

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3
Αναλυτική Γεωμετρία (Ευθεία -επίπεδο)
ΣΕΜΦΕ 2015-16
Παράδοση μόνον των ασκήσεων 1 έως 7

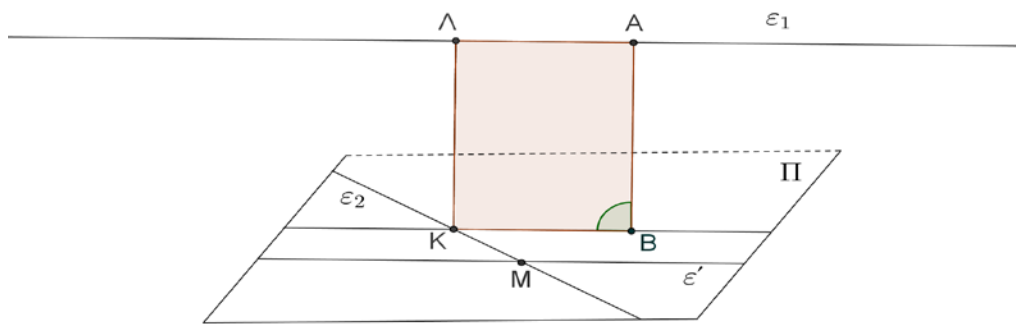
1. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου Π που ορίζεται από:
- (α) τα σημεία $A(1, 2, 3)$, $B(0, 0, 1)$, $\Gamma(2, 0, 0)$.
 - (β) το σημείο $A(1,0,2)$ και είναι παράλληλο προς το επίπεδο $Q: x - y + 3z = 6$.
 - (γ) το σημείο $A(3,-1,2)$ και είναι κάθετο προς την ευθεία ε με εξισώσεις
 $x - y + z = 3, \quad 3x - z = 0$.
2. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου Π το οποίο :
- (α) περιέχει τις ευθείες $\varepsilon_1: \mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$ και $\varepsilon_2: \mathbf{r} = \mathbf{c} + \mu \mathbf{b}$, όπου $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ είναι γνωστά διανύσματα και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
 - (β) περιέχει την ευθεία $\mathbf{r} = \lambda \mathbf{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και είναι κάθετο προς το επίπεδο που ορίζεται από τις ευθείες με εξισώσεις: $\mathbf{r} = \lambda \mathbf{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{r} = \mu \mathbf{b}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.
3. Δίνεται η ευθεία : $\varepsilon: (\mathbf{r} - \mathbf{a}) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$.
- (α) Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία των \mathbf{a} και \mathbf{n} ;
 - (β) Αν η ευθεία ε είναι τομή των επιπέδων
 $\Pi_1: x + y + z - 1 = 0, \quad \Pi_2: 4x - 3y - z + 1 = 0$,
να βρείτε τα \mathbf{a} και \mathbf{n} και να εξηγήσετε γιατί δεν είναι μονοσήμαντα.
4. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες
 $\varepsilon_1: x - 3 = 0, y + 2z = 10$ και $\varepsilon_2: \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{2}$
είναι ασύμβατες και να βρείτε τα ίχνη και το μήκος της κοινής κάθετης.
5. Τα διανύσματα θέσης των σημείων A, B και Γ ως προς το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $Oxyz$ είναι $\mathbf{OA} = \mathbf{a}, \mathbf{OB} = \mathbf{b}$ και $\mathbf{OG} = \mathbf{c}$, αντιστοίχως.
- (α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι
$$E(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|.$$
 - (β) Αν το επίπεδο $\Pi: 6x - 3y - 2z - 6a = 0$ τέμνει τους άξονες $x'x, y'y, z'z$ στα σημεία A, B, Γ , αντιστοίχως, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
6. Δίνεται το σημείο $P(1,0,3)$, η ευθεία $\varepsilon: x = -y = -z$ και το επίπεδο $\Pi: x - y - z - 12 = 0$ Να βρεθούν:
- (α) το συμμετρικό του σημείου P ως προς την ευθεία ε .
 - (β) το συμμετρικό του σημείου P ως προς το επίπεδο Π .
7. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E της ορθογώνιας προβολής του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ με $\mathbf{AB} = \mathbf{u}, \mathbf{A\Gamma} = \mathbf{v}$ πάνω σε ένα επίπεδο με κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}, |\mathbf{n}| = 1$, δίνεται από την ισότητα

$$E = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}|.$$

8. Η γεωμετρική κατασκευή της κοινής καθέτου δύο ασυμβάτων ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι η ακόλουθη: Από τυχόν σημείο M της ε_2 φέρουμε ευθεία ε_3 παράλληλη προς την ε_1 . Έστω Π το επίπεδο που ορίζεται από τις ε_2 και ε_3 . Από τυχόν σημείο A της ε_1 φέρουμε ευθεία ε_4 κάθετη στο Π . Από το ίχνος της B φέρουμε ευθεία BK παράλληλη προς την ε_3 , η οποία τέμνει την ε_2 στο K . Η παράλληλη ευθεία από το K προς την ε_4 τέμνει την ε_1 στο Λ . Η $K\Lambda$ είναι η κοινή κάθετη.

Με οδηγό την παραπάνω κατασκευή να προσδιορίσετε τις εξισώσεις και τις συντεταγμένες όλων των γεωμετρικών στοιχείων που θα χρησιμοποιήσετε (ευθείες, επίπεδα, σημεία) για την κατασκευή της κοινής καθέτου των ασύμβατων ευθειών

$$\varepsilon_1 : x + y = 10, z = 3 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : x - 3y = 2, z = 0.$$



9. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}, t \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + s\mathbf{b}, s \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι : $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ συνεπίπεδες $\Leftrightarrow (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

(β) Αν οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι ασύμβατες, να αποδείξετε ότι η ελάχιστη απόστασή τους

είναι
$$d = \frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}, \mathbf{b})|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}.$$

(γ) Αν $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, να αποδείξετε ότι η απόσταση των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι:

$$d = \frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|}.$$

10. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : \mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{u}, t \in \mathbb{R}$ και σημείο M εκτός της ευθείας με διανυσματική ακτίνα \mathbf{r}_M . Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου M από την ευθεία ε είναι

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|(\mathbf{r}_M - \mathbf{a}) \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}.$$

Εφαρμογή: $M(1,2,-1)$ και ε η ευθεία που περνάει από τα σημεία $A(2,1,-1), B(3,1,6)$.