Σ.Ε.Μ.Φ.Ε
ΕΡΓΑΣΙΑ 1-ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
ΛΥΣΕΙΣ

Άσκηση 1.

Έχουμε $m = 4$ εξισώσεις, $n = 3$ αγνώστους και $r = rank(A) = rank(A|b) = 2$. Άρα το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση και $n - r = 3 - 2 = 1$ άγνωστος θα είναι αυθαίρετος. Οι 2 μη μηδενικές γραμμές του επαυξημένου πίνακα θα μας δώσουν τους άλλους δύο αγνώστους συναρτήσει του αυθαίρετου. Τα συστήματα (Σ) και (Σ_0) έχουν άπειρες λύσεις.

Άσκηση 2.

Γιά τα (α), (γ) και (δ), η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα του συστήματος είναι

$$D = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Άρα

$$x = 2 + z\,,\ y = -1 - 2z\,,\ z \in \mathbb{R}$$

δηλαδή οι λύσεις (x, y, z) του (Σ) είναι της μορφής

$$(x, y, z) = (2 + z, -1 - 2z, z) = (2, -1, 0) + z(1, -2, 1) \tag{0.1}$$

και κατευθείαν από την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, με 0 στην τελευταία στήλη, βλέπουμε ότι οι λύσεις (x, y, z) του (Σ_0) είναι της μορφής

$$(x, y, z) = (z, -2z, z) = z(1, -2, 1) \tag{0.2}$$

Οι (0.1) και (0.2) συνεπάγονται ότι $\Lambda = \{\xi\} + \Lambda_0$ όπου

$$\Lambda = \{(2, -1, 0) + z(1, -2, 1) : z \in \mathbb{R}\}$$

$$\Lambda_0 = \{z(1, -2, 1) : z \in \mathbb{R}\}$$

$$\xi = (2, -1, 0)$$

Γιά το (β), έστω

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

δύο λύσεις του (Σ_0), δηλαδή $Au = \mathbf{0}$ και $Av = \mathbf{0}$ όπου

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Τότε $A(u + v) = Au + Av = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ και $A(cu) = cAu = c\mathbf{0} = \mathbf{0}$ δηλαδή οι $u + v$ και cu είναι λύσεις του (Σ_0).

Άσκηση 3.

Γιά $a \neq 0$ και $a \neq 1$ η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα του συστήματος είναι

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2-3a}{2a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-2}{2a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3a-2}{2a} \end{array}\right)$$

Άρα, γιά $a \neq 0$ και $a \neq 1$ το σύστημα έχει την μοναδική λύση

$$x = \frac{2-3a}{2a} \; , \; y = \frac{a-2}{2a} \; , \; z = \frac{3a-2}{2a}$$

Γιά $a = 0$ ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

άρα το σύστημα δεν έχει λύση.

Γιά $a = 1$ ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

άρα $y + z = 0$, $x \in \mathbb{R}$ και οι λύσεις του συστήματος είναι της μορφής

$$(x, y, z) = (x, -z, z) \; , \; x, z \in \mathbb{R} \text{ (διπαραμετρική απειρία)}$$