

ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΕΡΓΑΣΙΑ 1 – ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΗ 1: Έστω ένα μη ομογενές γραμμικό σύστημα $Ax=b$ (Σ) με 4 εξισώσεις και 3 αγνώστους και έστω (Σ_0) το αντίστοιχο ομογενές. Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τις γενικές λύσεις των (Σ) και (Σ_0) αν είναι γνωστό ότι οι πίνακες A και $[A|b]$ είναι βαθμού 2;

ΑΣΚΗΣΗ 2: Έστω το μη ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\3x + 2y + z &= 4 \quad (\Sigma) \\x + 2y + 3z &= 0\end{aligned}$$

και έστω (Σ_0) το αντίστοιχο ομογενές.

α) Βρείτε το σύνολο λύσεων Λ_0 του (Σ_0).

β) Έστω (x_1, y_1, z_1) και (x_2, y_2, z_2) δύο λύσεις του (Σ_0). Δείξτε ότι το άθροισμά τους $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ καθώς και το $c \cdot (x_1, y_1, z_1) = (cx_1, cy_1, cz_1)$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι επίσης λύσεις του (Σ_0). (Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε για τα συστήματα την μορφή πινάκων.)

γ) Βρείτε το σύνολο λύσεων Λ του (Σ).

δ) Να γράψετε το Λ στη μορφή $\Lambda = \left\{ \vec{\xi} \right\} + \Lambda_0$, όπου $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ είναι μια λύση του (Σ).

ΑΣΚΗΣΗ 3: Να διερευνήσετε και να λύσετε το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned}(a-1)x + (a-1)y &= 1-a \\ &ay + az = 2(a-1) \quad (\Sigma_a) \\ (a^2 - a)x &+ (a^2 - a)z = 0\end{aligned}$$

για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$.

Παράδοση: 2/11/2015