

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι ΣΕΜΦΕ
06/02/2019

$|x_n - 0| < \epsilon$

Θέμα 1. (α) Ισχύουν ή όχι οι εξής προτάσεις και γιατί:

- (1) Αν $\lim a_n = a > 0$ τότε η (a_n) είναι τελικά θετική.
 (2) Κάθε φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα.
 (3) Αν (a_n) φθίνουσα και $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A με $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup A$.

Θέμα 2. (α) Βρείτε τα σημεία συνέχειας της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x$ αν x ρητός και $f(x) = 1$ αν x άρρητος.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $y_0 \in \mathbb{R}$. Αν υπάρχει μια φραγμένη ακολουθία (x_n) με $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = y_0$ δείξτε ότι υπάρχει και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = y_0$.

(γ) Αν $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ δείξτε ότι $\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

Θέμα 3. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η f' παίρνει πεπερασμένο πλήθος τιμών τι συμπέρασμα βγάζετε για την f ;

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη με f'' συνεχή.

(γ) Έστω $n \in \mathbb{N}$. Με χρήση του τύπου Taylor δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_n \in [0, 1/n]$ και $\xi'_n \in [-1/n, 0]$ τέτοια ώστε

$$f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(-\frac{1}{n}\right) = 2f(0) + \frac{f''(\xi_n) + f''(\xi'_n)}{2n^2}.$$

(ii) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(-\frac{1}{n}\right) - 2f(0) \right|$.

Θέμα 4. (α) Έστω $k \in \mathbb{N}$. Με βάση το ολοκλήρωμα Riemann κατάλληλης συνάρτησης υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}.$$

(β) Με χρήση του γενικού θεωρήματος Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού υπολογίστε το

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{\sqrt[n]{1+x^{2019}}}{1+x^2} dx.$$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 2,5 ΩΡΕΣ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f'\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\sum_{k=1}^n k^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\infty}}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1}$$