

ΛΥΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 2

ΣΕΜΦΕ /2015-16

Γραμμική Άλγεβρα

Διανυσματικά γινόμενα

1. Να αποδείξετε ότι για τα διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ισχύουν :

(i) $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ και $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{c}$.

(ii) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$. Ισχύει η αντίστροφη συνεπαγωγή;

(iii) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{a}$.

(iv) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2$.

Λύση

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{a} \times (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b} - \mathbf{c} = \lambda \mathbf{a}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Άρα έχουμε: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \lambda \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \lambda \mathbf{a}^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$,

οπότε θα έχουμε: $\mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{c}$.

(ii) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b} + \mathbf{c} = -\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = -\mathbf{a} \times \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$.

Ομοίως αποδεικνύουμε και ότι: $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Αυτό προκύπτει εύκολα, αν θεωρήσουμε τα διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ να είναι συγγραμμικά.

(iii) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}\} \mathbf{a} - \{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}\} \mathbf{c} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{a}$, αφού $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0$.

(iv) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = -\{(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$
 $= -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2$.

Αντίστροφα, αν τα διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ είναι μη συνεπίπεδα, τότε $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \neq 0$.

Λόγω της 1(iv)θα έχουμε και ότι $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2 \neq 0$, οπότε και τα $\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ θα είναι μη συνεπίπεδα.

2. Δίνονται τα διανύσματα $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\lambda\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να προσδιορίσετε τις τιμές του λ για τις οποίες τα παραπάνω διανύσματα είναι συνεπίπεδα.

Λύση

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ συνεπίπεδα} \Leftrightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3\lambda \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1.$$

3. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ ισχύει η ισότητα:

(α) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$.

(β) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{b} - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{a} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{d}$.

Λύση

(α) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}\} \cdot \mathbf{d} = \{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}\} \cdot \mathbf{d} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$.

(β) Σύμφωνα με τον κανόνα υπολογισμού του δις εξωτερικού γινομένου, έχουμε

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})\} \mathbf{b} - \{\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})\} \mathbf{a} = (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) \mathbf{b} - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) \mathbf{a}.$$

Επίσης έχουμε

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{d}\} \mathbf{c} - \{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}\} \mathbf{d} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}) \mathbf{c} - (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \mathbf{d}.$$

4. Έχουμε ότι: A, B, Γ, Δ συνεπίπεδα $\Leftrightarrow \mathbf{AB}, \mathbf{A}\Gamma, \mathbf{A}\Delta$ συνεπίπεδα

$$\Leftrightarrow \mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}, \mathbf{d} - \mathbf{a} \text{ συνεπίπεδα} \Leftrightarrow (\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}, \mathbf{d} - \mathbf{a}) = 0$$

$\Leftrightarrow (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = 0$ [αφού, όταν σε ένα μικτό γινόμενο δύο τουλάχιστον διανύσματα ταυτίζονται ή είναι συγγραμμικά, τότε το μικτό γινόμενο ισούται με μηδέν]

$$\Leftrightarrow (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) - (\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) = 0.$$

5. Τα σημεία A, B και Γ έχουν διανύσματα θέσης ως προς το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $Oxyz$, \mathbf{a}, \mathbf{b} , και \mathbf{c} , αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι:

$$E(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a})|.$$

Λύση

Αν $AB\Delta\Gamma$ είναι το παραλληλόγραμμο που σχηματίζεται με δύο διαδοχικές πλευρές AB και $A\Gamma$, τότε έχουμε :

$$\begin{aligned} E(AB\Gamma) &= \frac{1}{2} E(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} |\mathbf{AB} \times \mathbf{A}\Gamma| = \frac{1}{2} |(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})| \\ &= \frac{1}{2} |\mathbf{b} \times \mathbf{c} - \mathbf{c} \times \mathbf{a} - \mathbf{b} \times \mathbf{a}| = \frac{1}{2} |\mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}|. \end{aligned}$$

6. Αν \vec{a}, \vec{b} είναι δύο μη συγγραμμικά μοναδιαία διανύσματα, να προσδιορίσετε το διάνυσμα \vec{u} που ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{b} + 4\mathbf{a} = 2\mathbf{u}.$$

Λύση

Θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο των δύο μελών της εξίσωσης με το \mathbf{a} , οπότε

$$\mathbf{a} \cdot \{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{b} + 4\mathbf{a}\} = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \Leftrightarrow (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + 4\mathbf{a}^2 = 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \frac{4\mathbf{a}^2}{2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \frac{4}{2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}, \text{ αφού τα } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ είναι μοναδιαία. Άρα είναι } \mathbf{u} = 2\mathbf{a} + \left(\frac{2}{2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})} \right) \mathbf{b}.$$

7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathbf{x} + \mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$, όπου \mathbf{a}, \mathbf{b} είναι γνωστά διανύσματα, έχει μοναδική λύση ως προς \mathbf{x} , η οποία και να βρεθεί.

Λύση

(α) Μοναδικότητα

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο λύσεις $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ της εξίσωσης με $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, τότε

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1 \times \mathbf{a} = \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2 \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot \{ \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \times \mathbf{a} \} = 0 \Rightarrow (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2 = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2,$$

που είναι άτοπο. Άρα, αν υπάρχει λύση, αυτή θα είναι μοναδική.

(β) Ύπαρξη

Κατ' αρχή από τη δοθείσα εξίσωση λαμβάνουμε:

$$\mathbf{x} + \mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} & (1) \\ \mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{x} & (2) \end{cases}$$

Θεωρούμε το εξωτερικό γινόμενο των δύο μελών της εξίσωσης από αριστερά με το \mathbf{a} , οπότε, λόγω των (1) και (2), λαμβάνουμε:

$$(\mathbf{x} + \mathbf{x} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{x} \times \mathbf{a} + (\mathbf{x} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{b} - \mathbf{x} + \{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} - |\mathbf{a}|^2 \mathbf{x}\} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

$$(1 + |\mathbf{a}|^2) \mathbf{x} = \mathbf{b} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = \frac{1}{1 + |\mathbf{a}|^2} \{\mathbf{b} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}\}.$$

8. Αν το διάνυσμα \mathbf{w} ικανοποιεί την εξίσωση

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{a}) + \mathbf{w} = \mathbf{b},$$

όπου \mathbf{a}, \mathbf{b} είναι γνωστά διανύσματα, τότε:

(i) να αποδείξετε ότι $\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ και $\mathbf{w} \times \mathbf{a} = \left(\frac{1}{1 + |\mathbf{a}|^2} \right) (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$,

(ii) να προσδιορίσετε τη λύση της εξίσωσης.

Λύση

(i) Θεωρώντας το εσωτερικό γινόμενο των δύο μελών της δεδομένης εξίσωσης με το \mathbf{a} , λαμβάνουμε

$$\mathbf{a} \cdot [\mathbf{a} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{a}) + \mathbf{w}] = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{w} \times \mathbf{a}) + \mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Θεωρώντας το εξωτερικό γινόμενο των δύο μελών της δεδομένης εξίσωσης με το \mathbf{a} , λαμβάνουμε

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{a} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{a}) + \mathbf{w}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \Leftrightarrow [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{a})] \mathbf{a} - |\mathbf{a}|^2 (\mathbf{w} \times \mathbf{a}) + \mathbf{a} \times \mathbf{w} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

$$\Leftrightarrow [1 + |\mathbf{a}|^2] (\mathbf{w} \times \mathbf{a}) = \mathbf{b} \times \mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{w} \times \mathbf{a} = \left(\frac{1}{1 + |\mathbf{a}|^2} \right) (\mathbf{b} \times \mathbf{a}).$$

(ii) Σύμφωνα με το (i) η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$\mathbf{w} = \mathbf{b} - \mathbf{a} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{a}) \Leftrightarrow \mathbf{w} = \mathbf{b} - \left(\frac{1}{1 + |\mathbf{a}|^2} \right) \{\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a})\}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{w} = \left(1 - \frac{|\mathbf{a}|^2}{1 + |\mathbf{a}|^2} \right) \mathbf{b} + \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{1 + |\mathbf{a}|^2} \right) \mathbf{a} = \frac{1}{1 + |\mathbf{a}|^2} \{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} + \mathbf{b}\}.$$

Υπολογισμός οριζουσών

$$9. |A| = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ a & -a & 0 & 1 \\ 0 & -b & b & 1 \\ 0 & 0 & b & 1-b \end{vmatrix} \quad (\text{αφαιρέσαμε τη δεύτερη στήλη})$$

από την πρώτη, την τρίτη από τη δεύτερη και την τέταρτη από την τρίτη)

$$= ab \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & -b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-b \end{vmatrix} \quad (\text{αφαίρεση της } 1^{\text{ης}} \text{ από τη } 2^{\text{η}} \text{ στήλη})$$

$$= ab \begin{vmatrix} -a & 0 & 0 \\ -b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = ab(-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} = ab(-a)(-b) = a^2 b^2.$$

$$10. \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+a+b+c & a & b & c \\ x+a+b+c & x & b & c \\ x+a+b+c & b & x & c \\ x+a+b+c & b & c & x \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{προσθέσαμε τις τρεις τελευταίες στήλες στην πρώτη})$$

$$\Leftrightarrow (x+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & x & b & c \\ 1 & b & x & c \\ 1 & b & c & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & x-b & 0 \\ 0 & c-a & c-b & x-c \end{vmatrix} = 0$$

(αφαιρέσαμε την πρώτη γραμμή από καθεμιά από τις άλλες τρεις)

$$\Leftrightarrow (x+a+b+c) \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 \\ b-a & x-b & 0 \\ b-a & c-a & x-c \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x+a+b+c)(x-a)(x-b)(x-c) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -(a+b+c) \text{ ή } x = a \text{ ή } x = b \text{ ή } x = c.$$

11. Προσθέτουμε διαδοχικά κάθε στήλη στην προηγούμενή της, αρχίζοντας από την τελευταία, οπότε καταλήγουμε στην ορίζουσα

$$|A| = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_i & \sum_{i=2}^n a_i & \dots & \sum_{i=n-1}^n a_i & a_n \\ 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) x^{n-1}.$$