθεση του συνεχούς αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει συνολοσυνάρτηση $\mathrm{A} \to \mathrm{P}(\mathrm{A})$ με τις ιδιότητες i, ii, iii, vi ορισμένη σε όλα τα υποσύνολα του Ω ([5], σελ. 415 θεώρημα Banach-Kuratowski).

Εν συμπεράσματι από την παραπάνω συζήτηση προκύπτει ότι δεν είναι πάντοτε μαθηματικώς εφικτό να αναζητείται πιθανότητα ορισμένη σε όλα τα υποσύνολα του δειγματοχώρου όταν αυτός είναι «πολύ μεγάλος». Αν όμως δεν επιμείνουμε να είναι η πιθανότητα ορισμένη σε όλα τα υποσύνολα του Ω; Πράγματι στο τελευταίο παράδειγμα είναι δυνατόν να διατηρήσει η πιθανότητα P τις ιδιότητες i-v αν περιοριστεί σε μια ορισμένη οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{F}$ του Ω που **δεν** είναι η $\mathcal{P}(\Omega)$, είναι όμως αρκετά «πλούσια» και ικανοποιητική για οποιαδήποτε εφαρμογή. Η επόμενη παράγραφος αποσκοπεί στην περιγραφή και διακρίβωση της δομής κλάσεων υποσυνόλων κατάλληλων για τα πιθανοθεωρητικά μοντέλα.

## 1. Κλάσεις υποσυνόλων ενός συνόλου

***Ορισμός.*** Έστω Ω ένα σύνολο διάφορο του κενού. Μια κλάση $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του Ω ονομάζεται **σ-άλγεβρα** (υποσυνόλων του Ω) όταν ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:

i) $\Omega \in \mathcal{F}$

ii) αν $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$ τότε $\mathrm{A}^c \in \mathcal{F}$

iii) αν $\{\mathrm{A}_n : n = 1,2,\ldots\} \subset \mathcal{F}$ τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n \in \mathcal{F}$.

***Παράδειγμα 1.1.*** Έστω $\Omega \neq \varnothing$. Τότε η κλάση $\mathcal{P}(\Omega)$ όλων των υποσυνόλων του Ω είναι σ-άλγεβρα (η «ευρύτερη» με την έννοια του εγκλεισμού). Επίσης η κλάση υποσυνόλων $\{\varnothing, \Omega\}$ είναι σ-άλγεβρα (η «ελάχιστη» με την έννοια του εγκλεισμού).

***Παράδειγμα 1.2.*** Έστω $\mathrm{A} \subset \Omega$ με $\mathrm{A} \neq \varnothing, \Omega$. Τότε η κλάση $\{\varnothing, \Omega, \mathrm{A}, \mathrm{A}^c\}$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω.

***Παρατήρηση 1.1.*** Αν $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\Omega \neq \varnothing$ τότε εύκολα διαπιστώνονται τα ακόλουθα:

i) $\varnothing \in \mathcal{F}$

ii) αν $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{F}$ τότε $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$, $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} \in \mathcal{F}$

iii) αν $\{\mathrm{A}_n, n = 1,2,\ldots\} \subset \mathcal{F}$ τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n \in \mathcal{F}$.

Γενικά μπορεί να διατυπωθεί το ακόλουθο: Αριθμήσιμες (το πολύ) το πλήθος συνολοθεωρητικές πράξεις με σύνολα που ανήκουν στην $\mathcal{F}$ οδηγούν σε σύνολα που ανήκουν στην $\mathcal{F}$.

* Να σημειωθεί ότι για την απόδειξη του θεωρήματος αυτού χρησιμοποιείται το Αξίωμα επιλογής, πράγμα που εγείρει ενδιαφέροντα ζητήματα Μαθηματικής Λογικής.

***Πρόταση 1.1.*** Αν $\mathcal{F}_i$, $i \in I$ είναι οικογένεια σ-αλγεβρών υποσυνόλων του Ω τότε η κλάση $\mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω.

**Απόδειξη**

$\Omega \in \mathcal{F}$ αφού $\Omega \in \mathcal{F}_i$ για κάθε $i \in I$. Αν τώρα $A \in \mathcal{F}$ τότε $A \in \mathcal{F}_i$ για κάθε $i \in I$ και αφού $\mathcal{F}_i$, $i \in I$ είναι σ-άλγεβρες θα είναι $A^c \in \mathcal{F}_i$ για κάθε $i \in I$ άρα και $A^c \in \mathcal{F}$. Τέλος έστω $\{A_n, n = 1,2,\ldots\} \subset \mathcal{F}$ τότε $\{A_n, n = 1,2,\ldots\} \subset \mathcal{F}_i$ για κάθε $i \in I$ άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_i$ για κάθε $i \in I$ κα άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$. ⑤

Έστω τώρα $\mathcal{C}$ μια μη κενή κλάση υποσυνόλων του Ω. Η τομή όλων των σ-αλγεβρών που περιέχουν την κλάση $\mathcal{C}$ (και υπάρχουν τέτοιες π.χ. η $\mathcal{P}(\Omega)$) είναι σ-άλγεβρα κατά την παραπάνω Πρόταση και προφανώς είναι η ελάχιστη (με την έννοια του εγκλεισμού) που περιέχει την κλάση $\mathcal{C}$.

***Ορισμός.*** Έστω $\mathcal{C}$ μη κενή κλάση υποσυνόλων του Ω και $\mathcal{F}$ η τομή όλων των σ-αλγεβρών που περιέχουν την $\mathcal{C}$. Η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ ονομάζεται **παραγόμενη από την** $\mathcal{C}$ και συμβολικά γράφουμε $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$.

***Παράδειγμα 1.3.*** Έστω $\Omega \neq \varnothing$ και $A \subset \Omega$ με $A \neq \varnothing, \Omega$. Θέτουμε $\mathcal{C} = \{A\}$. Τότε $\sigma(\mathcal{C}) = \{\varnothing, \Omega, A, A^c\}$.

***Παράδειγμα 1.4.*** Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ αριθμήσιμο και $\mathcal{C} = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots\}$. Τότε $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(\Omega)$.

***Παράδειγμα 1.5.*** Έστω κλάσεις $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ υποσυνόλων του $\Omega$. Τότε $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$.

***Παράδειγμα 1.6.*** Έστω $\mathcal{F}$ σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω. Τότε $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

***Άσκηση 1.1.*** Έστω ότι $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$ και $\mathcal{C} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{F}$. Τότε δείξτε ότι $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{E})$.

***Παράδειγμα 1.7.*** Έστω $\Omega = \mathbb{R}^n$ και γράφουμε

$$\mathcal{P}^n = \{(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_n, b_n] : a_i < b_i\} \cup \{\varnothing\}.$$

Η σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω η παραγόμενη από την κλάση $\mathcal{P}^n$ ονομάζεται **σ-άλγεβρα Borel** του $\mathbb{R}^n$ και συμβολικά γράφεται $\mathcal{B}^n$. Είναι δηλαδή

$$\mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{P}^n).$$

Συχνά για $n = 1$ γράφουμε $\mathcal{B}^1 = \mathcal{B}$.

Η σ-άλγεβρα Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ είναι πολύ σημαντική για τη συνέχεια και θα επιμείνουμε για λίγο σε κάποια γνωρίσματά της, ιδιαίτερα για $n = 1$.

i) Για τυχόν $\omega \in \mathbb{R}$ έχουμε $\{\omega\} = \bigcap_{\kappa=1}^{\infty} \left(\omega - \frac{1}{\kappa}, \omega\right]$ άρα $\{\omega\} \in \mathcal{B}^1$.

ii) Κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ανήκει στην $\mathcal{B}^1$. Άρα το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}^1$.

iii) Αν $a < b$ τότε $(a,b) = (a,b] \setminus \{b\}$ άρα $(a,b) \in \mathcal{B}^1$. Όμοια $[a,b] \in \mathcal{B}^1$.

Γενικά ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα η απόδειξη του οποίου θα παρατεθεί ενδεικτικά για $n = 1$.

***Πρόταση 1.2.*** Έστω $\mathcal{E}^n$ το σύνολο των ανοικτών του $\mathbb{R}^n$. Τότε $\mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{E}^n)$.

**Απόδειξη** (για $n = 1$)

Έστω $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{E}^1)$. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{F} = \mathcal{B}^1$.

Έστω U ανοικτό του $\mathbb{R}$. Τότε για τυχόν $x \in U$ υπάρχει διάστημα $(a_x, b_x)$ με $x \in (a_x, b_x) \subset U$ και $a_x, b_x$ ρητούς. Προφανώς $U = \bigcup_{x \in U} (a_x, b_x)$. Επειδή το πλήθος όλων των διαστημάτων με ρητά άκρα είναι αριθμήσιμο συμπεραίνουμε ότι η ένωση $\bigcup_{x \in U} (a_x, b_x) = U$ γράφεται σαν αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων δηλ. $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ και αφού $(a_n, b_n) \in \mathcal{B}^1$ συμπεραίνουμε ότι $U \in \mathcal{B}^1$ δηλαδή $\mathcal{E}^1 \subset \mathcal{B}^1$ άρα $\sigma(\mathcal{E}^1) \subset \sigma(\mathcal{B}^1)$ και τελικά $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}^1$.

Έστω τώρα $(a,b] \in \mathcal{P}^1$. Τότε $(a,b] = \bigcap_{\kappa=1}^{\infty} \left(a, b + \frac{1}{\kappa}\right)$ και επειδή $\left(a, b + \frac{1}{\kappa}\right)$ ανοικτά θα είναι $\left(a, b + \frac{1}{\kappa}\right) \in \mathcal{F}$ άρα $(a,b] \in \mathcal{F}$ δηλαδή $\mathcal{P}^1 \subset \mathcal{F}$ και συνεπώς $\mathcal{B}^1 = \sigma(\mathcal{P}^1) \subset \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

Ώστε $\mathcal{F} = \mathcal{B}^1$. ⑤

***Πόρισμα.*** Κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ ανήκει στην $\mathcal{B}^n$.

***Σημείωση.*** Είναι δυνατόν η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}^n$ να «κτιστεί εκ των έσω» ξεκινώντας από το σύνολο των ανοικτών $\mathcal{E}^n$ του $\mathbb{R}^n$ και με διαδοχικές διευρύνσεις να φθάσουμε στην $\mathcal{B}^n$. Όμως η διαδικασία είναι υπερπεπερασμένη. Με τον τρόπο αυτόν προκύπτει ότι $\mathrm{card}\mathcal{B}^n = c \equiv \mathrm{card}\mathbb{R}$ (βλ. [7] σελ. 133-134).

***Άσκηση 1.2.*** Δείξτε ότι τα παρακάτω υποσύνολα ανήκουν στην $\mathcal{B}^2$.

α) $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$

β) $B = \{(x,y) : x > y\}$

γ) $\Gamma = \{(x,y) : x^2 = y\}$.

***Άσκηση 1.3.*** Έστω $\mathcal{F}$ σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\Omega$ παραγόμενη από την κλάση $\mathcal{C}$ δηλαδή $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$. Έστω ακόμα $\Omega_0 \subset \Omega$. Θέτουμε $\mathcal{F}_0 = \{A \cap \Omega_0 : A \in \mathcal{F}\}$ και $\mathcal{C}_0 = \{A \cap \Omega_0 : A \in \mathcal{C}\}$. Δείξτε ότι:

α) $\mathcal{F}_0$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\Omega_0$

β) $\mathcal{F}_0 = \sigma(\mathcal{C}_0)$

γ) Αν $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ τότε $\mathcal{F}_0 = \{A \subset \Omega_0 : A \in \mathcal{F}\}$.

## 2. Πιθανοθεωρητικά μαθηματικά μοντέλα – Η έννοια της πιθανότητας

Το μαθηματικό μοντέλο για ένα πείραμα τύχης οφείλει βέβαια να είναι ένα πιθανοθεωρητικό μοντέλο. Τα γενικά χαρακτηριστικά ενός τέτοιου μοντέλου φαίνονται στον παρακάτω ορισμό που προτάθηκε από τον Kolmogorov στα 1933 (βλ. [9]) και απεδείχθη αρκετά παραγωγικός ώστε να είναι ο πλέον αποδεκτός μέχρι σήμερα. Θέτει ένα πλαίσιο αξιωματικής ανάπτυξης της θεωρίας Πιθανοτήτων και από την άποψη των μαθηματικών είναι μετροθεωρητικός στην ουσία του.

***Ορισμός.*** **Χώρος πιθανότητας** ονομάζεται μία τριάδα $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ όπου $\Omega \neq \varnothing$, $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\Omega$ και $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ είναι ένα **μέτρο πιθανότητας** δηλ. ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:

i) $P(A) \geq 0$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$

ii) $P(\Omega) = 1$

iii) Αν $\{A_n, n = 1, 2, \ldots\} \subset \mathcal{F}$ με $A_n \cap A_m = \varnothing$ $\forall\, n \neq m$ τότε $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Το σύνολο $\Omega$ ονομάζεται **δειγματοχώρος** και τα υποσύνολα του $\Omega$ που ανήκουν στην $\mathcal{F}$ ονομάζονται **ενδεχόμενα**. Οι απαιτήσεις i-iii αναφέρονται και ως αξιώματα της πιθανότητας.

***Παράδειγμα 2.1.*** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κατά τμήματα συνεχής* με τις ιδιότητες: i) $f \geq 0$ και ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$. Θέτουμε $P(A) = \int_A f(x)\,dx,\ A \in \mathcal{B}^1$ όπου το εμφανιζόμενο ολοκλήρωμα νοείται με την έννοια του ολοκληρώματος Lebésque. Από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος αυτού απορρέουν οι ιδιότητες i-iii και συνεπώς $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, P)$ είναι χώρος πιθανότητας. Η συνάρτηση f ονομάζεται **συνάρτηση πυκνότητας** του μέτρου πιθανότητας P και η ερμηνεία της είναι προφανής: κατανέμει την πιθανότητα κατά μήκος του άξονα των x.

***Παράδειγμα 2.2.*** Έστω τυχόν $\Omega \neq \varnothing$ και $\mathcal{F}$ σ-άλγεβρα υποσυνόλων του. Έστω ακόμα $a \in \Omega$ με $\{a\} \in \mathcal{F}$. Ορίζουμε για $A \in \mathcal{F}$

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{αν } a \in A \\ 0 & \text{αν } a \notin A \end{cases}$$

Τότε $(\Omega, \mathcal{F}, \delta_a)$ είναι χώρος πιθανότητας και η πιθανότητα $\delta_a$ ονομάζεται **μέτρο Dirac στο a**.

Ας εξειδικεύσουμε το παράδειγμα αυτό για $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}^1$ και $a \in \mathbb{R}$. Η ερμηνεία είναι προφανής: Το μοντέλο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, \delta_a)$ είναι κατάλληλο για ένα πείραμα τύχης του οποίου το μόνο παρατηρούμενο αποτέλεσμα είναι a (και συνεπώς προβλέψιμο). Ένα τέ-

* Η f μπορεί να είναι απλώς μια συνάρτηση Borel όπως ορίζεται στο Κεφ. ΙΙ.

τοιο πείραμα είναι ουσιαστικά ντετερμινιστικό και το μέτρο Dirac $\delta_a$ είναι ο τρόπος που «μιλάει» γι' αυτό η θεωρία Πιθανοτήτων, είναι ο τρόπος που εντάσσει ένα ντετερμινιστικό φαινόμενο στο πεδίο δράσης της. Να σημειωθεί ακόμα ότι το μέτρο Dirac $\delta_a$ στο $\mathbb{R}$ δεν έχει συνάρτηση πυκνότητας δηλαδή δεν είναι δυνατόν να γραφεί όπως το μέτρο πιθανότητας του Παραδείγματος 2.1. (Η συνάρτηση δέλτα του Dirac είναι μια σύμβαση όχι ορθή από αυστηρά μαθηματική άποψη).

Είναι σκόπιμο να αναφερθούμε σε περιπτώσεις δειγματοχώρων εξετάζοντας το τι μπορεί να είναι το σύνολο Ω. Αν π.χ. το παρατηρούμενο αποτέλεσμα ενός π.τ. μπορεί να αποδοθεί από ένα πραγματικό αριθμό τότε είναι φανερό ότι το Ω μπορεί να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$. Όμοια αν το παρατηρούμενο αποτέλεσμα ενός π.τ. μπορεί να αποδοθεί διανυσματικά τότε το Ω μπορεί να είναι το σύνολο $\mathbb{R}^n$. Ας εξετάσουμε όμως το πείραμα (και το φαινόμενο) που είναι γνωστό ως Κίνηση Brown. Πρόκειται για το πείραμα εκείνο όπου ένα σωματίδιο πολύ μικρών διαστάσεων (κόκκος γύρης) εμβαπτίζεται σε ένα δοχείο νερού. Το σωματίδιο ωθούμενο από τις κινήσεις των μορίων του νερού πραγματοποιεί μια τρομώδη και «ακανόνιστη» κίνηση. Εδώ το παρατηρούμενο αποτέλεσμα είναι η τροχιά του σωματιδίου κατά το χρονικό διάστημα [0,T]. Γίνεται άμεσα αντιληπτό λοιπόν ότι ένας κατάλληλος δειγματοχώρος Ω είναι το σύνολο $C\left([0,T],\mathbb{R}^3\right)$ όλων των συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το [0,T] και τιμές στο $\mathbb{R}^3$ δηλαδή το τυχόν στοιχείο $\omega \in \Omega$ θα είναι μια συνεχής διανυσματική συνάρτηση $r(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$, $t\in[0,T]$. Θα κλείσουμε αυτή τη συζήτηση με μια ακόμα αναφορά στο δειγματοχώρο. Έστω ότι ένα πείραμα τύχης Π αποδίδεται με το δειγματοχώρο Ω. Εξετάζουμε τώρα το πείραμα τύχης που συνίσταται σε m-επαναλήψεις του πειράματος Π. Ένας κατάλληλος δειγματοχώρος για το νέο πείραμα μπορεί εύλογα να είναι το σύνολο $\Omega\times\Omega\times\cdots\times\Omega=\prod_{i=1}^{m}\Omega$ - καρτεσιανό γινόμενο m-φορές. Το ίδιο και αν οι επαναλήψεις είναι άπειρες το πλήθος. Έτσι ο δ.χ. του πειράματος: επ' άπειρον ρίψη νομίσματος μπορεί να είναι το σύνολο $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}\{0,1\}\equiv\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Αυτό το τελευταίο σύνολο «ισοδυναμεί» με το σύνολο $I=[0,1]$ αφού σε κάθε ακολουθία $(a_1,a_2,\ldots)$ του Ω αντιστοιχεί ο αριθμός $0,a_1,a_2,\ldots$ του I (δυαδικό ανάπτυγμα). Το παράδειγμα αυτό εξηγεί γιατί ως τώρα δεν μιλούμε για «τον» δειγματοχώρο του πειράματος αλλά για έναν δειγματοχώρο του πειράματος. Επ' αυτού είναι σχετική η παρακάτω.

***Άσκηση 2.1.*** Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ χώρος πιθανότητας και $\Omega_0\in\mathcal{F}$ με $P(\Omega_0)=1$. Θεωρείστε την σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_0=\{A\subset\Omega_0 : A\in\mathcal{F}\}$ υποσυνόλων του $\Omega_0$ (δες ασκ. 1.3.) και ορίστε $P_0(A)=P(A)$, $A\in\mathcal{F}_0$. Τότε η τριάδα $(\Omega_0,\mathcal{F}_0,P_0)$ είναι χώρος πιθανότητας.

***Σημείωση.*** Ο χ.π. $(\Omega_0,\mathcal{F}_0,P_0)$ είναι εξίσου κατάλληλος με τον αρχικό χ.π. $(\Omega,\mathcal{F},P)$ για το εξεταζόμενο πείραμα τύχης. Η άσκηση 2.1. λοιπόν μας παρέχει την δυνατότητα «απλοποίησης» του δειγματοχώρου Ω σε $\Omega_0$ όταν το σύνολο $N=\Omega\setminus\Omega_0$ έχει πιθανότητα $P(N)=0$. Αυτό εξηγεί εν μέρει και την έννοια των ενδεχομένων με πιθανότητα μηδέν.

***Άσκηση 2.2.*** Έστω $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots\}$ και ακολουθία $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $P_n\geq 0$ και $\sum_{n=1}^{\infty}P_n=1$. Για $A\subset\Omega$ ορίζουμε $P(A)=\sum_{n:\,\omega_n\in A}P_n$. Δείξτε ότι $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ είναι χ.π.

***Άσκηση 2.3.*** Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ χ.π. και $B\in\mathcal{F}$ με $P(B)>0$. Ορίζουμε $P_B:\mathcal{F}\to[0,\infty)$: $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$. Δείξτε ότι $(\Omega,\mathcal{F},P_B)$ είναι χώρος πιθανότητας. Δείξτε επίσης ότι $(B,\mathcal{F}_B,P_B)$ είναι χ.π. με $\mathcal{F}_B=\{A\subset B:A\in\mathcal{F}\}$.

Οι παρακάτω ιδιότητες της πιθανότητας είναι άμεσες και ήδη γνωστές.

***Πρόταση 2.1.*** Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ χ.π. Τότε ισχύει:
i) $P(\varnothing)=0$
ii) $P(A^c)=1-P(A)$ για κάθε $A\in\mathcal{F}$
iii) $0\leq P(A)\leq 1$ για κάθε $A\in\mathcal{F}$
iv) $P(A\setminus B)=P(A)-P(A\cap B)$ για $A,B\in\mathcal{F}$
v) Αν $A,B\in\mathcal{F}$ και $A\supset B$ τότε $P(A)\geq P(B)$
vi) Αν $A,B\in\mathcal{F}$ τότε $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
vii) Αν $A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathcal{F}$ τότε $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$. ⑤

Αν $\{A_n,n=1,2,\ldots\}\subset\mathcal{F}$ πως συμπεριφέρεται η ακολουθία πραγματικών αριθμών $P(A_n)$, $n=1,2,\ldots$; Οι παρακάτω προτάσεις είναι σχετικές.

***Πρόταση 2.2.*** Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ χ.π. και $\{A_n:n=1,2,\ldots\}\subset\mathcal{F}$.

α) Αν $A_n\subset A_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ τότε $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_n P(A_n)$.

β) Αν $A_n\supset A_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ τότε $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_n P(A_n)$.

**Απόδειξη**

α) Το όριο $\lim_n P(A_n)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ αφού $P(A_n)\leq P(A_{n+1})\leq 1$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Θέτουμε τώρα $B_1=A_1$ και $B_n=A_n-A_{n-1}$ $(n=2,3,\ldots)$. Εύκολα επαληθεύονται τα εξής: $\bigcup_{i=1}^{n}B_i=A_n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, $B_i\cap B_j=\varnothing$ $\forall i\neq j$. Συνεπώς έχουμε διαδοχικά

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n)=\lim_{\kappa}\sum_{n=1}^{\kappa}P(B_n)=\lim_{\kappa}P\left(\bigcup_{n=1}^{\kappa}B_n\right)=\lim_{\kappa}P(A_\kappa).$$

β) Θέτουμε $\Gamma_n=A_n^c$, $n=1,2,\ldots$. Τότε $\Gamma_n\subset\Gamma_{n+1}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και σύμφωνα με το α) μέρος θα ισχύει

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Gamma_n\right)=\lim_n P(\Gamma_n) \text{ άρα}$$

$$1-P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Gamma_n\right)^c\right)=\lim_n\left(1-P\left(\Gamma_n^c\right)\right).$$

Όμως $\Gamma_n^c = A_n$ και $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Gamma_n\right)^c=\bigcap_{n=1}^{\infty}\Gamma_n^c=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ . ⑤

***Πόρισμα.*** Αν $\{A_n, n=1,2,\ldots\}\subset\mathcal{F}$ τότε ισχύει $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$ (Ανισότητα Boole).

(Υπόδειξη: παρατηρείστε ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{\kappa=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=1}^{\kappa}A_n\right)$ και ότι η $B_\kappa=\bigcup_{n=1}^{\kappa}A_n$ είναι αύξουσα. Θυμηθείτε την Πρόταση 2.1. vii).

***Ορισμός.*** Έστω $\{A_n, n=1,2,\ldots\}$ μια ακολουθία ενδεχομένων.
Ορίζουμε

$$\limsup A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m$$

και

$$\liminf A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m .$$

Λέγεται ότι $\lim A_n = A$ όταν και μόνον όταν ισχύει:

$$\limsup A_n=\liminf A_n=A .$$

Είναι απαραίτητο να ερμηνεύσουμε τα $\limsup A_n$ και $\liminf A_n$ ως ενδεχόμενα.
Ένα στοιχείο του δειγματοχώρου $\omega\in\limsup A_n$ όταν και μόνο όταν για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει $m\ge n$ με $\omega\in A_m$ δηλαδή $\omega\in\limsup A_n$ όταν και μόνο όταν $\omega\in A_n$ για απείρως πολλά n ή αλλιώς το $\limsup A_n$ πραγματοποιείται όταν και μόνο όταν απείρως πολλά από τα $A_n$ πραγματοποιούνται. Αντίστοιχα $\omega\in\liminf A_n$ όταν και μόνο όταν υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\omega\in A_m$ για κάθε $m\ge n$ δηλαδή το $\liminf A_n$ πραγματοποιείται όταν και μόνο όταν όλα τα $A_n$ πραγματοποιούνται εκτός ίσως πεπερασμένου πλήθους από αυτά. Σημειώστε ακόμα την προφανή σχέση

$$\liminf A_n\subset\limsup A_n . \tag{2.1}$$

Η σχέση (2.1) δεν είναι ισότητα όπως φαίνεται από το ακόλουθο Παράδειγμα: $\Omega=(-1,1]$ και για $n\in\mathbb{N}$ θέτουμε

$$A_n=\begin{cases}\left(-\frac{1}{n},1\right], & \text{αν n περιττός}\\ \left(-1,\frac{1}{n}\right], & \text{αν n άρτιος}\end{cases}$$

Τότε $\liminf A_n=\{0\}$ και $\limsup A_n=(-1,1]$. (επαληθεύστε τα)

***Πρόταση 2.3.*** Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ χ.π. και $\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$. Τότε ισχύει:

α) $\mathrm{P}(\liminf A_n) \le \liminf \mathrm{P}(A_n) \le \limsup \mathrm{P}(A_n) \le \mathrm{P}(\limsup A_n)$.

β) Αν $\lim A_n = A$ τότε $\lim \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}(A)$.

**Απόδειξη**

Θέτουμε $B_n = \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ και $\Gamma_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $B_n \subset B_{n+1}$, $\Gamma_n \supset \Gamma_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άρα

$$\lim \mathrm{P}(B_n) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mathrm{P}(\liminf A_n) \tag{2.2}$$

$$\lim \mathrm{P}(\Gamma_n) = \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n\right) = \mathrm{P}(\limsup A_n) \tag{2.3}$$

Επειδή τώρα $B_n \subset A_n \subset \Gamma_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\mathrm{P}(B_n) \le \mathrm{P}(A_n) \le \mathrm{P}(\Gamma_n)$$

και συνεπώς

$$\liminf \mathrm{P}(B_n) \le \liminf \mathrm{P}(A_n) \le \limsup \mathrm{P}(A_n) \le \limsup \mathrm{P}(\Gamma_n).$$

Λαμβάνοντας τώρα υπόψη τις (2.2) και (2.3) συμπεραίνουμε το α) μέρος της Πρότασης. Το β) είναι άμεσο. ⑤

***Πρόταση 2.4.*** ($1^{\text{ο}}$ Λήμμα των Borel-Cantelli)

Έστω χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ και $\{A_n : n = 1, 2, \ldots\} \subset \mathcal{F}$.

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) < +\infty$ τότε $\mathrm{P}(\limsup A_n) = 0$.

**Απόδειξη**

Προφανώς $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \subset \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Boole (Πόρισμα Προτ. 2.2) έχουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{P}(\limsup A_n) \le \mathrm{P}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) \le \sum_{m=n}^{\infty} \mathrm{P}(A_m) \tag{2.4}$$

Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) < +\infty$ ισχύει $\lim_{n} \sum_{m=n}^{\infty} \mathrm{P}(A_m) = 0$ και συνεπώς από την (2.4) συμπεραίνουμε ότι ισχύει η $\mathrm{P}(\limsup A_n) = 0$. ⑤

***Παράδειγμα 2.3.*** Ένα σωματίδιο κινείται στον άξονα $x'x$ αρχίζοντας από το 0 και με τον εξής τρόπο: ανά χρονική μονάδα εκτελεί ένα βήμα μήκους 1 προς τα δεξιά με πιθανότητα q ή ένα βήμα μήκους 1 προς τα αριστερά με πιθανότητα $1-q$. Υποθέτουμε $q \neq \frac{1}{2}$ και για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}_0$ θεωρούμε το ενδεχόμενο

$A_\kappa$ : το σωματίδιο βρίσκεται στο 0 ύστερα από 2κ βήματα.

Το $A_\kappa$ πραγματοποιείται όταν από τα 2κ βήματα, τα κ βήματα είναι προς τη μία κατεύθυνση και τα υπόλοιπα κ προς την άλλη. Χρησιμοποιώντας λοιπόν διωνυμική κατανομή έχουμε

$$P(A_\kappa)=\binom{2\kappa}{\kappa}q^\kappa(1-q)^\kappa=\frac{(2\kappa)!}{(\kappa!)^2}\left(q(1-q)\right)^\kappa.$$

Θέτοντας τώρα $\alpha_\kappa=P(A_\kappa)$ εύκολα συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\alpha_{\kappa+1}}{\alpha_\kappa}=\frac{(2\kappa+1)(2\kappa+2)}{(\kappa+1)^2}q(1-q)\to 4q(1-q) \text{ όταν } \kappa\to\infty$$

και επειδή $q\neq\frac{1}{2}$ συμπεραίνουμε ότι $4q(1-q)<1$. Άρα $\sum_{\kappa=1}^{\infty}P(A_\kappa)<+\infty$ και σύμφωνα με το Λήμμα Borel-Cantelli θα ισχύει $P(\limsup A_\kappa)=0$ δηλαδή η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν απείρως πολλά από τα $A_\kappa$ είναι μηδέν ή αλλιώς η πιθανότητα το σωματίδιο να επισκέπτεται επ' άπειρον το σημείο μηδέν είναι μηδενική.

***Σημείωση.*** Αν $q=\frac{1}{2}$ τότε αποδεικνύεται ότι $P(\limsup A_\kappa)=1$ με προφανή ερμηνεία. Η απόδειξη όμως είναι δυσκολότερη (βλ. [2]).

***Άσκηση 2.5.*** Έστω $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots\}$ και $\mathcal{F}=\mathcal{P}(\Omega)$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει μέτρο πιθανότητας P στον $(\Omega,\mathcal{F})$ με την ιδιότητα $P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=P(\{\omega_3\})=\cdots$.

***Άσκηση 2.6.*** Έστω $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ ενδεχόμενα. Δείξτε ότι

$$n+P(A_1\cap\cdots\cap A_n)\geq 1+\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

***Άσκηση 2.7.*** Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ χώρος πιθανότητας και $\{A_n,n\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{F}$. Έστω ότι $P(A_n)\geq a\ \forall\, n\in\mathbb{N}$ όπου $a>0$. Δείξτε ότι $\limsup A_n\neq\varnothing$.

***Άσκηση 2.8.*** Έστω ένα πείραμα τύχης π με χ.π. $(\Omega,\mathcal{F},P)$ όπου Ω είναι αριθμήσιμο και $\mathcal{F}=\mathcal{P}(\Omega)$. Το πείραμα π επαναλαμβάνεται n-φορές και έστω Π το πείραμα τύχης που συνίσταται από τις n-επαναλήψεις του πειράματος π. Κατασκευάστε και προτείνετε ένα χώρο πιθανότητας για το πείραμα Π.
(Υπόδειξη: Θέτουμε $W=\Omega\times\Omega\times\cdots\times\Omega$ n-φορές. Τότε το σύνολο W είναι αριθμήσιμο. Θέτουμε $\mathcal{A}=\mathcal{P}(W)$ και ορίζουμε για τυχόν $w=(\omega_1,\ldots,\omega_n)\in W$

$$P^*(\{w\})=P(\{\omega_1\})\cdot P(\{\omega_2\})\cdots P(\{\omega_n\}). \tag{2.5}$$

Δείξτε ότι $\sum_{w\in W}P^*(\{w\})=1$ και χρησιμοποιείστε την Ασκ. 2.2. Παρατηρείστε ότι υπάρχει ένα μόνο μέτρο πιθανότητας $P^*$ στον ($W,\mathcal{A}$ ) που ικανοποιεί την (2.5)).

***Άσκηση 2.9.*** Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ χ.π. Ένα σύνολο $E\in\mathcal{F}$ ονομάζεται **άτομο** του P όταν και μόνο όταν: $P(E)>0$ και $F\subset E$ με $F\in\mathcal{F}\Rightarrow P(F)=P(E)$ ή $P(F)=0$. Έστω τώρα ότι το μέτρο P δεν έχει άτομα. Δείξτε τότε ότι για κάθε $a\in[0,1]$ υπάρχει $A\in\mathcal{F}$ με $P(A)=a$.

## 3. Ισότητα μέτρων πιθανότητας

Δύο μέτρα πιθανότητας $P_1$, $P_2$ ορισμένα στην σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του Ω είναι ίσα όταν βέβαια ισχύει: $P_1(A)=P_2(A)$ για κάθε $A\in\mathcal{F}$. Το αντικείμενο της παραγράφου αυτής είναι η αναζήτηση «οικονομικότερων» συνθηκών ισότητας της μορφής: Αν δύο μέτρα πιθανότητας συμπίπτουν σε μια κλάση $\mathcal{C}$ τότε συμπίπτουν στην $\mathcal{F}=\sigma(\mathcal{C})$. Σε κάτι τέτοιο αποσκοπεί ο παρακάτω ορισμός.

***Ορισμός.*** Έστω $\Omega\neq\varnothing$ και $\mathcal{D}$ μια κλάση υποσυνόλων του Ω. Η κλάση $\mathcal{D}$ ονομάζεται **σύστημα Dynkin** όταν και μόνο όταν ικανοποιεί τις απαιτήσεις:

i) $\Omega\in\mathcal{D}$

ii) Αν $A,B\in\mathcal{D}$ με $A\subset B$ τότε $B\setminus A\in\mathcal{D}$

iii) Αν $\{A_n : n\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{D}$ και $A_n\cap A_m=\varnothing$ για κάθε $n\neq m$ τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{D}$.

***Παρατήρηση 3.1.*** Αν $\mathcal{D}$ είναι σύστημα Dynkin τότε είναι προφανές ότι ισχύουν τα παρακάτω

i) $\varnothing\in\mathcal{D}$ ii) Αν $A\in\mathcal{D}$ τότε $A^c\in\mathcal{D}$.

Μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω είναι προφανώς σύστημα Dynkin. Για το αντίστροφο σχετική είναι η παρακάτω.

***Πρόταση 3.1.*** Έστω $\mathcal{D}$ ένα σύστημα Dynkin υποσυνόλων του Ω με την ιδιότητα: $A,B\in\mathcal{D}\Rightarrow A\cap B\in\mathcal{D}$. Τότε η κλάση $\mathcal{D}$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω.

**Απόδειξη**

Αν $A\in\mathcal{D}$ τότε $A^c=\Omega\setminus A$ και άρα $A^c\in\mathcal{D}$. Εξάλλου αν $A,B\in\mathcal{D}$ τότε $A\cap B\in\mathcal{D}$ και συνεπώς $B\setminus A\cap B\in\mathcal{D}$. Επειδή $A\cup B=A\cup(B\setminus A\cap B)\cup\varnothing\cup\varnothing\cdots$ και τα σύνολα της ένωσης είναι ξένα μεταξύ τους συμπεραίνουμε ότι $A\cup B\in\mathcal{D}$ συνεπώς και ότι $\bigcup_{i=1}^{\kappa}A_i\in\mathcal{D}$ όταν $\{A_i : i=1,2,\ldots,\kappa\}\in\mathcal{D}$. Έστω τώρα $\{A_n : n\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{D}$. Θέτουμε $B_1=A_1$, $B_2=A_2\setminus A_1$, $B_3=A_3\setminus(A_1\cup A_2)$ και γενικά $B_n=A_n\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)$ για $n\geq 2$.

Τότε επαληθεύονται (πώς;) τα εξής*:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n \text{ και } B_i\cap B_j=\varnothing\ \ \forall\, i\neq j. \tag{3.1}$$

Όμως $\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)\cap A_n\in\mathcal{D}$ από υπόθεση και άρα τα σύνολα $B_n=A_n\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)\cap A_n$ ανήκουν στην $\mathcal{D}$. Επικαλούμενοι τώρα την (3.1) συμπεραίνουμε ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{D}$. ⑤

---

* Η τεχνική αυτή της χρήσης των ξένων μεταξύ τους συνόλων $B_n$, $n\in\mathbb{N}$ συναντάται συχνά στη θεωρία μέτρου και τη Θεωρία Πιθανοτήτων.

***Άσκηση 3.1.*** Αν $I \neq \varnothing$ είναι ένα σύνολο δεικτών και $\mathcal{D}_i$, $i \in I$ είναι συστήματα Dynkin τότε η κλάση $\bigcap_{i \in I} \mathcal{D}_i$ είναι σύστημα Dynkin.

Η άσκηση 3.1 δικαιολογεί τον παρακάτω ορισμό.

***Ορισμός.*** Έστω $\mathcal{C}$ μη κενή κλάση υποσυνόλων του Ω. Η τομή όλων των συστημάτων Dynkin που περιέχουν την κλάση $\mathcal{C}$ ονομάζεται **σύστημα Dynkin παραγόμενο από την** $\mathcal{C}$ και συμβολικά γράφεται $d(\mathcal{C})$. Η κλάση $d(\mathcal{C})$ είναι το ελάχιστο σύστημα Dynkin που περιέχει την $\mathcal{C}$.

Η επόμενη Πρόταση είναι το βασικό εργαλείο για τους σκοπούς αυτής της παραγράφου.

***Πρόταση 3.2.*** Έστω $\mathcal{C}$ μη κενή κλάση υποσυνόλων του Ω με την ιδιότητα: $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$. Τότε ισχύει:

$$d(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}).$$

**Απόδειξη**

Η σ-άλγεβρα $\sigma(\mathcal{C})$ είναι σύστημα Dynkin άρα $\sigma(\mathcal{C}) \supset d(\mathcal{C})$. Αν η κλάση $d(\mathcal{C})$ ήταν σ-άλγεβρα τότε θα ήταν και $d(\mathcal{C}) \supset \sigma(\mathcal{C})$. Πράγματι θα αποδείξουμε ότι η $d(\mathcal{C})$ είναι σ-άλγεβρα. Αρκεί σύμφωνα με την προηγούμενη Πρόταση να αποδείξουμε ότι:

$$A, B \in d(\mathcal{C}) \Rightarrow A \cap B \in d(\mathcal{C}).$$

Για τυχόν $E \in d(\mathcal{C})$ θεωρούμε την κλάση

$$\mathcal{D}_E = \{Q \subset \Omega : Q \cap E \in d(\mathcal{C})\}.$$

Εύκολα επαληθεύεται (;) ότι η κλάση $\mathcal{D}_E$ είναι σύστημα Dynkin και μάλιστα αν $E \in \mathcal{C}$ τότε $\mathcal{D}_E \supset \mathcal{C}$. Συνεπώς

$$d(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}_E \text{ όταν } E \in \mathcal{C}.$$

Άρα αν $D \in d(\mathcal{C})$ και $E \in \mathcal{C}$ τότε $D \in \mathcal{D}_E$ και συνεπώς $D \cap E \in d(\mathcal{C})$ και άμεσα συμπεραίνουμε ότι

$$E \in \mathcal{D}_D \equiv \{Q \subset \Omega : Q \cap D \in d(\mathcal{C})\}.$$

Ώστε $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_D$ όταν $D \in d(\mathcal{C})$ οπότε

$$d(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}_D \text{ για κάθε } D \in d(\mathcal{C}). \tag{3.2}$$

Αν τώρα $A, B \in d(\mathcal{C})$ τότε σύμφωνα με την (3.2) θα είναι $A \in \mathcal{D}_B$ και άρα $A \cap B \in d(\mathcal{C})$. ⑤

Εύκολη συνέπεια της Πρότασης 3.2 είναι η παρακάτω Πρόταση – κριτήριο.

***Πρόταση 3.3.*** Έστω $\mathcal{C}$ μη κενή κλάση υποσυνόλων του Ω με την ιδιότητα: $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$. Υποθέτουμε ότι δύο μέτρα πιθανότητας $P_1, P_2$ ορισμένα στην $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$ έχουν την ιδιότητα

$$P_1(A) = P_2(A) \text{ για κάθε } A \in \mathcal{C}.$$

Τότε ισχύει $P_1(A) = P_2(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$.

**Απόδειξη**

Θέτουμε $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{F} : P_1(A) = P_2(A)\}$

Τότε προφανώς $\mathcal{C} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. Όμως η κλάση $\mathcal{A}$ είναι σύστημα Dynkin (επαληθεύστε το) και συνεπώς $\mathcal{A} \supset \mathrm{d}(\mathcal{C})$. Λόγω της υπόθεσης για την $\mathcal{C}$ ισχύει η προηγούμενη Πρόταση δηλ. $\mathrm{d}(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$ και άρα $\mathcal{A} \supset \mathcal{F}$. ⑤

***Άσκηση 3.2.*** Δείξτε ότι μια κλάση Δ είναι ένα σύστημα Dynkin όταν και μόνο όταν ικανοποιούνται τα παρακάτω:

(i) $\Omega \in \mathcal{D}$

(ii) $A, B \in \mathcal{D}$ με $A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{D}$

(iii) $A, B \in \mathcal{D}$ με $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{D}$ και

(iv) Αν $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}$ με $A_n \subset A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$ τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

***Άσκηση 3.3.*** Έστω $P_1, P_2$ μέτρα πιθανότητας ορισμένα στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$ με την ιδιότητα: $P_1((-\infty, x]) = P_2((-\infty, x])$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$ όπου το $\mathbb{Q}$ είναι το σύνολο των ρητών. Δείξτε ότι $P_1(B) = P_2(B)$ για κάθε $B \in \mathcal{B}^1$.

***Άσκηση 3.4.*** Θεωρούμε τους χώρους πιθανότητας $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, P_1)$ και $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, P_2)$. Έστω τώρα ότι P είναι ένα μέτρο πιθανότητας ορισμένο στον $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2)$ και έχει την ιδιότητα:

$$P((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) = P_1((a_1, b_1]) \cdot P_2((a_2, b_2]) \tag{3.3}$$

για όλα τα «ορθογώνια» $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$

α) Δείξτε ότι το P είναι το μόνο μέτρο πιθανότητας με την ιδιότητα (3.3)

β) Δείξτε ότι το μέτρο P έχει την ακόλουθη ιδιότητα

$$P(A \times B) = P_1(A) \cdot P_2(B)$$

για όλα τα $A \in \mathcal{B}^1, B \in \mathcal{B}^1$.

(Σημείωση: Υπάρχει μέτρο πιθανότητας με την ιδιότητα (3.3), είναι το μέτρο γινόμενο όπως θα ιδούμε στη συνέχεια).

## 4. Επέκταση μέτρου πιθανότητας

Η κατασκευή ενός χώρου πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ που αντιστοιχεί σε κάποιο πείραμα τύχης δεν είναι γενικά προφανής αφού συνήθως απαιτείται να πραγματοποιηθεί με βάση «μικρό» αριθμό πληροφοριών σχετικών με το υπό μελέτη πείραμα. Μια εκδοχή αυτής της προβληματικής είναι η ακόλουθη: Αν η πιθανότητα είναι γνωστή για τα υποσύνολα μια κλάσης $\mathcal{C}$, πως μπορεί να επεκταθεί σε μια ευρύτερη κλάση υποσυνόλων; Αυτό θα είναι το αντικείμενο αυτής της παραγράφου.

***Ορισμός.*** Έστω $\mathcal{C}$ μια κλάση υποσυνόλων του Ω. Η κλάση $\mathcal{C}$ ονομάζεται **ημιδακτύλιος** όταν ικανοποιούνται οι παρακάτω απαιτήσεις

(i) $\varnothing \in \mathcal{C}$

(ii) $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$

(iii) Αν $A, B \in \mathcal{C}$ τότε η διαφορά $A \setminus B$ μπορεί να γραφεί σαν ένωση $\bigcup_{i=1}^{m} E_i$ με $E_i \in \mathcal{C}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ ξένα μεταξύ τους.

Αν επί πλέον ισχύει η απαίτηση: $\Omega \in \mathcal{C}$ τότε η κλάση $\mathcal{C}$ ονομάζεται **ημιάλγεβρα**.

***Παράδειγμα 4.1.*** Η κλάση υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ που ορίζεται από

$$\mathcal{P}^n = \{(a_1 b_1] \times (a_2 b_2] \times \cdots \times (a_n b_n] : a_i < b_i\} \cup \{\varnothing\}$$

είναι ημιδακτύλιος (επαληθεύστε για $n = 1$, $n = 2$).

***Παράδειγμα 4.2.*** Έστω $\mathcal{F}_1$ σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\Omega_1$ και $\mathcal{F}_2$ σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\Omega_2$. Θέτουμε $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ και θεωρούμε την κλάση υποσυνόλων του $\Omega$ $\mathcal{C} = \{A \times B : A \in \mathcal{F}_1,\ B \in \mathcal{F}_2\}$. Τότε η κλάση $\mathcal{C}$ είναι ημιάλγεβρα υποσυνόλων του $\Omega$ (επαληθεύστε).

***Άσκηση 4.1.*** Έστω $\mathcal{C}$ ημιδακτύλιος υποσυνόλων του $\Omega$ και έστω $A \in \mathcal{C}$, $A_i \in \mathcal{C}$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$. Τότε δείξτε ότι ισχύει: $A \setminus \bigcup_{i=1}^{\kappa} A_i = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$ όπου $B_i \in \mathcal{C}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ ξένα μεταξύ τους (δοκιμάστε επαγωγικά).

***Άσκηση 4.2.*** Έστω $A_i \in \mathcal{C}$, $i = 1, 2, \ldots, \kappa$ όπου $\mathcal{C}$ ημιδακτύλιος. Τότε υπάρχουν $B_j \in \mathcal{C}$, $j = 1, 2, \ldots, l$ ξένα μεταξύ τους εις τρόπον ώστε: $\bigcup_{i=1}^{\kappa} A_i = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$ και κάθε $B_j$ είναι υποσύνολο ενός τουλάχιστον $A_i$.

***Πρόταση 4.1.***(Θεώρημα Καραθεοδωρή) Έστω $\mathcal{F}_0$ ημιδακτύλιος υποσυνόλων του $\Omega$ και συνολοσυνάρτηση $P_0 : \mathcal{F}_0 \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:

i) $0 \le P_0(A) \le 1$ για κάθε $A \in \mathcal{F}_0$

ii) Υπάρχει $\{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}_0$ με $E_n \subset E_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$ και $\lim_n P_0(E_n) = 1$

iii) Αν $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}_0$ με $A_i \cap A_j = \varnothing$ για κάθε $i \ne j$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_0$ τότε

$$P_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P_0(A_n).$$

Τότε υπάρχει μέτρο πιθανότητας P ορισμένο στην σ-άλγεβρα $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$ εις τρόπον ώστε

$$P(A) = P_0(A) \text{ για κάθε } A \in \mathcal{F}_0 \tag{4.1}$$

Το μέτρο πιθανότητας P είναι το μοναδικό που ικανοποιεί την (4.1).

Η απόδειξη του θεωρήματος Καραθεοδωρή παραλείπεται. Θα παραθέσουμε εν τούτοις μια σύντομη αναφορά στις κύριες ιδέες της που είναι χρήσιμες για τη συνέχεια. Ο ενδιαφερόμενος για την πλήρη απόδειξη μπορεί να ανατρέξει στα [1] ή [3] ή [5] ή [10]. Για κάθε υποσύνολο $A \subset \Omega$ ορίζουμε

$$P^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} P_0(A_n) : A_n \in \mathcal{F}_0 \text{ και } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset A\right\}.$$

Η συνολοσυνάρτηση $P^*$ είναι ορισμένη **για όλα** τα υποσύνολα του Ω και αποδεικνύεται ότι:

$$P^*(\varnothing)=0$$

$$\text{Αν } A\subset B \text{ τότε } P^*(A)\le(B)$$

$$P^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}P^*(B_n) \tag{4.2}$$

για οποιαδήποτε ακολουθία $\{B_n : n\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{P}(\Omega)$.

Η συνολοσυνάρτηση $P^*:\mathcal{P}(\Omega)\to[0,\infty)$ ονομάζεται **εξωτερικό μέτρο παραγόμενο από την $P_0$**. Επειδή η (4.2) δεν είναι πάντοτε ισότητα ακόμα και για ξένα μεταξύ τους σύνολα $\{B_n : n\in\mathbb{N}\}$, η συνολοσυνάρτηση $P^*$ δεν είναι μέτρο πιθανότητας στο $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega))$. Εν τούτοις ισχύει

$$P^*(A)=P_0(A) \text{ για κάθε } A\in\mathcal{F}_0 \tag{4.3}$$

$$P^*(\Omega)=1.$$

Θεωρούμε τώρα την κλάση υποσυνόλων του Ω

$$\mathcal{M}=\{A\subset\Omega : P^*(E)=P^*(E\cap A)+P^*(E\cap A^c) \text{ για κάθε } E\subset\Omega\}$$

Τότε αποδεικνύονται τα εξής:

- Η κλάση $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω και μάλιστα $\mathcal{F}_0\subset\mathcal{M}$ άρα και $\mathcal{F}=\sigma(\mathcal{F}_0)\subset\mathcal{M}$.
- Αν $\{B_n : n\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{M}$ με $B_m\cap B_n=\varnothing\ \forall m\ne n$ τότε $P^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P^*(B_n)$.

Συνεπώς $(\Omega,\mathcal{M},P^*)$ είναι χώρος πιθανότητας. Αν λοιπόν ορίσουμε $P(A)=P^*(A)$ για $A\in\mathcal{F}=\sigma(\mathcal{F}_0)$ και λάβουμε υπόψη την (4.3) αποκτούμε το ζητούμενο μέτρο πιθανότητας P που επεκτείνει την $P_0$. Η μοναδικότητα είναι άμεση απόρροια της Πρότασης
3.3. Ο χώρος πιθανότητας $(\Omega,\mathcal{M},P^*)$ που επίσης προκύπτει είναι εν γένει ευρύτερος του χώρου πιθανότητας $(\Omega,\mathcal{F},P)$ αφού $\mathcal{M}\supset\mathcal{F}$. ⑤

***Πρόταση 4.1(b)*** Τα συμπεράσματα της Πρότασης 4.1 ισχύουν αν ικανοποιούνται οι παρακάτω προϋποθέσεις: Η $\mathcal{F}_0$ είναι ημιάλγεβρα υποσυνόλων του Ω και η συνολοσυνάρτηση $P_0$ ικανοποιεί τις i) και iii) της Πρότασης 4.1 και επί πλέον (αντί της ii) την

$$\text{ii}')\ \ P_0(\Omega)=1$$

***Άσκηση 4.3.*** Έστω $\mathcal{F}_0$ ημιδακτύλιος υποσυνόλων του Ω και συνολοσυνάρτηση $P_0:\mathcal{F}_0\to[0,\infty)$ τέτοια ώστε:

i) $P_0(\varnothing)=0$

ii) Αν $A_1,A_2,\ldots,A_\kappa\in\mathcal{F}_0$ με $A_m\cap A_n=\varnothing\,\forall m\ne n$ και $\bigcup_{i=1}^{\kappa}A_i\in\mathcal{F}_0$ τότε

$$P_0\left(\bigcup_{i=1}^{\kappa}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\kappa}P_0(A_i) \text{ (απλά προσθετική)}$$

iii) Αν $\{A_n, n\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{F}_0$ με $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{F}_0$ τότε $P_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}P_0(A_n)$ (σ-υποπροσθετική). Δείξτε ότι ισχύει: Αν $\{A_n, n\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{F}_0$ με $A_m\cap A_n=\varnothing\ \forall m\neq n$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{F}_0$ τότε $P_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P_0(A_n)$ (σ-προσθετική).

***Άσκηση 4.4.*** Για το εξωτερικό μέτρο $P^*$ και την κλάση $\mathcal{M}$ που ορίστηκαν παραπάνω δείξτε ότι: $\mathcal{M}=\{A\subset\Omega : P^*(A)+P^*(A^c)=1\}$

***Άσκηση 4.5.*** Έστω $\mathcal{F}_0$ **άλγεβρα** υποσυνόλων του $\Omega$ δηλαδή μία κλάση υποσυνόλων του $\Omega$ που ικανοποιεί τις απαιτήσεις: $\Omega\in\mathcal{F}_0$, αν $A\in\mathcal{F}_0$ τότε $A^c\in\mathcal{F}_0$, αν $A,B\in\mathcal{F}_0$ τότε $A\cup B\in\mathcal{F}_0$.

Έστω τώρα συνολοσυνάρτηση $P_0:\mathcal{F}_0\to[0,+\infty)$ που ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:

- $0\le P_0(A)\le 1$ για κάθε $A\in\mathcal{F}_0$
- $P_0(\Omega)=1$
- Αν $A_1, A_2, \ldots, A_\kappa\in\mathcal{F}_0$ με $A_m\cap A_n=\varnothing\quad\forall m\neq n$ τότε $P_0\left(\bigcup_{i=1}^{\kappa}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\kappa}P_0(A_i)$
  (απλά προσθετική).
- Αν $\{A_n : n\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{F}_0$ με $A_n\supset A_{n+1}$ και $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$ τότε $\lim_n P_0(A_n)=0$.
  (αξίωμα συνεχείας)

Δείξτε ότι: η συνολοσυνάρτηση είναι σ-προσθετική δηλαδή για $\{A_n : n\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{F}_0$ με $A_m\cap A_n=\varnothing\quad\forall m\neq n$ και $\bigcup_{n=\Lambda}^{\infty}A_n\in\mathcal{F}_0$ ισχύει ότι $P_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P_0(A_n)$.

***Σημείωση.*** Συνεπώς το ζεύγος $(\mathcal{F}_0, P_0)$ ικανοποιεί τις απαιτήσεις του θεωρήματος Καραθεοδωρή.

Έστω τώρα ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega,\mathcal{F},P)$ και ένα ενδεχόμενο $N\in\mathcal{F}$ με $P(N)=0$. Υποθέτουμε τώρα ότι ένα υποσύνολο M του $\Omega$ είναι υποσύνολο του N δηλ. $M\subset N$. Είναι εύλογο να αναμένεται ότι η πιθανότητα του συνόλου M θα είναι μηδέν όμως **δεν** εξασφαλίζεται ότι $M\in\mathcal{F}$ και συνεπώς είναι προβληματική η διατύπωση: $P(M)=0$. Η παρακάτω επεξεργασία είναι σχετική με το πρόβλημα αυτό.

***Ορισμός.*** Ο χ.π. $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ονομάζεται **πλήρης** όταν ικανοποιείται η παρακάτω απαίτηση: $N\in\mathcal{F}$ με $P(N)=0$ και $M\subset N\Rightarrow M\in\mathcal{F}$ (και άρα $P(M)=0$).

***Παράδειγμα 4.3.*** Ο χ.π. $(\mathbb{R},\mathcal{P}(\mathbb{R}),\delta_0)$ όπου $\delta_0$ το μέτρο Dirac στο 0 δηλαδή $\delta_0(A)=\begin{cases}1, & 0\in A\\ 0, & 0\notin A\end{cases}$ είναι προφανώς πλήρης. Αντίθετα ο χ.π. $(\mathbb{R},\mathcal{B},\delta_0)$ δεν είναι πλήρης.
Για να διαπιστωθεί το τελευταίο χρειαζόμαστε το γεγονός ότι η σ-άλγεβρα Borel είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ δηλαδή ότι υπάρχει σύνολο $N\subset\mathbb{R}$ με $N\notin\mathcal{B}$. Πράγματι υπάρχει τέτοιο σύνολο (βλ. [1] σελ. 37 ή [7] σελ. 135) και βέβαια δεν μπορεί να είναι το $\{0\}$. Αν τώρα θεωρήσουμε το σύνολο $M=N$ αν $0\notin N$ ή $M=N\setminus\{0\}$ αν $0\in N$ τότε $M\notin\mathcal{B}$ (γιατί;). Όμως $M\subset\Lambda=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ και $\Lambda\in\mathcal{B}$ με $\delta_0(\Lambda)=0$.

***Παράδειγμα 4.4.*** Ας τοποθετηθούμε στο πλαίσιο και τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Καραθεοδωρή. Έχουμε ορίσει $\mathcal{M}=\{A\subset\Omega : P^*(E)=P^*(E\cap A)+P^*(E\cap A^c)$ για κάθε $E\subset\Omega\}$ όπου $P^*$ το εξωτερικό μέτρο το παραγόμενο από την $P_0$. Όπως ειπώθηκε ήδη η κλάση $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{F}_0$ και ο περιορισμός της συνολοσυνάρτησης $P^*$ στην κλάση $\mathcal{M}$ είναι μέτρο πιθανότητας δηλ. $(\Omega,\mathcal{M},P^*)$ είναι χώρος πιθανότητας και μάλιστα $\mathcal{M}\supset\mathcal{F}=\sigma(\mathcal{F}_0)$. Θα δείξουμε ότι ο χ.π. $(\Omega,\mathcal{M},P^*)$ είναι πλήρης. Πράγματι θεωρούμε ένα σύνολο $N\in\mathcal{M}$ με $P^*(N)=0$ και $M\subset N$. Τώρα για τυχόν $E\subset\Omega$ και λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες της $P^*$ (βλ. Πρόταση 4.1) έχουμε αφενός ότι

$$P^*(E)=P^*\big((E\cap M)\cup(E\cap M^c)\big)\le P^*(E\cap M)+P^*(E\cap M^c)$$

και αφετέρου

$$P^*(E\cap M)+P^*(E\cap M^c)\le P^*(N)+P^*(E)=P^*(E) \text{ και συνεπώς } M\in\mathcal{M}.$$

Ένας χώρος πιθανότητας είναι δυνατόν να επεκταθεί «καταλλήλως» ώστε να καταστεί πλήρης. Σχετική είναι η παρακάτω Πρόταση.

***Πρόταση 4.2.*** Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ χώρος πιθανότητας.
Ορίζουμε $\overline{\mathcal{F}}=\{A\cup N : A\in\mathcal{F}$ και $N\subset F$ με $F\in\mathcal{F}$ και $P(F)=0\}$
και $\overline{P}:\overline{\mathcal{F}}\to[0,1]:\overline{P}(A\cup N)=P(A)$. Τότε η κλάση $\overline{\mathcal{F}}$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{F}$ και η συνολοσυνάρτηση $\overline{P}$ είναι καλώς ορισμένο μέτρο πιθανότητας που επεκτείνει το μέτρο πιθανότητας P. Επί πλέον ο χώρος πιθανότητας $(\Omega,\overline{\mathcal{F}},\overline{P})$ είναι πλήρης και συνιστά μια minimal πλήρη επέκταση του $(\Omega,\mathcal{F},P)$ (αν δηλαδή $(\Omega,\mathcal{F}_1,P_1)$ είναι πλήρης χ.π. με $\mathcal{F}_1\supset\mathcal{F}$ και $P_1=P$ στην $\mathcal{F}$ τότε $\overline{\mathcal{F}}\subset\mathcal{F}_1$ και $\overline{P}=P_1$ στην $\overline{\mathcal{F}}$).

**Απόδειξη**

Θέτουμε $\mathcal{N}=\{N\subset\Omega :$ υπάρχει $F\in\mathcal{F}$ με $N\subset F$ και $P(F)=0\}$. Τότε το τυχόν $E\in\overline{\mathcal{F}}$ γράφεται ως $E=A\cup N$ με $A\in\mathcal{F}$ και $N\in\mathcal{N}$. Όμως $E=A\cup(N\setminus A)$ και αν τεθεί $N_1\equiv N\setminus A$ τότε έχουμε $E=A\cup N_1$ με $A\in\mathcal{F}$, $A\cap N_1=\varnothing$ και $N_1\in\mathcal{N}$ (αφού $N_1=N\setminus A$ και $N\in\mathcal{N}$ θα είναι $N_1\subset F\setminus A\equiv F_1$ όπου $F\in\mathcal{F}$ με $P(F)=0$. Όμως $F_1\in\mathcal{F}$ και $P(F_1)=0$). Ώστε το τυχόν $E\in\overline{\mathcal{F}}$ γράφεται ως $E=A\cup N$ όπου $A\in\mathcal{F}$, $N\in\mathcal{N}$ και $A\cap N=\varnothing$.

**Θα δείξουμε τώρα ότι η $\overline{\mathcal{F}}$ είναι σ-άλγεβρα**

Επειδή $\Omega = \Omega \cup \varnothing$ και $\Omega \in \mathcal{F}$, $\varnothing \in \mathcal{N}$ συμπεραίνουμε ότι $\Omega \in \overline{\mathcal{F}}$. Αν τώρα $E = A \cup N \in \overline{\mathcal{F}}$ και $N \subset F \in \mathcal{F}$ με $P(F) = 0$ τότε (επωφεληθείτε με διαγράμματα) $E^c = (A \cup F)^c \cup \left[(F \setminus N) \cap A^c\right] = B \cup N_1$ όπου $B \equiv (A \cup F)^c$ και $N_1 \equiv (F \setminus N) \cap A^c$. Επειδή $B \in \mathcal{F}$ και $N_1 \subset F$ συμπεραίνουμε ότι $E^c \in \overline{\mathcal{F}}$. Απομένει να δείξουμε ότι αν $\{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{\mathcal{F}}$ τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \overline{\mathcal{F}}$. Πράγματι $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup N_n) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right)$ με $A_n \in \mathcal{F}$ και $N_n \in \mathcal{N}$. Προφανώς $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ και (γιατί;) $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \in \mathcal{N}$.

**Θα δείξουμε ότι η συνολοσυνάρτηση $\overline{\mathrm{P}}$ είναι καλά ορισμένη**

Έστω $E \in \overline{\mathcal{F}}$ και έστω ότι $E = A \cup N_1 = B \cup N_2$ με $A \cap N_1 = \varnothing$, $B \cap N_2 = \varnothing$. Επειδή $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ υπάρχουν $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ με $P(F_1) = P(F_2) = 0$ και $N_1 \subset F_1$, $N_2 \subset F_2$.
Έχουμε τώρα διαδοχικά και λαμβάνοντας υπόψη ότι $N_2 \subset E$
$A \setminus B = A \cap B^c = (E \setminus N_1) \cap (E \setminus N_2)^c = \left(E \cap N_1^c\right) \cap \left(E^c \cup N_2\right) = E \cap N_1^c \cap N_2 =$
$N_2 \setminus N_1 \subset N_2 \subset F_2$ και συνεπώς $P(A \setminus B) = 0$ άρα $P(A) = P(A \cap B)$. Όμοια $P(B) = P(A \cap B)$ και άρα $\overline{P}(E)$ μονοσήμαντα ορισμένο.

**Θα δείξουμε ότι $\overline{\mathrm{P}}$ είναι μέτρο πιθανότητας**

Έστω $\{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{\mathcal{F}}$ με τα σύνολα $E_n$ ξένα μεταξύ τους. Τα σύνολα $E_n$ γράφονται ως $E_n = A_n \cup N_n$ με $A_n \in \mathcal{F}$, $N_n \in \mathcal{N}$ και $A_n \cap N_n = \varnothing$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού τα $E_n$, $n \in \mathbb{N}$ είναι ξένα συμπεραίνουμε ότι τα $A_n$, $n \in \mathbb{N}$ είναι ξένα και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \in \mathcal{N}$ έχουμε διαδοχικά

$$\overline{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \overline{P}\left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right)\right] = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{P}(E_n).$$

Επίσης $\overline{P}(\Omega) = \overline{P}(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) = 1$.

**Θα δείξουμε ότι ο χ.π. $\left(\Omega, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathrm{P}}\right)$ είναι πλήρης**

Έστω $\Lambda \in \overline{\mathcal{F}}$ με $\overline{P}(\Lambda) = 0$ και $M \subset \Lambda$. Τότε $\Lambda = A \cup N$ με $A \in \mathcal{F}$ και $N \in \mathcal{N}$. Αφού από τον ορισμό $\overline{P}(\Lambda) = P(A)$ συμπεραίνω ότι $P(A) = 0$. Έστω τώρα $F \in \mathcal{F}$ με $P(F) = 0$ και $N \subset F$. Τότε $M \subset \Lambda = A \cup N \subset A \cup F$ και $P(A \cup F) = 0$. Άρα $M \in \mathcal{N} \subset \overline{\mathcal{F}}$.

**Θα δείξουμε ότι η επέκταση $\left(\overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathcal{P}}\right)$ είναι minimal**

Έστω $(\mathcal{F}_1, P_1)$ με $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$ και $P_1 = P$ στην $\mathcal{F}$ εις τρόπον ώστε ο χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}_1, P_1)$ είναι πλήρης. Θα δείξουμε ότι $\overline{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}_1$ και $P_1 = \overline{P}$ στην $\overline{\mathcal{F}}$. Πράγματι για τυχόν $E \in \overline{\mathcal{F}}$ είναι $E = A \cup N$, $A \in \mathcal{F}$ και $N \subset F$ με $F \in \mathcal{F}$, $P(F) = 0$. Όμως $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$ και $P_1 = P$ στην $\mathcal{F}$ άρα $F \in \mathcal{F}_1$ και $P_1(F) = 0$. Αφού $(\Omega, \mathcal{F}_1, P_1)$ πλήρης συμπεραίνουμε ότι $N \in \mathcal{F}_1$ και άρα

$P_1(N)=0$. Ώστε $E=A\cup N\in\mathcal{F}_1$ και $\overline{P}(E)=\overline{P}(A\cup N)=P(A)=P_1(A)=P_1(A)+P_1(N)=P_1(A\cup N)=P_1(E)$ ο.ε.δ. ⑤

***Άσκηση 4.6.*** Δείξτε ότι για την κλάση $\mathcal{N}$ που ορίστηκε στην απόδειξη της Πρότασης 4.2 ισχύουν τα ακόλουθα:

$\varnothing\in\mathcal{N}$ και αν $\{N_n : n\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{N}$ τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty}N_n\in\mathcal{N}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}N_n\in\mathcal{N}$.

***Άσκηση 4.7.*** Δείξτε ότι η σ-άλγεβρα $\overline{\mathcal{F}}$ της Πρότασης 4.2 γράφεται επίσης ως $\{A\setminus N : A\in\mathcal{F}, N\in\mathcal{N} \text{ και } N\subset A\}$ ή ακόμα ως $\{A\subset\Omega : \text{υπάρχει } B\in\mathcal{F} \text{ με } A\triangle B\in\mathcal{N}\}$ ή ακόμα $\{A\subset\Omega : \text{υπάρχουν } A_1,A_2\in\mathcal{F} \text{ με } A_1\subset A\subset A_2 \text{ και } P(A_2\setminus A_1)=0\}$.

***Άσκηση 4.8.*** Δείξτε ότι $\overline{\mathcal{F}}=\sigma(\mathcal{F}\cup\mathcal{N})$.

***Άσκηση 4.9.*** Στα πλαίσια του θεωρήματος Καραθεοδωρή θεωρείστε τις επεκτάσεις $(\Omega,\sigma(\mathcal{F}_0),P)$ και $(\Omega,\mathcal{M},P^*)$ που προκύπτουν. Έστω $(\Omega,\overline{\sigma(\mathcal{F}_0)},\overline{P})$ η πλήρωση του χ.π. $(\Omega,\sigma(\mathcal{F}_0),P)$ κατά την Πρόταση 4.2. Δείξτε ότι $\mathcal{M}=\overline{\sigma(\mathcal{F}_0)}$ και $P^*=\overline{P}$. (Θυμηθείτε ότι το μέτρο P είναι ο περιορισμός της $P^*$ στην $\sigma(\mathcal{F}_0)$).

***Σημείωση.*** Η άσκηση 4.9 μας υποδεικνύει έναν ακόμα τρόπο πλήρωσης ενός χ.π. $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Αρκεί να εφαρμόσουμε το Θ. Καραθεοδωρή με $\mathcal{F}_0=\mathcal{F}$ και $P_0=P$. Ο προκύπτων χ.π. $(\Omega,\mathcal{M},P^*)$ είναι πλήρης και ισούται με $(\Omega,\overline{\mathcal{F}},\overline{P})$. Σημειώστε ότι εδώ $\sigma(\mathcal{F}_0)=\sigma(\mathcal{F})=\mathcal{F}$.

## 5. Μέτρα πιθανότητας και συναρτήσεις κατανομής

***Ορισμός.*** Συνάρτηση κατανομής στο $\mathbb{R}$ ονομάζεται οποιαδήποτε συνάρτηση $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:

i) Η F είναι αύξουσα.
ii) Η F είναι δεξιά συνεχής.
iii) $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$ και $\lim_{x\to\infty}F(x)=1$.

Οι επόμενες δύο Προτάσεις αφορούν τη σχέση μεταξύ συναρτήσεων κατανομής και μέτρων πιθανότητας στον $(\mathbb{R},\mathcal{B})$.

***Πρόταση 5.1.*** Έστω $(\mathbb{R},\mathcal{B},P)$ χώρος πιθανότητας. Τότε η συνάρτηση $F(t)=P((-\infty,t])$, $t\in\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση κατανομής.

**Απόδειξη**

Εύκολα επαληθεύεται ότι η F είναι αύξουσα. Θα δείξουμε ότι η F είναι δεξιά συνεχής στο τυχόν $\alpha\in\mathbb{R}$. Επειδή από τον ορισμό της F ισχύει $0\le F(t)\le 1$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$ και αφού είναι αύξουσα υπάρχει το $\lim\limits_{t\to\alpha^+} F(t)$ και λαμβάνοντας υπόψη την Πρόταση 2.2 έχουμε

$$\lim_{t\to\alpha^+} F(t) = \lim_n F\left(\alpha + \frac{1}{n}\right) = \lim_n P\left(\left(-\infty, \alpha + \frac{1}{n}\right]\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\infty, \alpha + \frac{1}{n}\right]\right) = P\left((-\infty, \alpha]\right) = F(\alpha)$$

αφού η ακολουθία $\left(-\infty, \alpha + \frac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα και επιπλέον $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\infty, \alpha + \frac{1}{n}\right] = (-\infty, \alpha]$.

Επειδή η F είναι αύξουσα και φραγμένη υπάρχει το $\lim\limits_{t\to\infty} F(t)$ και είναι

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{n\to\infty} F(n) = \lim_n P\left((-\infty, n]\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty, n]\right) = P(\mathbb{R}) = 1 .$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι $\lim\limits_{t\to-\infty} F(t) = 0$. ⑤

***Πρόταση 5.2.*** Έστω F συνάρτηση κατανομής στο $\mathbb{R}$. Τότε υπάρχει ένα και μόνο μέτρο πιθανότητας P στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ εις τρόπον ώστε $P((\alpha,\beta]) = F(\beta) - F(\alpha)$ για όλα τα $\alpha < \beta$ στο $\mathbb{R}$.

**Απόδειξη**

Στον ημιδακτύλιο $\mathcal{P}^1 = \{(\alpha,\beta] : \alpha < \beta \text{ στο } \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing\}$ ορίζουμε $P_0(\varnothing) = 0$ και $P_0((\alpha,\beta]) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Είναι προφανές ότι $0 \le P_0(A) \le 1$ για κάθε $A \in \mathcal{P}^1$ και θέτοντας $E_n = (-n, n]$ έχουμε ότι $E_n \subset E_{n+1}$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \mathbb{R}$ και $\lim\limits_n P_0(E_n) = \lim\limits_n \left(F(n) - F(-n)\right) = 1$. Προκειμένου να εφαρμοστεί το θεώρημα Καραθεοδωρή στο ζεύγος $\left(\mathcal{P}^1, P_0\right)$ απομένει να δείξουμε ότι:

Αν $I_n = (\alpha_n, \beta_n]$, $n \in \mathbb{N}$ είναι ξένα ανά δύο μεταξύ τους και $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha_n, \beta_n] = (\alpha, \beta] \in \mathcal{P}^1$ τότε ισχύει

$$P_0(\alpha, \beta] = \sum_{n=1}^{\infty} P_0(\alpha_n, \beta_n] . \tag{5.1}$$

Προκειμένου να μην διακοπεί η ροή της απόδειξης θα χρησιμοποιήσουμε δύο ιδιότητες της συνολοσυνάρτησης $P_0$ τις οποίες θα δείξουμε στο τέλος. Οι ιδιότητες αυτές είναι:

Έστω A, $A_1$, $A_2$, ..., $A_\kappa \in \mathcal{P}^1$.

- Αν τα $A_1$, $A_2$, ..., $A_\kappa$ είναι ξένα και $\bigcup\limits_{i=1}^{\kappa} A_i \subset A$ τότε

$$\sum_{i=1}^{\kappa} P_0(A_i) \le P_0(A) . \tag{5.2}$$

- Αν $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\kappa} A_i$ τότε ισχύει

$$P_0(A) \le \sum_{i=1}^{\kappa} P_0(A_i) \tag{5.3}$$

Θα αποδείξουμε τώρα την (5.1). Επειδή για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $\bigcup_{n=1}^{m} (\alpha_n, \beta_n] \subset (\alpha, \beta]$ συμπεραίνουμε λόγω της (5.2) ότι

$$\sum_{n=1}^{m} P_0(\alpha_n, \beta_n] \le P_0(\alpha, \beta] \text{ για κάθε } m \in \mathbb{N}$$

και μεταβαίνοντας στο όριο για $m \to 0$ έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_0(\alpha_n, \beta_n] \le P_0(\alpha, \beta].$$

Έστω τώρα τυχόν $\varepsilon > 0$.

Επειδή η F είναι δεξιά συνεχής στα α, $\beta_1$, $\beta_2$, ... υπάρχουν $\alpha' \in (\alpha, \beta)$ και $\beta'_n > \beta_n$, $n = 1, 2, \ldots$ εις τρόπον ώστε:

$$F(\alpha') < F(\alpha) + \varepsilon 2^{-1} \tag{5.4}$$

$$F(\beta'_n) < F(\beta_n) + \varepsilon 2^{-(n+1)} \tag{5.5}$$

Από την επιλογή των $\alpha'$, $\beta'_n$ είναι προφανές ότι $[\alpha', \beta] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta'_n)$ και συνεπώς υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος διαστήματα $\left(\alpha_{n_\kappa}, \beta'_{n_\kappa}\right)$, $\kappa = 1, 2, \ldots, r$ εις τρόπον ώστε

$$[\alpha', \beta] \subset \bigcup_{\kappa=1}^{r} \left(\alpha_{n_\kappa}, \beta'_{n_\kappa}\right)$$

και άρα

$$(\alpha', \beta] \subset \bigcup_{\kappa=1}^{r} \left(\alpha_{n_\kappa}, \beta'_{n_\kappa}\right].$$

Επικαλούμενοι τώρα την (5.3) έχουμε ότι

$$F(\beta) - F(\alpha') \le \sum_{\kappa=1}^{r} \left(F\left(\beta'_{n_\kappa}\right) - F\left(\alpha_{n_\kappa}\right)\right)$$

και λόγω των (5.4), (5.5)

$$F(\beta) - F(\alpha) - \frac{\varepsilon}{2} \le \sum_{\kappa=1}^{r} \left(F\left(\beta_{n_\kappa}\right) - F\left(\alpha_{n_\kappa}\right) + \varepsilon 2^{-(n_\kappa+1)}\right)$$

και συνεπώς

$$F(\beta) - F(\alpha) - \frac{\varepsilon}{2} \le \sum_{n=1}^{\infty} \left(F(\beta_n) - F(\alpha_n)\right) + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(n+1)}.$$

Από αυτήν λοιπόν την τελευταία εξασφαλίζεται ότι για κάθε $\varepsilon > 0$

$$P_0(\alpha, \beta] \le \sum_{n=1}^{\infty} P_0(\alpha_n, \beta_n] + \varepsilon.$$

Ώστε ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Καραθεοδωρή και συνεπώς υπάρχει μέτρο πιθανότητας P στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ που επεκτείνει την $P_0$ και είναι το μοναδικό με την ιδιότητα $P(\alpha, \beta] = P_0(\alpha, \beta] = F(\beta) - F(\alpha)$.

**Απόδειξη της (5.2)**

Αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο για $A_i=(\gamma_i,\delta_i]$, $i=1,2,\ldots,\kappa$ και $A=(\gamma,\delta]$. Επειδή τα $A_i$ είναι ξένα υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας (αλλιώς αναδιατάσσουμε) ότι

$$\gamma\le\gamma_1<\delta_1\le\gamma_2<\delta_2\le\cdots\le\gamma_\kappa<\delta_\kappa\le\delta .$$

Συνεπώς $\sum_{i=1}^{\kappa}P_0(\gamma_i,\delta_i]=F(\delta_\kappa)-F(\gamma_\kappa)+F(\delta_{\kappa-1})-F(\gamma_{\kappa-1})+\cdots+F(\delta_1)-F(\gamma_1)$.

Επειδή η F είναι αύξουσα $-F(\gamma_\kappa)+F(\delta_{\kappa-1})-F(\gamma_{\kappa-1})+\cdots-F(\gamma_2)+F(\delta_1)\le 0$ και συνεπώς $\sum_{i=1}^{\kappa}P_0(\gamma_i,\delta_i]\le F(\delta_\kappa)-F(\gamma_1)$ και για τον ίδιο λόγο $F(\delta_\kappa)-F(\gamma_1)\le F(\delta)-F(\gamma)=P_0(\gamma,\delta]$.

**Απόδειξη της (5.3)**

Αρκεί να γίνει για $A=(\gamma,\delta]$ και $A_i=(\gamma_i,\delta_i]$.

$$(\gamma,\delta]=\left(\bigcup_{i=1}^{\kappa}(\gamma_i,\delta_i]\right)\cap(\gamma,\delta]=\bigcup_{i=1}^{\kappa}(\gamma_i,\delta_i]\cap(\gamma,\delta]=\bigcup_{i=1}^{\kappa}\Lambda_i$$

όπου $\Lambda_i\in\mathcal{P}^1$. Είναι προφανές ότι

$$\sum_{i=1}^{\kappa}P_0(\gamma_i,\delta_i]\ge\sum_{i=1}^{\kappa}P_0(\Lambda_i). \tag{5.6}$$

Σύμφωνα τώρα με την άσκηση 4.2 είναι δυνατόν να έχουμε $\bigcup_{i=1}^{\kappa}\Lambda_i=\bigcup_{j=1}^{m}N_j$ όπου $N_j\in\mathcal{P}^1$ είναι ξένα μεταξύ τους και το κάθε ένα περιέχεται σε ένα τουλάχιστον $\Lambda_i$. Αν λοιπόν $N_j$, $j\in I_1$ είναι αυτά που περιέχονται στο $\Lambda_1$ θα έχουμε $\Lambda_1\supset\bigcup_{j\in I_1}N_j$ και σύμφωνα με την (5.2) θα ισχύει

$$P_0(\Lambda_1)\ge\sum_{j\in I_1}P_0(N_j).$$

Ομοίως αν $N_j$, $j\in I_2$ είναι αυτά που περιέχονται στο $\Lambda_2$ και δεν περιέχονται στο $\Lambda_1$ θα έχουμε

$$P_0(\Lambda_2)\ge\sum_{j\in I_2}P_0(N_j)\ \text{κ.ο.κ.}$$

Συνεπώς θα έχουμε

$$\sum_{i=1}^{\kappa}P_0(\Lambda_i)\ge\sum_{j=1}^{m}P_0(N_j). \tag{5.7}$$

Λόγω των (5.6) και (5.7) αρκεί να δείξουμε ότι $\sum_{j=1}^{m}P_0(N_j)=P_0(\gamma,\delta]$.

Επειδή $P_0(\varnothing)=0$ δεν είναι βλάβη της γενικότητας να θεωρήσουμε ότι $N_j=(\kappa_j,\lambda_j]\ne\varnothing$ για $j=1,2,\ldots,m$.

Αφού $(\gamma,\delta]=\bigcup_{j=1}^{m}(\kappa_j,\lambda_j]$ και $(\kappa_j,\lambda_j]$ ξένα μεταξύ τους θα είναι $\gamma=\kappa_1<\lambda_1=\kappa_2<\lambda_2=\cdots=\kappa_m<\lambda_m=\delta$ (αλλιώς αναδιατάσσουμε) και συνεπώς

$$\sum_{j=1}^{m} P_0(N_j) = \sum_{j=1}^{m}\left(F(\lambda_j) - F(\kappa_j)\right) = F(\delta) - F(\gamma)$$

αφού $\lambda_{j-1} = \kappa_j$. ⑤

***Πόρισμα.*** Υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ μέτρων πιθανότητας στο $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ και συναρτήσεων κατανομής στο $\mathbb{R}$. Ένα ζεύγος αντίστοιχων $(P,F)$ προσδιορίζεται από την

$$P\left((\alpha,\beta]\right) = F(\beta) - F(\alpha) \text{ για όλα τα } \alpha < \beta \text{ στο } \mathbb{R}.$$

***Παράδειγμα 5.1.*** Έστω η συνάρτηση $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ορίζεται ως ακολούθως (βεβαιωθείτε ότι είναι συνάρτηση κατανομής)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Για το μέτρο πιθανότητας P που αντιστοιχεί στην F διαπιστώνουμε τα ακόλουθα: $P(-\infty,0] = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(-n,0]\right) = \lim_n P(-n,0] = \lim_n\left(F(0)-F(-n)\right) = 0$ και επίσης $P(1,\infty) = P\left(\bigcup_{n=2}^{\infty}(1,n]\right) = \lim_n P(1,n] = \lim_n\left(F(n)-F(1)\right) = 0$. Συνεπώς ισχύει ότι:

$$P\left((-\infty,0]\cup(1,\infty)\right) = 0$$

$$\text{και } P(\alpha,\beta] = \beta - \alpha \text{ για } (\alpha,\beta] \subset (0,1].$$

Αν τώρα θέσουμε $\Omega_0 = (0,1]$ και $\mathcal{B}_0 = \left\{B \subset (0,1] : B \in \mathcal{B}^1\right\}$ (βλ. Άσκ. 2.1) αποκτούμε τον χ.π. $(\Omega_0,\mathcal{B}_0,\lambda)$ όπου για το μέτρο πιθανότητας λ ισχύει: $\lambda(\alpha,\beta] = P(\alpha,\beta] = \beta - \alpha$, είναι δηλαδή το μέτρο Lebesque στο (0,1].

***Παράδειγμα 5.2.*** Έστω η συνάρτηση $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ορίζεται ως ακολούθως:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \ge c \end{cases}$$

όπου c πραγματικός αριθμός. Το μέτρο πιθανότητας που αντιστοιχεί στην F είναι το μέτρο Dirac $\delta_c$. Πράγματι διαπιστώνουμε αμέσως ότι $\delta_c\left((\alpha,\beta]\right) = F(\beta) - F(\alpha)$ για όλα τα $\alpha < \beta$.

***Άσκηση 5.1.*** Έστω η συνάρτηση $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ορίζετια ως ακολούθως: $c_1$, $c_2$, κ είναι πραγματικοί αριθμοί με $c_1 < c_2$, $\kappa \in (0,1)$ και $F(x) = 0$ όταν $x < c_1$, $F(x) = \kappa$ όταν $c_1 \le x < c_2$, $F(x) = 1$ όταν $x \ge c_2$. Δείξτε ότι η F είναι συνάρτηση κατανομής και βρείτε το μέτρο πιθανότητας που παράγει.

***Άσκηση 5.2.*** Έστω χ.π. $(\mathbb{R},\mathcal{B},P)$ και F η συνάρτηση κατανομής που αντιστοιχεί στο μέτρο πιθανότητας P. Δείξτε ότι $P(\{c\}) = F(c) - F(c-)$ και συμπεράνετε ότι: η F είναι συνεχής στο c όταν και μόνο όταν $P(\{c\}) = 0$.

***Άσκηση 5.3.*** Έστω χ.π. $(\mathbb{R},\mathcal{B},P)$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει σύνολο $D=\{x_1<x_2<\cdots\}$ με $P(D)=1$. Βρείτε την F που αντιστοιχεί στο μέτρο πιθανότητας P.

Έστω F μια συνάρτηση κατανομής και D το σύνολο των σημείων ασυνέχειάς της. Το σύνολο D μπορεί να είναι το $\varnothing$ αλλά είναι γνωστό ότι σε κάθε περίπτωση είναι το πολύ αριθμήσιμο (βλ. [4]). Ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

***Πρόταση 5.3.*** Η συνάρτηση κατανομής F αναλύεται κατά μοναδικό τρόπο ως ακολούθως

$$F(t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx+\sum_{c\in D}\big(F(c)-F(c-)\big)H_c(t)+G(t),\ t\in\mathbb{R}$$

όπου i) Η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση Borel* και είναι μη-αρνητική σχεδόν παντού για το μέτρο Lebesque (μήκος) στο $\mathbb{R}$.

ii) $H_c(t)=\begin{cases}0, & t<c\\ 1, & t\ge c\end{cases}$

και iii) Η συνάρτηση $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι αύξουσα, συνεχής και σχεδόν παντού για το μέτρο Lebesque στο $\mathbb{R}$ ισχύει ότι $G'=0$.

Για την απόδειξη της Πρότασης αυτής παραπέμπουμε στο [8] ΚΕΦ. 9. Ανάλογα με την ειδική μορφή της παραπάνω ανάλυσης οι συναρτήσεις κατανομής κατατάσσονται όπως παρακάτω:

α) Αν $D=\varnothing$ και $G\equiv 0$ τότε η σ.κ. F λέγεται ότι είναι **απολύτως συνεχής**. Στην περίπτωση αυτή είναι $F(t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$ και η συνάρτηση f λέγεται **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** (σ.π.π.) οφείλει δε να ικανοποιεί επιπλέον την απαίτηση $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$ (γιατί;).

β) Αν $f\equiv 0$ και $G\equiv 0$ τότε η σ.κ. F λέγεται **διακριτή** και προφανώς $D\neq\varnothing$. Η F γράφεται $F(t)=\sum_{c\in D}\big(F(c)-F(c-)\big)H(t)=\sum_{c\le t}\big(F(c)-F(c-)\big)$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$ (επαληθεύστε το) και από εδώ συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{c\in D}\big(F(c)-F(c-)\big)=1.$$

Αν τώρα P είναι το μέτρο πιθανότητς που αντιστοιχεί στην F τότε (βλ. Άσκ. 5.2) $P(\{c\})=F(c)-F(c-)$ και άρα $P(D)=P\left(\bigcup_{c\in D}\{c\}\right)=\sum_{c\in D}P(\{c\})=1$.

γ) Αν $G\equiv 0$ και $D\neq\varnothing$ και $f\not\equiv 0$ η σ.κ. F λέγεται **μικτή** και στην περίπτωση αυτή είναι $F(t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx+\sum_{c\in D}\big(F(c)-F(c-)\big)H(t)$, $t\in\mathbb{R}$. Προφανώς $\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx=\alpha<1$ και θέτοντας $F_1(t)=\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$, $F_2(t)=\frac{1}{1-\alpha}\sum_{c\in D}\big(F(c)-F(c-)\big)H(t)$ έχουμε ότι $F=\alpha F_1+(1-\alpha)F_2$ δηλαδή η F γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός μιας απολύτως συνεχούς και μιας διακριτής.

δ) Αν $f\equiv 0$ και $G\not\equiv 0$ η F λέγεται **μη-ομαλή** (singular). Για μια τέτοια περίπτωση δες στο [1] σελ. 361.

---

* Δες ΚΕΦ. ΙΙ.

## 6. Ανεξαρτησία Ενδεχομένων

Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ χ.π. και $A,B\in\mathcal{F}$. Τα A, B λέγονται ανεξάρτητα όταν $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ και τότε επαληθεύεται εύκολα ότι ισχύουν επίσης οι σχέσεις: $P(A^c\cap B)=P(A^c)P(B)$, $P(A\cap B^c)=P(A)P(B^c)$ και $P(A^c\cap B^c)=P(A^c)P(B^c)$. Συνεπώς μπροούμε να γράψουμε ότι ισχύει

$$P(\Lambda\cap M)=P(\Lambda)P(M)$$

για οποιαδήποτε σύνολα Λ, Μ από τις σ-άλγεβρες $\{\varnothing,\Omega,A,A^c\}$ και $\{\varnothing,\Omega,B,B^c\}$ αντίστοιχα. Η παρατήρηση αυτή αποτελεί ένα προοίμιο για τη γενίκευση της έννοιας της ανεξαρτησίας που επιχειρείται στον παρακάτω Ορισμό.

***Ορισμός.*** Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ χ.π. και $\mathcal{C}_i$, $i\in I$ κλάσεις υποσυνόλων του Ω με $\mathcal{C}_i\subset\mathcal{F}$ για κάθε $i\in I$. Οι κλάσεις $\mathcal{C}_i$, $i\in I$ λέγονται **ανεξάρτητες** όταν και μόνο όταν: για οποιοδήποτε $n\in\mathbb{N}$ και οποιαδήποτε ενδεχόμενα $A_{i_1}\in\mathcal{C}_{i_1}$, $A_{i_2}\in\mathcal{C}_{i_2}$, ..., $A_{i_n}\in\mathcal{C}_{i_n}$ ισχύει

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_{i_k}\right)=\prod_{k=1}^{n}P\left(A_{i_k}\right).$$

Τα ενδεχόμενα $\{\Lambda_i, i\in I\}\subset\mathcal{F}$ λέγονται **ανεξάρτητα** όταν και μόνο όταν οι κλάσεις $\mathcal{C}_i=\{\Lambda_i\}$, $i\in I$ είναι ανεξάρτητες.

***Παρατήρηση 6.1.*** Είναι φανερό ότι οι κλάσεις $\mathcal{C}_i$, $i\in I$ είναι ανεξάρτητες όταν και μόνο όταν οποιεσδήποτε $\mathcal{C}_{i_1}$, $\mathcal{C}_{i_2}$, ..., $\mathcal{C}_{i_k}$ από αυτές είναι ανεξάρτητες. Επίσης είναι φανερό ότι αν οι κλάσεις $\mathcal{C}_i$, $i\in I$ είναι ανεξάρτητες και $\mathcal{A}_i$, $i\in I$ είναι μη κενές κλάσεις με $\mathcal{A}_i\subset\mathcal{C}_i$ για κάθε $i\in I$ τότε οι κλάσεις $\mathcal{A}_i$, $i\in I$ είναι ανεξάρτητες.

Η επόμενη Πρόταση συνιστά ένα «οικονομικό» κριτήριο ελέγχου της ανεξαρτησίας.

***Πρόταση 6.1.*** Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ χώρος πιθανότητας και κλάσεις $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2\subset\mathcal{F}$ κλειστές ως προς την πεπερασμένη τομή όπως λέγεται δηλαδή: αν $A,B\in\mathcal{C}_i$ τότε $A\cap B\in\mathcal{C}_i$ ($i=1,2$). Αν οι κλάσεις $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ είναι ανεξάρτητες τότε οι σ-άλγεβρες $\sigma(\mathcal{C}_1)$, $\sigma(\mathcal{C}_2)$ είναι ανεξάρτητες.

**Απόδειξη**

Έστω τυχόν $E\in\mathcal{C}_1$ και θεωρούμε την κλάση

$$\mathcal{A}=\{A\in\mathcal{F}:P(E\cap A)=P(E)P(A)\}.$$

Επειδή $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ ανεξάρτητες ισχύει $P(E\cap A)=P(E)P(A)$ για κάθε $A\in\mathcal{C}_2$ και συνεπώς $\mathcal{C}_2\subset\mathcal{A}$. Θα δείξουμε τώρα ότι η κλάση $\mathcal{A}$ είναι ένα σύστημα Dynkin. Πράγματι $P(\Omega\cap E)=P(\Omega)P(E)$ και άρα $\Omega\in\mathcal{A}$. Έστω τώρα $A,B\in\mathcal{A}$ με $A\subset B$. Τότε θα είναι

$$P(E\cap B)=P(E)P(B)$$
$$P(E\cap A)=P(E)P(A)$$

και αφαιρώντας κατά μέλη σε συνδυασμό με τις βασικές ιδιότητες της πιθανότητας έχουμε

$$P(E\cap B\setminus E\cap A)=P(E)P(B\setminus A).$$

Όμως $E\cap B\setminus E\cap A=(B\setminus A)\cap E$ και άρα $B\setminus A\in\mathcal{A}$. Όμοια αν $\{A_n : n\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{A}$ ξένα μεταξύ τους έχουμε

$$P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap E\right)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap E)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n\cap E)=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)P(E)=P(E)\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=P(E)\cdot P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)$$

και συνεπώς $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{A}$. Ώστε η κλάση $\mathcal{A}$ είναι ένα σύστημα Dynkin που περιέχει την $\mathcal{C}_2$ και συνεπώς $d(\mathcal{C}_2)\subset\mathcal{A}$. Όμως η $\mathcal{C}_2$ είναι κλειστή στην πεπερασμένη τομή και άρα κατά την Πρόταση 3.2 είναι $d(\mathcal{C}_2)=\sigma(\mathcal{C}_2)$ και τελικά $\sigma(\mathcal{C}_2)\subset\mathcal{A}$. Ώστε μέχρι τώρα δείξαμε ότι για κάθε $E\in\mathcal{C}_1$ και κάθε $A\in\sigma(\mathcal{C}_2)$ ισχύει

$$P(E\cap A)=P(E)P(A). \tag{6.1}$$

Θεωρούμε τώρα τυχόν $A\in\sigma(\mathcal{C}_2)$ και την κλάση

$$\mathcal{A}_1=\{B\in\mathcal{F}: P(B\cap A)=P(B)P(A)\}.$$

Αφού η (6.1) ισχύει για κάθε $E\in\mathcal{C}_1$ συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{C}_1\subset\mathcal{A}_1$ και με τον ίδιο όπως παραπάνω τρόπο αποδεικνύεται ότι η κλάση $\mathcal{A}_1$ είναι σύστημα Dynkin και άρα $d(\mathcal{C}_1)\subset\mathcal{A}_1$ και άρα $\sigma(\mathcal{C}_1)\subset\mathcal{A}_1$. Ώστε η (6.1) ισχύει για όλα τα $E\in\sigma(\mathcal{C}_1)$ και $A\in\sigma(\mathcal{C}_2)$. ⑤

***Παρατήρηση 6.2.*** Επαναλαμβάνοντας επαγωγικά την παραπάνω απόδειξη βεβαιωνόμαστε ότι η Πρόταση 6.1 παραμένει αληθής για $\kappa>2$ ανεξάρτητες κλάσεις $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_\kappa$ κλειστές ως προς την πεπερασμένη τομή. Λαμβάνοντας τώρα υπόψη την Παρατήρηση 6.1 συμπεραίνουμε ότι η Πρόταση 6.1 ισχύει για οποιαδήποτε οικογένεια ανεξάρτητων κλάσεων $\mathcal{C}_i, i\in I$ κλειστών στην πεπερασμένη τομή και ως πόρισμα έχουμε ότι αν $\{A_i, i\in I\}\subset\mathcal{F}$ ανεξάρτητα τότε οι κλάσεις $\{\varnothing,\Omega,A_i,A_i^c\}$, $i\in I$ είναι ανεξάρτητες.

***Άσκηση 6.1.*** Έστω ότι οι κλάσεις $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_m$ είναι ανεξάρτητες και κάθε μία είναι κλειστή ως προς την πεπερασμένη τομή. Έστω $\mathcal{F}_1=\sigma(\mathcal{C}_1\cup\cdots\cup\mathcal{C}_\kappa)$, $\kappa<m$ και $\mathcal{F}_2=\sigma(\mathcal{C}_{\kappa+1}\cup\cdots\cup\mathcal{C}_m)$. Δείξτε ότι οι σ-άλγεβρες $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ είναι ανεξάρτητες. Γενικεύστε.

***Άσκηση 6.2.*** Έστω ότι τα ενδεχόμενα $\{A_n, n\in\mathbb{N}\}$ είναι ανεξάρτητα και $\mathbb{N}=\mathbb{N}_1\cup\mathbb{N}_2$ όπου $\mathbb{N}_1$, $\mathbb{N}_2$ ξένα μεταξύ τους. Θέτουμε $\mathcal{F}_1=\sigma(\{A_n : n\in\mathbb{N}_1\})$ και $\mathcal{F}_2=\sigma(\{A_n : n\in\mathbb{N}_2\})$. Δείξτε ότι $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ είναι ανεξάρτητες.

***Παράδειγμα 6.1.*** Έστω π ένα πείραμα τύχης με χ.π. $(W,\mathcal{A},Q)$. Θα εξετάσουμε το πείραμα τύχης Π που συνίσταται από δύο διαδοχικές εκτελέσεις του πειράματος π. Ένας εύλογος δ.χ. για το πείραμα Π είναι το σύνολο $\Omega=W\times W\equiv\{(\omega_1,\omega_2):\omega_1,\omega_2\in W\}$.

Θεωρούμε την κλάση υποσυνόλων του $\Omega$ που είναι $\mathcal{C} = \{A \times B : A, B \in \mathcal{A}\}$. Εύκολα διαπιστώνεται ότι η κλάση $\mathcal{C}$ είναι ημιάλγεβρα και η συνολοσυνάρτηση $P_0 : \mathcal{C} \to [0,1]$ που ορίζεται από την

$$P_0(A \times B) = Q(A)Q(B) \tag{6.2}$$

αποδεικνύεται (βλ. [1] ή [3] π.χ.) ότι ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Καραθεοδωρή. Συνεπώς υπάρχει ένα και μόνο μέτρο πιθανότητας P ορισμένο στην σ-άλγεβρα $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$ που επεκτείνει την $P_0$. Με αυτό τον τρόπο κατασκευάζεται ο χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ όπου $\Omega = W \times W$, $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$ και P είναι το μοναδικό μέτρο πιθανότητας που ικανοποιεί την

$$P(A \times B) = Q(A)Q(B).$$

Η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ λέγεται **σ-άλγεβρα γινόμενο** και συμβολικά γράφεται $\mathcal{F} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ και αντίστοιχα το μέτρο P ονομάζεται **μέτρο γινόμενο** και γράφεται $P = Q \otimes Q$. Ο χώρος $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ είναι ο κατάλληλος για το πείραμα τύχης Π: δύο διαδοχικές επαναλήψεις του π.τ. π. Ας είναι τώρα $A, B \in \mathcal{A}$ δύο ενδεχόμενα. Τα καρτεσιανά γινόμενα $A_1 = A \times W$ και $A_2 = W \times B$ είναι ενδεχόμενα του χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και η προφανής ερμηνεία τους είναι η ακόλουθη: Το $A_1 = A \times W$ πραγματοποιείται όταν και μόνο όταν το Α πραγματοποιείται στην πρώτη εκτέλεση του π και το $A_2 = W \times B$ πραγματοποιείται όταν και μόνο όταν το Β πραγματοποιείται στην δεύτερη εκτέλεση του π. θα δείξουμε ότι τα $A_1$, $A_2$ είναι ανεξάρτητα. Πράγματι

$$P(A_1 \cap A_2) = P((A \times W) \cap (W \times B)) = P(A \times B) = Q(A) \cdot Q(B) =$$
$$Q(A) \cdot Q(W) \cdot Q(W) \cdot Q(B) = P(A \times W) P(W \times B) = P(A_1) \cdot P(A_2).$$

Η επέκταση των παραπάνω σε περισσότερες από δύο επαναλήψεις είναι εύκολη.

***Παράδειγμα 6.2.*** Ένα πείραμα τύχης π με χ.π. $(W, \mathcal{A}, Q)$ επαναλαμβάνεται άπειρες φορές. Θέτουμε $\Omega = \prod_{n=1}^{\infty} W = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots) : \omega_i \in W\}$ και ορίζουμε $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$ όπου $\mathcal{C}$ η κλάση υποσυνόλων της μορφής $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m \times \prod_{i=m+1}^{\infty} W$ με $m \in \mathbb{N}$ και $A_i \in \mathcal{A}$. Τότε αποδεικνύεται (βλ. [3] π.χ.) ότι υπάρχει ένα και μόνο μέτρο P στον $(\Omega, \mathcal{F})$ που ικανοποιεί την απαίτηση

$$P\left(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m \times \prod_{i=m+1}^{\infty} W\right) = Q(A_1)Q(A_2)\cdots Q(A_m) \tag{6.3}$$

για οποιαδήποτε $m \in \mathbb{N}$ και $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{A}$.

Έστω τώρα $A, B, \Gamma, \Delta \in \mathcal{A}$ και θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$A_1 = \prod_{i=1}^{\nu} W \times A \times B \times \prod_{i=\nu+3}^{\infty} W, \; A_2 = \prod_{i=1}^{\nu+3} W \times \Gamma \times \Delta \times \prod_{i=\nu+6}^{\infty} W.$$

Η ερμηνεία είναι προφανής. Το ενδεχόμενο $A_1$ του χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ πραγματοποιείται όταν και μόνο όταν τα Α, Β πραγματοποιούνται στην $\nu+1$, $\nu+2$ εκτέλεση του π αντίστοιχα. Ανάλογη ερμηνεία έχουμε για το $A_2$. Κατά την σχέση (6.3) έχουμε τώρα

$$P(A_1) = Q(A)Q(B), \; P(A_2) = Q(\Gamma)Q(\Delta).$$

Εξάλλου $A_1 \cap A_2 = \prod_{i=1}^{\nu} W \times A \times B \times \Gamma \times \Delta \times \prod_{i=\nu+6}^{\infty} W$ και συνεπώς πάλι κατά την (6.3) έχουμε

$$P(A_1 \cap A_2) = Q(A)Q(B)Q(\Gamma)Q(\Delta).$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι $A_1$, $A_2$ ανεξάρτητα.

***Πρόταση 6.2.*** ($2^{o}$ Λήμμα των Borel-Cantelli)
Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π. και $\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$ ανεξάρτητα ενδεχόμενα εις τρόπον ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$. Τότε

$$P(\limsup A_n) = 1.$$

**Απόδειξη**
Επειδή τα $A_n$, $n \in \mathbb{N}$ είναι ανεξάρτητα ισχύει

$$P\left(\bigcap_{n=m}^{\ell} A_n^c\right) = \prod_{n=m}^{\ell} P\left(A_n^c\right) = \prod_{n=m}^{\ell} \left(1 - P(A_n)\right). \tag{6.4}$$

Έστω $A = \limsup A_n \equiv \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$.

Τότε $A^c = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c$ και συνεπώς

$$1 - P(A) = P\left(A^c\right) = \lim_{m} P\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c\right) = \lim_{m} \lim_{\ell} P\left(\bigcap_{n=m}^{\ell} A_n^c\right)$$

και λόγω της (6.4) έχουμε ότι

$$1 - P(A) = \lim_{m} \lim_{\ell} \prod_{n=m}^{\ell} \left(1 - P(A_n)\right).$$

Όμως $1 - P(A_n) \le e^{-P(A_n)}$ και συνεπώς για κάθε $\ell > m$

$$\prod_{n=m}^{\ell} \left(1 - P(A_n)\right) \le e^{-\sum_{n=m}^{\ell} P(A_n)}.$$

Επειδή από υπόθεση $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$ θα είναι και $\lim_{\ell} \sum_{n=m}^{\ell} P(A_n) = +\infty$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και άρα

$$\lim_{\ell} \prod_{n=m}^{\ell} \left(1 - P(A_n)\right) = 0.$$

Αυτό αρκεί για να συμπεράνουμε ότι $P(A) = 1$. ⑤

***Παράδειγμα 6.3.*** Έστω π ένα πείραμα τύχης με δύο δυνατά ισοπίθανα αποτελέσματα 1 και 0. Ο αντίστοιχος χ.π. είναι $(\{0,1\}, \mathcal{A}, Q)$ όπου $\mathcal{A} = \{\varnothing, \{0,1\}, \{0\}, \{1\}\}$ και το μέτρο Q προσδιορίζεται από τις $Q(\{0\}) = Q(\{1\}) = \frac{1}{2}$. Επαναλαμβάνουμε το πείραμα τύχης επ' άπειρον και ονομάζουμε Π το πείραμα τύχης των άπειρων επαναλήψεων του π. Τοποθετούμενοι στα πλαίσια του Παραδείγματος 6.2 ο χώρος πιθανότητας του Π είναι ο

$(\Omega,\mathcal{F},P)$ όπου $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}\{0,1\}$, $\mathcal{F}$ είναι η $\sigma(\mathcal{C})$ όπου $\mathcal{C}$ η κλάση υποσυνόλων της μορφής $A_1\times A_2\times\cdots\times A_m\times\prod_{i=m+1}^{\infty}\{0,1\}$ με $m\in\mathbb{N}$ και $A_i\in\mathcal{A}$ και το μέτρο πιθανότητας P το μοναδικό που ικανοποιεί την απαίτηση

$$P\left(A_1\times A_2\times\cdots\times A_m\times\prod_{i=m+1}^{\infty}\{0,1\}\right)=Q(A_1)Q(A_2)\cdots Q(A_m). \tag{6.5}$$

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$A_1=\{1\}\times\{1\}\times\{0\}\times\prod_{i=4}^{\infty}\{0,1\}$$

$$A_2=\{0,1\}\times\{1\}\times\{1\}\times\{0\}\times\prod_{i=5}^{\infty}\{0,1\}$$

.........................................................

$$A_n=\prod_{i=1}^{n-1}\{0,1\}\times\{1\}\times\{1\}\times\{0\}\times\prod_{i=n+3}^{\infty}\{0,1\}.$$

Η ερμηνεία είναι προφανής: Το $A_n$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται δύο ακριβώς διαδοχικές «επιτυχίες» 1 αρχής γενομένης από την n-οστή εκτέλεση. Όπως στο παράδειγμα 6.2 διαπιστώνουμε ότι τα $A_1$, $A_4$, $A_7$, ... είναι ανεξάρτητα και με βάση την (6.5) υπολογίζουμε ότι

$$P(A_{3k+1})=\frac{1}{8} \text{ για } k=0,1,2,\ldots$$

Συνεπώς $\sum_{k=0}^{\infty}P(A_{3k+1})=+\infty$ και άρα κατά το 2$^{\text{ο}}$ Λήμμα Borel-Cantelli ισχύει $P(\limsup A_{3k+1})=1$. Όμως $\limsup A_{3k+1}\subset\limsup A_n$ και συνεπώς

$$P(\limsup A_n)=1.$$

Η ερμηνεία του αποτελέσματος είναι προφανής: Με πιθανότητα 1 θα πραγματοποιηθούν απείρως συχνά 2 ακριβώς διαδοχικές «επιτυχίες» 1. Στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα θα καταλήξουμε αν απαιτηθούν k ακριβώς διαδοχικές «επιτυχίες» με $k>2$.

***Σημείωση.*** Υπάρχει και ένας άλλος τρόπος πιθανοθεωρητικής αναπαράστασης στο Παράδειγμα 6.3. Το πείραμα Π της επ' άπειρον επανάληψης του πειράματος τύχης $(\{0,1\},\mathcal{A},Q)$ μπορεί να αποδοθεί πιθανοθεωρητικά με τον χ.π. $(\Omega=(0,1],\mathcal{B}_0,P)$ όπου $\mathcal{B}_0=\{B\subset(0,1]:B\in\mathcal{B}^1\}$ και $P=\lambda$ το μέτρο Lebesque (βλ. Παράδ. 5.1). Για να γίνει κατανοητή αυτή η δυνατότητα οφείλουμε να γνωρίζουμε ότι κάθε αριθμός $\omega\in(0,1]$ αναπαρίσταται δυαδικά δηλαδή $\omega=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d_i}{2^i}=0,d_1d_2\cdots$ όπου $d_i=0$ ή 1. Αν μάλιστα απαιτηθεί $d_i\neq0$ για απείρως πολλά i τότε η αναπαράσταση είναι μοναδική (αυτό διότι κάποιοι αριθμοί έχουν δύο αναπαραστάσεις π.χ. $\frac{1}{2}=0,1000\cdots=0,01111\cdots$). Ώστε κάθε αριθμός $\omega\in(0,1]$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως

$$\omega=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d_i(\omega)}{2^i}=0,d_1(\omega)d_2(\omega)\cdots$$

όπου $d_i(\omega)=0$ ή 1 και $d_i(\omega)\neq 0$ για άπειρα $i\in\mathbb{N}$. Συνεπώς κάθε $\omega\in(0,1]$ μπορεί να ερμηνευτεί σαν ένα αποτέλεσμα του πειράματος Π, συγκεκριμένα το αποτέλεσμα $(d_1(\omega),d_2(\omega),\cdots)\in\prod_{i=1}^{\infty}\{0,1\}$.

Ας θεωρήσουμε τώρα το υποσύνολο $A=\{\omega\in(0,1]:d_1(\omega)=1\}$. Πρόκειται για το σύνολο όλων των αριθμών του $(0,1]$ της μορφής $0,1\alpha_1\alpha_2\cdots$ και προφανώς αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο: «επιτυχία» 1 στην πρώτη εκτέλεση. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι είναι $A=\left(\frac{1}{2},1\right]$. (Επειδή στην αποδεκτή αναπαράσταση $\frac{1}{2}=0,01111\cdots$ συμπεραίνουμε ότι $\frac{1}{2}\notin A$) και συνεπώς $P(A)=\lambda(A)=\frac{1}{2}$. Γενικά ισχύει:

$$B=\{\omega\in(0,1]:d_1(\omega)=x_1,\ldots,d_k(\omega)=x_k\}=\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{2^i},\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{2^i}+\frac{1}{2^k}\right] \text{ και άρα } P(B)=\frac{1}{2^k}.$$

***Άσκηση 6.3.*** Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ χώρος πιθανότητας και $\{A_n,n\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{F}$ ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Δείξτε ότι $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\prod_{n=1}^{\infty}P(A_n)$ και ότι $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=1-\prod_{n=1}^{\infty}(1-P(A_n))$.

***Άσκηση 6.4.*** Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ χ.π. και $\{A_n,n\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{F}$ ανεξάρτητα. Υποθέτουμε ότι $P(A_n)<1$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και ότι $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=1$. Δείξτε ότι $P(\limsup A_n)=1$.

***Άσκηση 6.5.*** Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ χ.π. και $\{A_n,n\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{F}$ ενδεχόμενα για τα οποία ισχύουν: $P(A_n)=o(1)$ και $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n\setminus A_{n+1})<+\infty$. Δείξτε ότι $P(\limsup A_n)=0$.

Στον επίλογο του Κεφαλαίου αυτού επιστρέφουμε σε ζητήματα που παραθέσαμε στην Εισαγωγή του. Τοποθετούμενοι στα πλαίσια του Παραδείγματος 5.1 και εξετάζοντας λεπτομερέστερα το θεώρημα Καραθεοδωρή στο οποίο βασίζεται συμπεραίνουμε ότι το μέτρο Lebesque λ στο (0,1] μπορεί να οριστεί σε μία άλγεβρα $\mathcal{M}_0$ υποσυνόλων του (0,1] που είναι κατ' αρχήν ευρύτερη της $\mathcal{B}_0=\{B\subset(0,1]:B\in\mathcal{B}^1\}$. Μάλιστα (βλ. Άσκ. 4.9) $\mathcal{M}_0=\overline{\mathcal{B}}_0$ όπου $\overline{\mathcal{B}}_0$ η πλήρωση της $\mathcal{B}_0$ για το μέτρο λ. Πόσο ευρεία είναι η σ-άλγεβρα $\mathcal{M}_0$; Γι' αυτό το ζήτημα μεταξύ άλλων είναι γνωστά τα παρακάτω:

- Η σ-άλγεβρα $\mathcal{M}_0$ δεν συμπίπτει με την $\mathcal{P}((0,1])$, υπάρχει δηλαδή σύνολο $A\subset(0,1]$ με $A\notin\mathcal{M}_0$.
- $\text{card}\mathcal{M}_0=2^c$ και επειδή $\text{card}\mathcal{B}_0=c$ συμπεραίνουμε εμμέσως ότι υπάρχει $B\in\mathcal{M}_0$ με $B\notin\mathcal{B}_0$. Είναι δυνατό να κατασκευαστεί ένα τέτοιο σύνολο B.

Αποδείξεις για τα παραπάνω και άλλα συναφή ζητήματα μπορούν να βρεθούν στο [7] σελ. 132-137.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

## 1. Η έννοια της τυχαίας μεταβλητής

Συχνά αυτό το οποίο παρατηρούμε σε ένα πείραμα τύχης δεν είναι το όποιο αποτέλεσμα $\omega \in \Omega$ αλλά μια μαθηματική ποσότητα X εξαρτώμενη από το αποτέλεσμα $\omega \in \Omega$. Ας εξετάσουμε π.χ. το πείραμα τύχης που συνίσταται στη ρίψη δύο ζαριών διαφορετικού χρώματος με δ.χ. $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1, \omega_2 \text{ οι ενδείξεις των δύο ζαριών αντίστοιχα}\}$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι αυτό το οποίο ενδιαφέρει δεν είναι οι ενδείξεις $(\omega_1, \omega_2)$ μιας ρίψης αλλά το άθροισμά τους $\omega_1 + \omega_2$. Σ' αυτή την περίπτωση στο κάθε $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ αντιστοιχίζεται ο αριθμός $X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$ δηλαδή ορίζεται η συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ με $X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2$. Έτσι π.χ. το ενδεχόμενο: άθροισμα 5 που είναι το υποσύνολο $A = \{(3,2),(2,3),(4,1),(1,4)\}$ γράφεται και ως $\{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega : X(\omega_1, \omega_2) = 5\}$ και γενικά μπορούμε να ειπούμε ότι οι ερωτήσεις μας σχετικά με ενδεχόμενα μετασχηματίζονται σε ερωτήσεις σχετικές με τιμές της συνάρτησης X. Τα πλεονεκτήματα ευελιξίας είναι προφανή αφού οι συναρτήσεις επιδέχονται αριθμητικές πράξεις.

***Ορισμός.*** Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας. Ονομάζεται **τυχαία μεταβλητή** με τιμές στο $\mathbb{R}^n$ μια συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί την απαίτηση:

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \text{ για κάθε } B \in \mathcal{B}^n \tag{1.1}$$

***Παρατήρηση 1.1.*** Το σύνολο $X^{-1}(B)$ που εμφανίζεται στην (1.1) είναι εξ ορισμού $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$. Το σύνολο αυτό ονομάζεται αντίστροφη εικόνα του B μέσω της X και **δεν** αναφέρεται σε αντίστροφη συνάρτηση αφού δεν γνωρίζουμε αν η X αντιστρέφεται. Φαίνεται απαραίτητο να υπενθυμίσουμε μερικές βασικές ιδιότητες του συμβόλου $X^{-1}(B)$.

i) $X^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, $X^{-1}(\mathbb{R}^n) = \Omega$

ii) $X^{-1}(A \setminus B) = X^{-1}(A) \setminus X^{-1}(B)$

iii) $X^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} X^{-1}(A_i)$

iv) $X^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} X^{-1}(A_i)$.

***Παρατήρηση 1.2.*** Όπως ειπώθηκε ήδη, ερωτήσεις αναφερόμενες στο εξεταζόμενο πείραμα μπορούν να διατυπωθούν ως ερωτήσεις σχετικά με τις τιμές της X π.χ. ποια είναι η πιθανότητα ώστε οι τιμές της X να βρίσκονται σε δοσμένο υποσύνολο $B \in \mathcal{B}^n$ του $\mathbb{R}^n$; Πρόκειται προφανώς για την πιθανότητα του υποσυνόλου $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B)$ του Ω και για να έχει νόημα η ερώτηση πρέπει το $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. Έτσι εξηγείται η απαίτηση (1.1) του ορισμού της τυχαίας μεταβλητής.

Αναζητώντας κάποια «οικονομικότερη» απαίτηση από την (1.1) για να ελέγξουμε αν μια συνάρτηση $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$ είναι τ.μ. έχουμε την παρακάτω Πρόταση.

***Πρόταση 1.1.*** Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ χ.π. και συνάρτηση $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$. Έστω $\mathcal{C}$ μια μη κενή κλάση υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $\mathcal{B}^n=\sigma(\mathcal{C})$ (π.χ. $\mathcal{C}=\mathcal{P}^n$). Η συνάρτηση X είναι τυχαία μεταβλητή όταν και μόνο όταν ισχύει

$$X^{-1}(A)\in\mathcal{F} \text{ για κάθε } A\in\mathcal{C}. \tag{1.2}$$

**Απόδειξη**
Αρκεί να δείξουμε ότι αν ισχύει η (1.2) τότε η X είναι τ.μ. Προς τούτο θεωρούμε την κλάση υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{A}=\left\{B\subset\mathbb{R}^n : X^{-1}(B)\in\mathcal{F}\right\}.$$

Αφού ισχύει η (1.2) θα έχουμε ότι $\mathcal{C}\subset\mathcal{A}$. Θα δείξουμε τώρα ότι η κλάση $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Πράγματι $\mathbb{R}^n\in\mathcal{A}$ διότι $X^{-1}\left(\mathbb{R}^n\right)=\Omega\in\mathcal{F}$. Επίσης αν $B\in\mathcal{A}$ τότε $X^{-1}(B)\in\mathcal{F}$ και αφού η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα (υποσυνόλων του Ω) θα είναι $\left(X^{-1}(B)\right)^c\in\mathcal{F}$. Όμως $\left(X^{-1}(B)\right)^c=X^{-1}\left(B^c\right)$ (δες Παρατ. 1.1) και άρα $X^{-1}\left(B^c\right)\in\mathcal{F}$ δηλαδή $B^c\in\mathcal{A}$. Τέλος θεωρούμε ακολουθία υποσυνόλων $\{B_n : n\in\mathbb{N}\}$ από την $\mathcal{A}$. Τότε $X^{-1}(B_n)\in\mathcal{F}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και αφού η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα θα είναι και $\bigcup_{n=1}^{\infty}X^{-1}(B_n)\in\mathcal{F}$. Όμως ισχύει $\bigcup_{n=1}^{\infty}X^{-1}(B_n)=X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)$ άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\in\mathcal{A}$. Ώστε η κλάση $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει την κλάση $\mathcal{C}$ και συνεπώς $\mathcal{A}\supset\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{B}^n$. ⑤

***Πρόταση 1.2.*** Η συνάρτηση $X:\Omega\to\mathbb{R}$ είναι τ.μ. όταν και μόνο όταν ισχύει:

$$\{\omega\in\Omega : X(\omega)\le t\}\in\mathcal{F} \text{ για κάθε } t\in\mathbb{R}. \tag{1.3}$$

**Απόδειξη**
Για οποιαδήποτε $a<b$ στο $\mathbb{R}$

$$X^{-1}((a,b])=X^{-1}((-\infty,b]\setminus(-\infty,a])=$$
$$X^{-1}((-\infty,b])\setminus X^{-1}((-\infty,a])=\{\omega : X(\omega)\le b\}\setminus\{\omega : X(\omega)\le a\}\in\mathcal{F}$$

αφού η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα. Επίσης $X^{-1}(\varnothing)=\varnothing\in\mathcal{F}$.

Ώστε $X^{-1}(A)\in\mathcal{F}$ για κάθε $A\in\mathcal{P}^1=\{(a,b] : a<b\}\cup\{\varnothing\}$. Όμως $\sigma\left(\mathcal{P}^1\right)=\mathcal{B}^1$ και κατά την Πρόταση 1.1 η X είναι τ.μ. ⑤

***Άσκηση 1.1.*** Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ χ.π. και συνάρτηση $X:\Omega\to\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι ισχύει: $\{\omega : X(\omega)\le r\}\in\mathcal{F}$ για κάθε $r\in\mathbb{Q}$ όπου $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών. Δείξτε ότι η X είναι τ.μ.

Η έννοια της τυχαίας μεταβλητής στη θεωρία πιθανοτήτων ταυτίζεται με την έννοια της **μετρήσιμης συνάρτησης** στη θεωρία μέτρου. Για την θεωρία μέτρου τυχαία μεταβλητή είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση στον $(\Omega,\mathcal{F})$. Μάλιστα όταν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης λέγεται $\mathcal{F}$-μετρήσιμη ή και $\mathcal{F}-\mathcal{B}^n$ μετρήσιμη προσδιορίζοντας έτσι τις σ-άλγεβρες για τις οποίες ισχύει η (1.1). Παρατηρείστε ότι στον ορισμό μιας τ.μ. $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$ δεν εμπλέκεται το μέτρο πιθανότητας P.

***Ορισμός.*** Μια συνάρτηση $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ ονομάζεται **συνάρτηση Borel** όταν και μόνο όταν για κάθε $B\in\mathcal{B}^n$ ισχύει $g^{-1}(B)\in\mathcal{B}^m$.

Κάθε συνάρτηση Borel $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ είναι μια τ.μ. στο χώρο $\left(\Omega=\mathbb{R}^m,\mathcal{F}=\mathcal{B}^m\right)$ και συνεπώς ισχύουν όλα τα ισχύοντα για τυχαίες μεταβλητές.

***Πρόταση 1.3.*** Κάθε συνεχής συνάρτηση $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ είναι συνάρτηση Borel.
**Απόδειξη**
Αρκεί να δείξουμε ότι η g είναι τ.μ. στον $\left(\Omega=\mathbb{R}^m,\mathcal{F}=\mathcal{B}^m\right)$ με τιμές στον $\mathbb{R}^n$ και για τούτο θα χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 1.1. Πράγματι αν $\mathcal{C}$ είναι η κλάση των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ τότε λόγω της συνέχειας της g ισχύει: για κάθε $A\in\mathcal{C}$ το σύνολο $g^{-1}(A)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ και συνεπώς $g^{-1}(A)\in\mathcal{B}^m$. Όμως $\mathcal{B}^n=\sigma(\mathcal{C})$ και άρα κατά την Πρόταση (1.1) η συνάρτηση g είναι συνάρτηση Borel. ⑤

***Πρόταση 1.4.*** Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ χ.π. και τ.μ. $X:\Omega\to\mathbb{R}^m$. Έστω επίσης συνάρτηση Borel $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$. τότε η συνάρτηση $Y=g(X)\equiv g\circ X:\Omega\to\mathbb{R}^n$ είναι τ.μ.
**Απόδειξη**
Για κάθε $B\in\mathcal{B}^n$ έχουμε διαδοχικά $Y^{-1}(B)=\{\omega:Y(\omega)\in B\}=\{\omega:g(X(\omega))\in B\}=$ $\left\{\omega:X(\omega)\in g^{-1}(B)\right\}=X^{-1}\left(g^{-1}(B)\right)\in\mathcal{F}$ αφού $g^{-1}(B)\in\mathcal{B}^m$ και η X είναι τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{R}^m$. ⑤

Για μια συνάρτηση $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$ ισχύει ότι $X(\omega)=\left(X_1(\omega),X_2(\omega),\ldots,X_n(\omega)\right)^T$, $\omega\in\Omega$ όπου $X_i:\Omega\to\mathbb{R}$. Όταν χρειάζεται θα γράφουμε απλά $X=\left(X_1,X_2,\ldots X_n\right)^T$.

***Πρόταση 1.5.*** Έστω συνάρτηση $X=\left(X_1,X_2,\ldots X_n\right)^T$. Η $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$ είναι τ.μ. όταν και μόνο όταν οι συναρτήσεις $X_i:\Omega\to\mathbb{R}$ είναι τυχαίες μεταβλητές.
**Απόδειξη**
Έστω ότι η X είναι τ.μ. Για κάθε $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ θεωρούμε τη συνάρτηση-προβολή $g_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}:g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_i$. Κάθε $g_i$ είναι συνάρτηση Borel ως συνεχής και επειδή $X_i=g_i(X)$ συμπεραίνουμε ότι οι $X_i$, $i=1,2,\ldots,n$ είναι τ.μ. Αντίστροφα έστω

ότι οι συναρτήσεις $X_i:\Omega\to\mathbb{R}$ είναι τ.μ. Για οποιοδήποτε ορθογώνιο $A=\prod_{i=1}^{n}(a_i,b_i]\in\mathcal{P}^n$ ισχύει

$$X^{-1}(A)=\left\{\omega:X(\omega)=(X_1(\omega),\dots X_n(\omega))\in\prod_{i=1}^{n}(a_i,b_i]\right\}=$$

$$=\{\omega:X_i(\omega)\in(a_i,b_i]\,\forall\, i=1,2,\dots,n\}=\bigcap_{i=1}^{n}\{\omega:X_i(\omega)\in(a_i,b_i]\}$$

δηλαδή $X^{-1}(A)=\bigcap_{i=1}^{n}X_i^{-1}((a_i,b_i])$.

Επειδή οι συναρτήσεις $X_i$, $i=1,2,\dots,n$ είναι τ.μ. θα είναι $X_i^{-1}((a_i,b_i])\in\mathcal{F}$ και αφού η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα θα είναι $X^{-1}(A)\in\mathcal{F}$ και τούτο για κάθε $A\in\mathcal{P}^n$. Όμως $\sigma(\mathcal{P}^n)=\mathcal{B}^n$ και συνεπώς κατά την Πρόταση 1.1 η X είναι τ.μ. ⑤

***Πρόταση 1.6.*** Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ χ.π. και τυχαίες μεταβλητές $X_i:\Omega\to\mathbb{R}$, $i=1,2,\dots,n$. Αν $a_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2,\dots,n$ οι συναρτήσεις $\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$, $\prod_{i=1}^{n}X_i$, $\max\{X_1,\dots,X_n\}$, $\min\{X_1,\dots,X_n\}$ είναι τ.μ.

**Απόδειξη**

Αφού οι συναρτήσεις $X_i:\Omega\to\mathbb{R}$, $i=1,2,\dots,n$ είναι τ.μ. η συνάρτηση $(X_1,\dots,X_n)^T:\Omega\to\mathbb{R}^n$ θα είναι τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{R}^n$.

Επειδή η συνάρτηση $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ με $g(x_1,\dots,x_n)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$ είναι συνεχής θα είναι συνάρτηση Borel και συνεπώς η συνάρτηση $g(X_1,\dots,X_n)=a_1X_1+\cdots+a_nX_n$ είναι τ.μ. Όμοια για τις υπόλοιπες. ⑤

***Άσκηση 1.2.*** Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ χ.π. και $A\in\mathcal{F}$. Δείξτε ότι η **δείκτρια του A** (ή χαρακτηριστική του A) που ορίζεται από την $I_A(\omega)=\begin{cases}1 & \text{αν } \omega\in A\\ 0 & \text{αν } \omega\notin A\end{cases}$ είναι τυχαία μεταβλητή.

***Άσκηση 1.3.*** Έστω τ.μ. $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$ και $a>0$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $Y:\Omega\to\mathbb{R}^n$ που ορίζεται από την $Y(\omega)=\begin{cases}X(\omega) & \text{αν } |X(\omega)|\le a\\ 0 & \text{αν } |X(\omega)|>a\end{cases}$ είναι τ.μ.

***Άσκηση 1.4.*** Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ χ.π. και τ.μ. $X,Y:\Omega\to\mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα παρακάτω σύνολα ανήκουν στην σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$.

$A=\{\omega\in\Omega:X(\omega)=Y(\omega)\}$, $B=\{\omega\in\Omega:X(\omega)>Y(\omega)\}$, $\Gamma=\{\omega\in\Omega:e^{X(\omega)}=Y(\omega)\}$.

***Άσκηση 1.5.*** Δείξτε ότι για οποιαδήποτε $m,n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\mathcal{B}^{m+n} = \mathcal{B}^m \otimes \mathcal{B}^n$ όπου $\mathcal{B}^m \otimes \mathcal{B}^n = \sigma\left(\left\{A \times B : A \in \mathcal{B}^m, B \in \mathcal{B}^n\right\}\right)$ η σ-άλγεβρα γινόμενο των $\mathcal{B}^m, \mathcal{B}^n$.

***Άσκηση 1.6.*** Έστω $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ συνεχής και «1-1». Δείξτε ότι αν $B \in \mathcal{B}^m$ τότε $g(B) \in \mathcal{B}^n$.

(Υπόδειξη: Θεωρείστε την κλάση $\mathcal{A} = \left\{B \subset \mathbb{R}^m : g(B) \in \mathcal{B}^n\right\}$. Επειδή κάθε ανοικτό του $\mathbb{R}^m$ γράφεται σαν αριθμήσιμη ένωση συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^m$ και επειδή g συνεχής, συμπεράνετε ότι κλάση $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά του $\mathbb{R}^m$. Εν συνεχεία δείξτε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα).

***Σημείωση.*** Αν παραλειφθεί η υπόθεση «1-1» τότε το συμπέρασμα παύει να ισχύει. Έτσι η προβολή ενός υποσυνόλου Borel του $\mathbb{R}^2$ δεν είναι κατ' ανάγκη σύνολο Borel του $\mathbb{R}$ όπως λανθασμένα διαβεβαίωνε ο Lebesque στις αρχές του 20$^{ου}$ αιώνα. Η σωστή απάντηση βρίσκεται στη θεωρία των αναλυτικών συνόλων των Souslin, Lusin και άλλων. Αν διατηρηθεί η υπόθεση «1-1» και αντί της συνέχειας υποτεθεί ότι η g είναι μόνο συνάρτηση Borel τότε το συμπέρασμα $g(B) \in \mathcal{B}^n$ ισχύει αλλά η απόδειξη είναι κατά πολύ δυσκολότερη. Για τα ζητήματα αυτά ο ενδιαφερόμενος μπορεί να ανατρέξει στα [5], [6].

Για να συμπεριλάβουμε στη μελέτη μας και τυχαίες μεταβλητές που προκύπτουν από οριακές διαδικασίες επί ακολουθιών τ.μ. είναι σκόπιμο να θεωρήσουμε τ.μ. με τιμές στο $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$. Η επέκταση είναι άμεση και έχει ως ακολούθως: Αν $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ είναι χ.π. μια συνάρτηση $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ λέγεται τ.μ. όταν και μόνο όταν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις:

i) $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}^1$.

ii) $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = -\infty\} \in \mathcal{F}$ και $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = \infty\} \in \mathcal{F}$.

Εύκολα τώρα αποδεικνύεται ότι:

***Άσκηση 1.7.*** Η συνάρτηση $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ είναι τυχαία μεταβλητή όταν και μόνο όταν ισχύει η (1.3).

***Πρόταση 1.7.*** Έστω $X_n : \Omega \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ ακολουθία τ.μ.. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $X, Y : \Omega \to [-\infty, \infty]$ αντίστοιχα ως εξής: $X(\omega) = \sup_n X_n(\omega)$, $Y(\omega) = \inf_n X_n(\omega), \omega \in \Omega$.

Τότε οι συναρτήσεις X, Y είναι τ.μ. με τιμές στο $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$.

**Απόδειξη**

Κατά την Άσκηση 1.4 ανωτέρω αρκεί να επαληθευτεί η (1.3). Πράγματι για τυχόν $t \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\{\omega : X(\omega) \le t\} = \left\{\omega : \sup_n X_n(\omega) \le t\right\} = \{\omega : X_n(\omega) \le t \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : X_n(\omega) \le t\}$. Όμως $X_n, n \in \mathbb{N}$ είναι τ.μ. και η κλάση $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα άρα $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : X_n(\omega) \le t\} \in \mathcal{F}$. Όμοια $\{\omega : Y(\omega) > t\} = \{\omega : X_n(\omega) > t \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\} =$

$\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\omega: X_n(\omega)>t\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\omega: X_n(\omega)\le t\}^c\in\mathcal{F}$ και άρα $\{\omega: Y(\omega)\le t\}\in\mathcal{F}$ για τυχόν $t\in\mathbb{R}$. ⑤

***Παρατήρηση.*** Η Πρόταση ισχύει και για τ.μ. $X_n:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ όπως εύκολα διαπιστώνεται.

***Πρόταση 1.8.*** Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ χ.π. και ακολουθία τ.μ. $X_n:\Omega\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$. Τότε ισχύει:

i) $\liminf_n X_n$, $\limsup_n X_n$ είναι τυχαίες μεταβλητές.

ii) Αν για κάθε $\omega\in\Omega$ υπάρχει το $\lim_n X_n(\omega)$ στο $\overline{\mathbb{R}}$ τότε η $X(\omega)=\lim_n X_n(\omega),\omega\in\Omega$ ορίζει τυχαία μεταβλητή.

**Απόδειξη**

i) $\liminf_n X_n=\sup_m\left(\inf_{n\ge m}X_n\right)$ και $\limsup X_n=\inf_m\left(\sup_{n\ge m}X_n\right)$. Επικαλούμενοι τώρα την Πρόταση 1.7 συμπεραίνουμε εύκολα το ζητούμενο.

ii) $X(\omega)=\liminf X_n(\omega)=\limsup X_n(\omega)$. ⑤

***Άσκηση 1.8.*** Έστω τ.μ. $X_n:\Omega\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$. Δείξτε ότι το σύνολο $\left\{\omega\in\Omega: \text{υπάρχει το } \lim_n X_n(\omega) \text{ στο } \overline{\mathbb{R}}\right\}\in\mathcal{F}$.

## 2. Κατανομή τυχαίων μεταβλητών

***Πρόταση 2.1.*** Έστω χ.π. $(\Omega,\mathcal{F},P)$ και τ.μ. $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε τη συνολοσυνάρτηση $P_X:\mathcal{B}^n\to[0,1]$ ως ακολούθως

$$P_X(B)=P\left(X^{-1}(B)\right),B\in\mathcal{B}^n \tag{2.1}$$

Τότε η συνολοσυνάρτηση είναι μέτρο πιθανότητας και η τριάδα $\left(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}^n,P_X\right)$ είναι χώρος πιθανότητας.

**Απόδειξη**

$P_X\left(\mathbb{R}^n\right)=P\left(X^{-1}\left(\mathbb{R}^n\right)\right)=P(\Omega)=1$.

Επίσης αν $\{B_\kappa,\kappa\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{B}^n$ και είναι ξένα μεταξύ τους τότε τα υποσύνολα $\left\{X^{-1}(B_\kappa),\kappa\in\mathbb{N}\right\}\subset\mathcal{F}$ είναι ξένα μεταξύ τους και έχουμε διαδοχικά

$$P_X\left(\bigcup_{\kappa=1}^{\infty}B_\kappa\right)=P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{\kappa=1}^{\infty}B_\kappa\right)\right)=P\left(\bigcup_{\kappa=1}^{\infty}X^{-1}(B_\kappa)\right)=\sum_{\kappa=1}^{\infty}P\left(X^{-1}(B_\kappa)\right)=\sum_{\kappa=1}^{\infty}P_X(B_\kappa).$$ ⑤

***Ορισμός.*** Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ χ.π. και τυχαία μεταβλητή $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$. Το μέτρο πιθανότητας $P_X$ το οριζόμενο από την (2.1) ονομάζεται **κατανομή της τ.μ. X.**

Μια τ.μ. $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$ γράφεται ως $X=(X_1,X_2,\dots,X_n)^T$ όπου οι συντεταγμένες $X_i:\Omega\to\mathbb{R}$ είναι τ.μ. Έστω $P_{X_i}$ η κατανομή της τ.μ. $X_i$, $i=1,2,\dots,n$. Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό θα έχουμε

$$P_{X_i}(A)=P\left(X_i^{-1}(A)\right), A\in\mathcal{B}^1.$$

Όμως $X^{-1}(\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}\times A\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R})=X_i^{-1}(A)$ με το Α στην i-θέση του Καρτεσιανού γινομένου (επαληθεύστε) και συνεπώς

$$P_{X_i}(A)=P_X(\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}\times A\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}), A\in\mathcal{B}^1. \quad (2.2)$$

Γενικά αν $X'=(X_1,\dots,X_\kappa), \kappa\le n$ θα ισχύει

$$P_{X'}(A)=P_X\left(A\times\mathbb{R}^{n-\kappa}\right), A\in\mathcal{B}^\kappa. \quad (2.3)$$

***Πρόταση 2.2.*** Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ πλήρης χώρος πιθανότητας και τ.μ. $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$. Έστω ακόμα συνάρτηση $Y:\Omega\to\mathbb{R}^n$ και υποθέτουμε ότι ισχύει:

$$X(\omega)=Y(\omega) \text{ για κάθε } \omega\in\Omega\setminus N \text{ όπου } N\in\mathcal{F} \text{ με } P(N)=0. \quad (2.4)$$

Τότε η συνάρτηση Y είναι τ.μ. και έχει την ίδια κατανομή με την τ.μ. X.

**Απόδειξη**

Για τυχόν $B\in\mathcal{B}^n$ έχουμε

$$Y^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega:Y(\omega)\in B\}=\{\omega\in\Omega\setminus N:X(\omega)\in B\}\cup\{\omega\in N:Y(\omega)\in B\}=$$
$$\left[(\Omega\setminus N)\cap X^{-1}(B)\right]\cup\left[N\cap Y^{-1}(B)\right].$$

Επειδή η X είναι τ.μ. θα είναι $X^{-1}(B)\in\mathcal{F}$ και αφού $N\in\mathcal{F}$ θα ισχύει $(\Omega\setminus N)\cap X^{-1}(B)\in\mathcal{F}$. Εξάλλου $N\cap Y^{-1}(B)\subset N$ με $N\in\mathcal{F}$ και $P(N)=0$ κατά την υπόθεση και αφού ο χ.π. $(\Omega,\mathcal{F},P)$ είναι πλήρης θα ισχύει $N\cap Y^{-1}(B)\in\mathcal{F}$. Τελικά $Y^{-1}(B)\in\mathcal{F}$ άρα η Y είναι τ.μ.

Όπως είδαμε παραπάνω

$$Y^{-1}(B)=\left[(\Omega\setminus N)\cap X^{-1}(B)\right]\cup\left[N\cap Y^{-1}(B)\right].$$

Τα ενδεχόμενα της ένωσης αυτής είναι ξένα μεταξύ τους και επειδή $P\left(N\cap Y^{-1}(B)\right)=0$ θα έχουμε

$$P\left(Y^{-1}(B)\right)=P\left((\Omega\setminus N)\cap X^{-1}(B)\right)=P\left(X^{-1}(B)-N\cap X^{-1}(B)\right)=$$
$$P\left(X^{-1}(B)\right)-P\left(N\cap X^{-1}(B)\right).$$

Όμως $P\left(N\cap X^{-1}(B)\right)=0$ και τελικά $P\left(Y^{-1}(B)\right)=P\left(X^{-1}(B)\right)$. ⑤

***Παρατήρηση 2.1.*** α) Η υπόθεση της πληρότητας χρειάζεται μόνο για την απόδειξη του ισχυρισμού ότι η Y είναι τ.μ. Αν δοθεί εξ αρχής ότι η Y είναι τ.μ. τότε αρκεί μόνο η (2.4) για να αποδειχθεί ότι $P_X=P_Y$ και η υπόθεση της πληρότητας περιττεύει.

β) Αν δύο τ.μ. X, Y ικανοποιούν την (2.4) τότε όπως αποδείχθηκε έχουν την ίδια κατανομή. Το αντίστροφο δεν ισχύει όπως φαίνεται από το ακόλουθο Παράδειγμα.

Έστω ο χ.π. $(\Omega=(0,1],\mathcal{B}_0,P)$ όπου $\mathcal{B}_0=\left\{B\subset(0,1]:B\in\mathcal{B}^1\right\}$ και $P=\lambda$ το μέτρο Lebesgue δηλαδή $P(a,b]=b-a$ για όλα τα $(a,b]\subset(0,1]$. Θεωρείστε την τ.μ. $X:\Omega\to\mathbb{R}$ με

$X(\omega)=\omega$. Εύκολα τώρα επαληθεύεται ότι οι τ.μ. X και $Y=1-X$ έχουν την ίδια κατανομή που μάλιστα συμπίπτει με P.
Να σημειωθεί ακόμα ότι δύο τ.μ. μπορούν να είναι ορισμένες σε διαφορετικές χ.π. αλλά να έχουν την ίδια κατανομή (βλ. Άσκηση 2.1).

***Ορισμός.*** Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ χ.π. και τ.μ. $X:\Omega\to\mathbb{R}$. Ονομάζεται **συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X** η συνάρτηση $F_X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$F_X(t)=P(\{\omega\in\Omega:X(\omega)\le t\}),\ t\in\mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Είναι φανερό ότι $F_X(t)=P(X^{-1}(-\infty,t])=P_X((-\infty,t])$ όπου $P_X$ η κατανομή της τ.μ. X και συνεπώς κατά την Πρόταση 5.1 του ΚΕΦ. I είναι πράγματι συνάρτηση κατανομής. Ακόμα περισσότερο

$$P_X(a,b]=P_X(-\infty,b]-P_X(-\infty,a]=F_X(b)-F_X(a)$$

και συνεπώς κατά τις Προτάσεις (5.1), (5.2) του ΚΕΦ. I το ζεύγος $(P_X,F_X)$ είναι ζεύγος αντίστοιχων στην αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μέτρων πιθανότητας και συναρτήσεων κατανομής στο $\mathbb{R}$. Μια τυχαία μεταβλητή X κατατάσσεται ως **απολύτως συνεχής** ή **διακριτή** ή **μικτή** ή **μη-ομαλή** σε ευθεία αντιστοιχία με την κατάταξη της συνάρτησης κατανομής της $F_X$ όπως ορίζεται στην Πρόταση 5.3 του ΚΕΦ. I και τις περιπτώσεις α, β, γ, δ που την ακολουθούν.

***Άσκηση 2.1.*** Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\mathbb{R},\mathcal{B},Q)$ και η τ.μ. $X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $X(\omega)=\omega$. Όπως φαίνεται αμέσως $P_X=Q$. Θεωρούμε τώρα ένα μέτρο πιθανότητας P στον $(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}^2)$ με την ιδιότητα

$$P(A\times B)=Q(A)Q(B) \text{ για } A\in\mathcal{B},\ B\in\mathcal{B}$$

(δηλαδή το μέτρο γινόμενο $P=Q\otimes Q$) και την τ.μ. $Y:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}:Y(\omega_1,\omega_2)=\omega_1$. Δείξτε ότι $P_Y=P_X=Q$.

***Άσκηση 2.2.*** Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ χ.π. και τ.μ. $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$. Λέγεται ότι η τ.μ. X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ όταν για κάθε $A\in\mathcal{B}^n$ ισχύει

$$P_X(A)=\int\underset{A}{\cdots}\int f(u_1,u_2,\ldots,u_n)du_1\ldots du_n .$$

Έστω $\kappa<n$ και $Y=(X_1,X_2,\ldots,X_\kappa)^T$ όταν $X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$. Δείξτε ότι η τ.μ. Y έχει πυκνότητα $f_Y$ που προκύπτει από την:

$$f_Y(u_1,u_2,\ldots,u_\kappa)=\int\cdots\int f(u_1,u_2,\ldots,u_n)du_{\kappa+1}\ldots du_n .$$

***Άσκηση 2.3.*** Έστω τμ. $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$ και συνάρτηση Borel $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. Έστω η τ.μ. $Y=g(x)$. Δείξτε ότι $P_Y(B)=P_X(g^{-1}(B))$ για κάθε $B\in\mathcal{B}^m$ και συμπεράνετε ότι αν η τ.μ. X έχει πυκνότητα f τότε θα ισχύει $P_Y(B)=\int\underset{g^{-1}(B)}{\cdots}\int f(u_1,u_2,\ldots,u_n)du_1\cdots du_n$..

Είναι τώρα η στιγμή εξοικείωσης με δύο περιπτώσεις τρόπου γραφής που χρησιμοποιούνται ευρύτατα στη θεωρία πιθανοτήτων.

α) Έχουμε ήδη βρεθεί αντιμέτωποι με συμβολικές εκφράσεις όπως οι παρακάτω ό-που X, Y $X_n$ είναι τ.μ. ορισμένες σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$P(X \in A)$, $P(X = Y)$, $\{X < Y\}$, $P(\lim X_n = X)$ κλπ.

Το ακριβές νόημα των εκφράσεων αυτών είναι αντίστοιχα:

$P(\{\omega : X(\omega) \in A\}) = P(X^{-1}(A))$, $P(\{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\})$, $\{\omega : X(\omega) < Y(\omega)\}$, $P(\{\omega : \lim X_n(\omega) = X(\omega)\})$.

β) Η δεύτερη περίπτωση είναι η έκφραση «σχεδόν βεβαίως για το μέτρο P» και συμβολικά P-σ.β.

Θα γράφουμε $X = Y$ P-σ.β. όταν και μόνο όταν $X(\omega) = Y(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega \setminus N$ όπου $N \in \mathcal{F}$ με $P(N) = 0$. Ανάλογο νόημα έχουν οι διατυπώσεις $X < Y$ P-σ.β. ή $\lim X_n = X$ P-σ.β.

***Άσκηση 2.4.*** Δείξτε ότι $X = Y$ P-σ.β. $\Leftrightarrow P(X = Y) = 1$.

***Άσκηση 2.5.*** Έστω ακολουθία τ.μ. $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ και τ.μ. Y με τιμές στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ $X_n \le Y$ P-σ.β. $\Leftrightarrow \sup_n X_n \le Y$ P-σ.β.

## 3. Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

***Ορισμός.*** Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π. και οικογένεια τ.μ. $X_i : \Omega \to \mathbb{R}^n$ $i \in I$. Οι τ.μ. $X_i$, $i \in I$ λέγονται ανεξάρτητες όταν και μόνο όταν για οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο $\{i_1, i_2, \ldots, i_\kappa\} \subset I$ και οποιαδήποτε $B_1$, $B_2$, ..., $B_\kappa \in \mathcal{B}^n$ ισχύει

$$P\left(\bigcap_{m=1}^{\kappa} X_{i_m}^{-1}(B_m)\right) = \prod_{m=1}^{\kappa} P\left(X_{i_m}^{-1}(B_m)\right) \tag{3.1}$$

ή ισοδύναμα

όταν και μόνο όταν οι κλάσεις $\left\{X_i^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}^n\right\}, i \in I$ είναι ανεξάρτητες.

***Παρατήρηση.*** Για την ανεξαρτησία των τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ είναι αρκετό να απαιτήσουμε: Για οποιαδήποτε $B_i \in \mathcal{B}^n$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\nu} X_i^{-1}(B_i)\right) = \prod_{i=1}^{\nu} P\left(X_i^{-1}(B_i)\right). \tag{3.2}$$

Τότε επαληθεύεται η (3.1) (πώς;).

Αν τώρα θέσουμε $X = (X_1, X_2, \ldots, X_\nu)$ και λόγω της σχέσης $\bigcap_{i=1}^{\nu} X_i^{-1}(B_i) = X^{-1}(B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_\nu)$ συμπεραίνουμε ότι η (3.2) ισοδυναμεί με

$$P_X(B_1 \times \cdots \times B_\nu) = P_{X_1}(B_1) \cdot P_{X_2}(B_2) \cdots P_{X_\nu}(B_\nu) \tag{3.3}$$

για οποιαδήποτε $B_i \in \mathcal{B}^n$ ή ακόμα

$$P_X = P_{X_1} \otimes P_{X_2} \otimes \cdots \otimes P_{X_\nu}.$$

Να σημειωθεί επίσης ότι στον ορισμό της ανεξαρτησίας οι κλάσεις $\left\{X_i^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}^n\right\}$ είναι σ-άλγεβρες (δες Άσκ. 3.2).

***Άσκηση 3.1.*** Δείξτε ότι οι τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ είναι ανεξάρτητες όταν η (3.2) ή η (3.3) επαληθεύονται για $B_i \in \mathcal{P}^n$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

***Άσκηση 3.2.*** Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π. και τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι η κλάση $\left\{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}^n\right\}$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω. Αυτή η σ-άλγεβρα λέγεται **παραγόμενη από την τ.μ. X** και συμβολικά γράφουμε

$$\sigma(X) = \left\{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}^n\right\}.$$

(Η $\sigma(X)$ είναι η ελάχιστη για την οποία η X είναι μετρήσιμη).

Δείξτε ακόμα ότι $\sigma(X) = \sigma\left(\left\{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{P}^n\right\}\right)$.

***Άσκηση 3.3.*** Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π. και τ.μ. $X_i : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $i \in I$. Δείξτε ότι οι τ.μ. $X_i$, $i \in I$ είναι ανεξάρτητες όταν και μόνο όταν οι κλάσεις $\left\{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{P}^n\right\}$ είναι ανεξάρτητες.

***Άσκηση 3.4.*** Έστω ότι οι τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ και $Y : \Omega \to \mathbb{R}^m$ είναι ανεξάρτητες. Έστω ακόμα συναρτήσεις Borel $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ και $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$. Δείξτε ότι οι τ.μ. $f(X)$ και $g(Y)$ είναι ανεξάρτητες.

***Άσκηση 3.5.*** Έστω ότι οι τ.μ. $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ είναι ανεξάρτητες και $\kappa < \nu$. Δείξτε ότι

α) Οι τ.μ. $X' = (X_1, \ldots, X_\kappa)$ και $Y = (X_{\kappa+1}, \ldots, X_\nu)$ είναι ανεξάρτητες.

β) Αν $f : \mathbb{R}^\kappa \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R}^{\nu-\kappa} \to \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις Borel τότε οι τ.μ. $f(X_1, \ldots, X_\kappa)$, $g(X_{\kappa+1}, \ldots, X_\nu)$ είναι ανεξάρτητες.