ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Διανυσματικά γινόμενα - Ορίζουσες

Γραμμική Άλγεβρα - 1ο Εξάμηνο 2015-16

1. Να αποδείξετε ότι για τα διανύσματα $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\Delta^3$ ισχύουν :

(i) $\mathbf{a}\neq\mathbf{0},\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ και $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}\Rightarrow\mathbf{b}=\mathbf{c}$

(ii) $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$.
Ισχύει η αντίστροφη συνεπαγωγή;

(iii) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{a}$

(iv) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{b}\times\mathbf{c},\mathbf{c}\times\mathbf{a})=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2$

(v) $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ είναι μη συνεπίπεδα $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{b}\times\mathbf{c},\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ είναι μη συνεπίπεδα

2. Δίνονται τα διανύσματα $\mathbf{a}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\lambda\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{j}+\lambda\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=\lambda\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
Να προσδιορίσετε τις τιμές του λ για τις οποίες τα παραπάνω διανύσματα είναι συνεπίπεδα.

3. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}$ ισχύει η ισότητα:

(α) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$.

(β) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{b}-(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{a}=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d})\mathbf{c}-(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{d}$.

4. Τα σημεία Α, Β, Γ και Δ έχουν διανύσματα θέσης ως προς το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $Oxyz$, $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ και $\mathbf{d}$, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma,\Delta \text{ συνεπίπεδα } \Leftrightarrow (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})-(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})+(\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{a})-(\mathbf{d},\mathbf{a},\mathbf{b})=0.$$

5. Τα σημεία Α, Β και Γ έχουν διανύσματα θέσης ως προς το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $Oxyz$, $\mathbf{a},\mathbf{b},$ και $\mathbf{c}$, αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Gamma)=\frac{1}{2}\left|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\right|.$$

6. Αν $\mathbf{a},\mathbf{b}$ είναι δύο μη συγγραμμικά μοναδιαία διανύσματα, να προσδιορίσετε το διάνυσμα $\mathbf{u}$ που ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})\mathbf{b}+4\mathbf{a}=2\mathbf{u}.$$

7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathbf{x}+\mathbf{x}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}$, όπου $\mathbf{a},\mathbf{b}$ είναι γνωστά διανύσματα, έχει μοναδική λύση ως προς $\mathbf{x}$, η οποία και να βρεθεί.

8. Αν το διάνυσμα $\mathbf{w}$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{a})+\mathbf{w}=\mathbf{b},$$

όπου $\mathbf{a},\mathbf{b}$ είναι γνωστά διανύσματα, τότε:

(i) Να αποδείξετε ότι: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ και $\mathbf{w}\times\mathbf{a}=\left(\dfrac{1}{1+|\mathbf{a}|^2}\right)(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$.

(ii) Να προσδιορίσετε τη λύση της εξίσωσης.

Υπολογισμός οριζουσών (Με χρήση ιδιοτήτων των οριζουσών)

9. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα $A=\begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{bmatrix}$.

10. Να λύσετε την εξίσωση: $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix}=0$.

11. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του $n\times n$ πίνακα:

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & a_n \\ -x & x & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -x & x \end{bmatrix},$$

όπου $a_1,a_2,\ldots,a_n.x\in\mathbb{R}$.

(Απάντηση: $|\mathrm{A}|=(a_1+a_2+\ldots+a_n)x^{n-1}$ **)**

Παράδοση φυλλαδίου 1: Μέχρι 25 Νοεμβρίου 2015

Α. Φελλούρης