Αναλυτική Γεωμετρία (Ευθεία-επίπεδο)
ΣΕΜΦΕ 2015-16

1.(α) Τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,-2,-2), \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=(1,-2,-3)$ είναι μη συγγραμμικά και παράλληλα προς το επίπεδο Π, ενώ το σημείο Α(1,2,3) με διάνυσμα θέσης $r_A=(1,2,3)$ είναι σημείο του επιπέδου. Άρα η εξίσωση του επιπέδου είναι:

$$(\vec{r}-\vec{r}_A,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 2x-5y+4z-4=0.$$

(β) Το διάνυσμα $\vec{\eta}=(1,-1,3)$ είναι κάθετο προς το επίπεδο Π (αφού είναι $\vec{\eta}\perp Q$).

Άρα η εξίσωση του επιπέδου είναι:

$$(\vec{r}-\vec{r}_A)\cdot\vec{\eta}=0 \Leftrightarrow (x-1,y,z-2)\cdot(1,-1,3)=0 \Leftrightarrow x-y+3z-7=0$$

(γ) Η ευθεία ε έχει παράλληλο διάνυσμα

$$\vec{\eta}=\vec{\eta}_1\times\vec{\eta}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}=\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k},$$

το οποίο είναι κάθετο προς το επίπεδο Π. Επιπλέον το $\mathrm{A}(3,-1,2)\in\Pi$.

Άρα η εξίσωση του επιπέδου Π είναι :

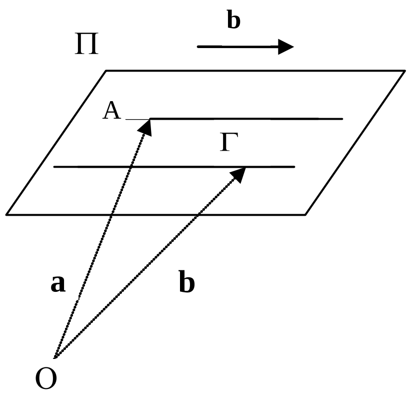
$$(\vec{r}-\vec{r}_A)\cdot\vec{\eta}=0 \Leftrightarrow (x-1,y+1,z-2)\cdot(1,4,3)=0 \Leftrightarrow x+4y+3z-5=0.$$

2.(α) Το επίπεδο Π περιέχει το σημείο Α με διάνυσμα θέσης $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ και έχει παράλληλα διανύσματα τα $\vec{b}, \overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}}=\vec{a}-\vec{c}$, που είναι μη συγγραμμικά για $\vec{a}-\vec{c}\neq\vec{0}$.

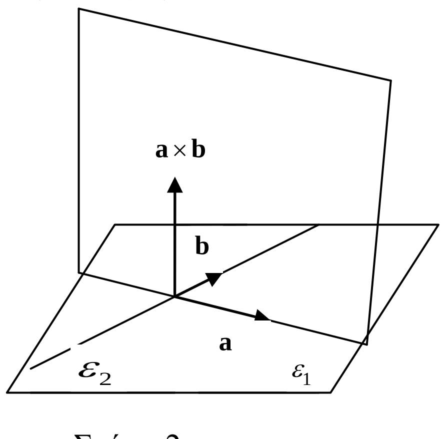
Άρα η εξίσωση του επιπέδου είναι(δες σχήμα 1)

$\vec{r}=\vec{a}+\lambda\vec{b}+\mu(\vec{a}-\vec{c}), \lambda,\mu\in\mathbb{R}$ [**διανυσματική παραμετρική εξίσωση**]

ή $(\vec{r}-\vec{a},\vec{b},\vec{a}-\vec{c})=0$ [**διανυσματική εξίσωση**]



Σχήμα 1



Σχήμα 2

(β) Τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{a}\times\vec{b}$ είναι παράλληλα προς το επίπεδο Π και ακόμη η αρχή των αξόνων Ο(0,0,0) ανήκει στο Π(σχήμα 2). Άρα η εξίσωση του επιπέδου Π είναι :

$$\vec{r}=\vec{0}+\lambda\vec{a}+\mu(\vec{a}\times\vec{b})\ \lambda,\mu\in\mathbb{R} \text{ ή } (\vec{r},\vec{a},\vec{a}\times\vec{b})=0.$$

3. Το $\vec{a}$ είναι το διάνυσμα θέσης ενός σημείου της ευθείας ε, ενώ το $\vec{\eta}$ είναι ένα παράλληλο διάνυσμα προς την ευθεία ε. Θέτοντας $x=0$ στις εξισώσεις των Π_1, Π_2 αναζητούμε το σημείο της τομής των επιπέδων Π_1, Π_2 που βρίσκεται στο επίπεδο $yOz(x=0)$. Έχουμε το σύστημα

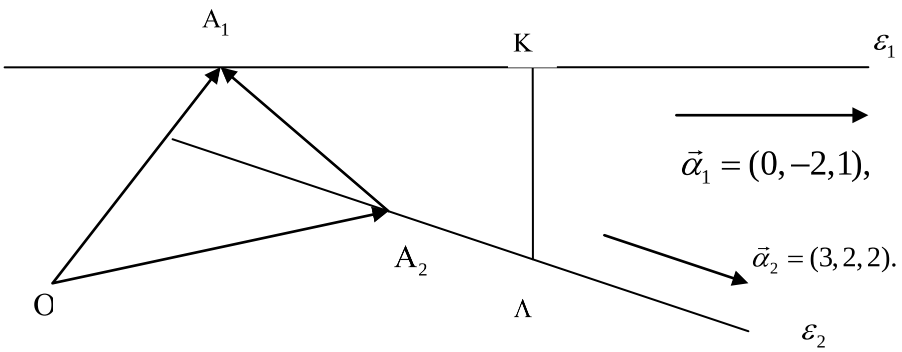
$$\{y+z=1, -3y-z=-1\} \Leftrightarrow y=0, z=1,$$

οπότε το σημείο $\mathrm{A}(0,0,1) \in \Pi$. Το σημείο Α δεν είναι μοναδικό, αφού το σύστημα των εξισώσεων των δύο επιπέδων έχει άπειρες λύσεις.
Επιπλέον το διάνυσμα $\vec{\eta} = \vec{\eta}_1 \times \vec{\eta}_2$, όπου $\vec{\eta}_1(1,1,1) \perp \Pi_1$ και $\vec{\eta}_2(4,-3,-1) \perp \Pi_2$, είναι παράλληλο προς την ευθεία ε. Είναι δηλαδή $\vec{\eta} = (2,5,-7) \parallel \varepsilon$, αλλά και κάθε διάνυσμα $\lambda\vec{\eta}, \lambda \in \mathbb{R}^*$ είναι παράλληλο προς την ευθεία ε.

4. Η ευθεία ε_1 έχει εξισώσεις $x-3=0, \dfrac{y-10}{-2} = \dfrac{z}{1}$, δηλαδή περνάει από το σημείο $\mathrm{A}_1(3,10,0)$ και έχει παράλληλο διάνυσμα το $\vec{\alpha}_1 = (0,-2,1)$, ενώ η ευθεία ε_2 περνάει από το σημείο $\mathrm{A}_2(-2,-1,-1)$ και έχει παράλληλο διάνυσμα το $\vec{\alpha}_2 = (3,2,2)$. Τότε $\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1} = (5,11,1)$ και επιπλέον έχουμε:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \text{ ασύμβατες} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1}, \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2 \text{ μη συνεπίπεδα } \Leftrightarrow (\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1}, \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2) \neq 0,$$

που ισχύει, αφού $(\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1}, \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2) = \begin{vmatrix} 5 & 11 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$



Σχήμα 3

Το τυχόν σημείο Κ της ε_1 έχει συντεταγμένες $(3,-2t+10,t), t \in \mathbb{R}$, το τυχόν σημείο Λ της ε_2 έχει συντεταγμένες $(3s-1, 2s-1, 2s-1), s \in \mathbb{R}$, ενώ το τυχόν διάνυσμα με άκρα πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχει συντεταγμένες $(3s-5, 2s+2t-11, 2s-t-1)$. Ζητάμε τα Κ,Λ που ικανοποιούν τις σχέσεις:

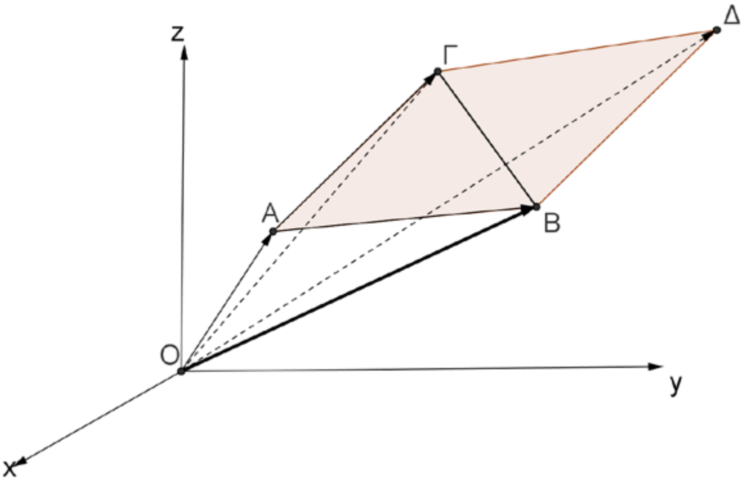
$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\mathrm{K}\Lambda} \perp \varepsilon_1 \\ \overrightarrow{\mathrm{K}\Lambda} \perp \varepsilon_2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\mathrm{K}\Lambda} \cdot \vec{\alpha}_1 = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{K}\Lambda} \cdot \vec{\alpha}_2 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -5t-2s=-21 \\ 2t+17s=39 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} t = 31/9 \\ s = 17/9 \end{Bmatrix},$$

οπότε θα είναι $\mathrm{K}(3, 28/9, 31/9), \Lambda(33/9, 25/9, 25/9)$ και $d_{\min} = |\overrightarrow{\mathrm{K}\Lambda}| = 1$

5. (α) Σύμφωνα με τη θεωρία, το εμβαδόν παραλληλογράμμου ΑΒΔΓ ισούται με το μέτρο του εξωτερικού γινομένου των διανυσμάτων ΑΒ, ΑΔ. Έτσι έχουμε:

$$\mathrm{E}(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\mathrm{E}(\mathrm{AB\Delta\Gamma})=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right|=\frac{1}{2}\left|(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\vec{b}\times\vec{c}-\vec{a}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{a}\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$



Σχήμα 4

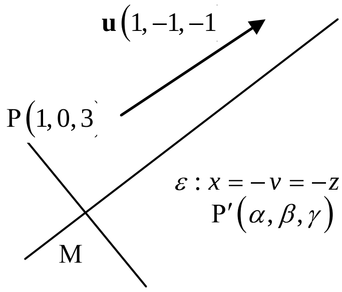
(β) Το επίπεδο Π τέμνει τους άξονες $x'x, y'y, z'z$ στα σημεία $\mathrm{A}(\alpha,0,0), \mathrm{B}(0,-2\alpha,0)$ και $\Gamma(0,0,-3\alpha)$, αντιστοίχως. Έτσι έχουμε $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-\alpha,-2\alpha,0), \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=(-\alpha,0,-3\alpha)$ και

$$\mathrm{E}(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right|=\frac{1}{2}\left|6\alpha^2\vec{\imath}+3\alpha^2\vec{\jmath}+2\alpha^2\vec{k}\right|=\frac{7\alpha^2}{2}.$$

6. **(α)** Έστω $P'(\alpha,\beta,\gamma)$ το συμμετρικό του P ως προς την ε. Τότε το μέσον M του PP' ανήκει στην ευθεία ε, οπότε το σημείο $M(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\gamma+3}{2})$ ικανοποιεί τις εξισώσεις της ευθείας ε, δηλαδή

$$\frac{\alpha+1}{2}=\frac{-\beta}{2}=\frac{\gamma+3}{2} \qquad (1).$$

Επιπλέον $\overrightarrow{PP'}=(\alpha-1,\beta,\gamma-3)\perp\vec{u}(1,-1,-1)$, όπου το διάνυσμα $\vec{u}$ είναι παράλληλο προς την ευθεία ε, οπότε θα ισχύει:



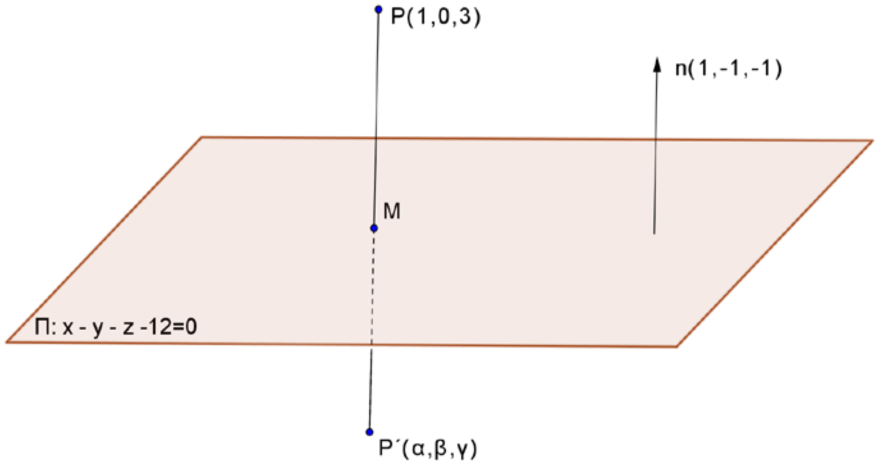
Σχήμα 5

$$(\alpha-1)\cdot 1+\beta\cdot(-1)+(\gamma-3)\cdot(-1)=0 \Leftrightarrow \alpha-\beta-\gamma=-2 \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε: $\alpha=-\frac{7}{3}, \beta=\frac{4}{3}, \gamma=-\frac{5}{3}$.

(β) Έστω $\mathrm{P}'(\alpha,\beta,\gamma)$ το συμμετρικό του P ως προς το επίπεδο $\Pi: x-y-z-12=0$. Τότε το διάνυσμα $\mathbf{PP}'(\alpha-1,\beta,\gamma-3)$ είναι κάθετο προς το επίπεδο Π, οπότε θα είναι συγγραμμικό με το κάθετο διάνυσμα $\boldsymbol{\eta}(1,-1,-1)$ του επιπέδου Π, οπότε:

$$\frac{\alpha-1}{1}=\frac{\beta}{-1}=\frac{\gamma-3}{-1}=t \qquad (1)$$



Σχήμα 6

Επιπλέον, το μέσο $\mathrm{M}\left(\dfrac{\alpha+1}{2},\dfrac{\beta}{2},\dfrac{\gamma+3}{2}\right)$ του ευθύγραμμου τμήματος PP' θα ανήκει στο επίπεδο Π, οπότε θα έχουμε:

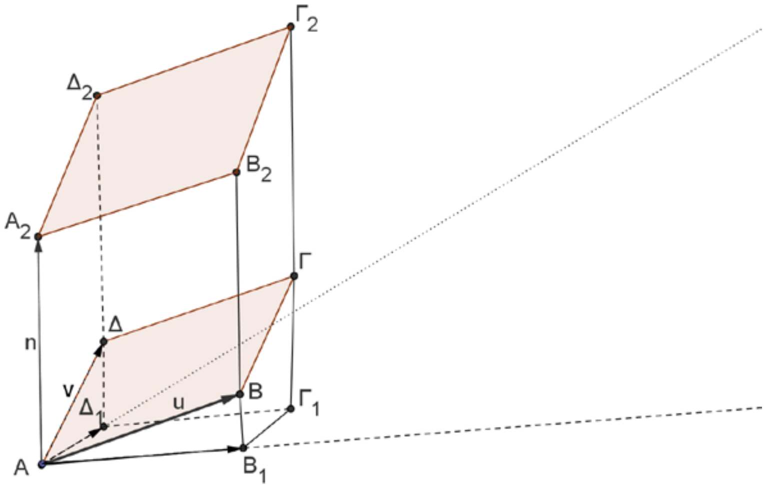
$$\frac{\alpha+1}{2}-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma+3}{2}-12=0 \Leftrightarrow \alpha-\beta-\gamma=26 \qquad (2)$$

Από το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) λαμβάνουμε: $\mathrm{P}'\left(\dfrac{31}{3},-\dfrac{28}{3},-\dfrac{19}{3}\right)$.

7. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε της ορθογώνιας προβολής του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ με $\mathbf{AB}=\mathbf{u}$, $\mathbf{A\Delta}=\mathbf{v}$ πάνω σε ένα επίπεδο με κάθετο διάνυσμα **n**, $|\mathbf{n}|=1$, δίνεται από την ισότητα

$$\mathrm{E}=\left|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}\right|.$$

Λύση (1ος τρόπος)



Σχήμα 7

Το επίπεδο Π στο σχήμα ταυτίζεται με το επίπεδο της ορθής προβολής $\mathrm{AB_1\Gamma_1\Delta_1}$. Η ορθή προβολή $\mathrm{AB_1\Gamma_1\Delta_1}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες, ως τομές παράλληλων επιπέδων από το επίπεδο Π. Έτσι, αν ονομάσουμε $\mathbf{AB_1} = \mathbf{u_1}, \mathbf{A\Delta_1} = \mathbf{v_1}$, τότε το εμβαδόν Ε της ορθογώνιας προβολής του ΑΒΓΔ είναι: $\mathrm{E} = |\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v_1}|$. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το παραλληλεπίπεδο $\mathrm{AB\Gamma\Delta A_2B_2\Gamma_2\Delta_2}$ που ορίζεται από τα διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ και $\mathbf{n}$ του οποίου ο όγκος V δίνεται από τον τύπο

$$\mathrm{V} = |(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n})| = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}| \qquad (1)$$

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα της Στερεομετρίας, (δες Γεωμετρία Λύκειου, ΕΜΕ) ο όγκος V μπορεί να δοθεί και ως εξής:

$$\mathrm{V} = (\textit{εμβαδόν κάθετης τομής}) \cdot (\textit{μήκος παράπλευρης ακμής})$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{V} = \mathrm{E}(\mathrm{AB_1\Gamma_1\Delta_1}) \cdot |\mathbf{n}| = \mathrm{E} \cdot 1 = \mathrm{E} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει η ισότητα $\mathrm{E} = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}|$.

2^{ος} τρόπος

Από το γνωστό τύπο της προβολής διανύσματος πάνω σε διάνυσμα, εκφράζουμε τα διανύσματα $\mathbf{AB_1} = \mathbf{u_1}, \mathbf{A\Delta_1} = \mathbf{v_1}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\mathbf{AB} = \mathbf{u}$, $\mathbf{A\Delta} = \mathbf{v}$ και $\mathbf{n}$. Έτσι έχουμε

$$\mathbf{u_1} = \mathbf{u} - \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\right)\mathbf{n} = \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n},\ \mathbf{v_1} = \mathbf{v} - \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\right)\mathbf{n} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n},$$

αφού είναι $|\mathbf{n}| = 1$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι:

$$\mathbf{u_1} \times \mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{n} \ \text{ και } \ \mathbf{v_1} \times \mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{n}$$

και από τις ιδιότητες του μικτού γινομένου προκύπτει

$$\begin{aligned} |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}| &= |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{n})| = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{n})| = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{n}| \\ &= |-(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}| = |(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}| = |\mathbf{v_1} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{n})| \\ &= |\mathbf{v_1} \cdot (\mathbf{u_1} \times \mathbf{n})| = |(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n}| = |(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{n}| \\ &= |\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}_1||\mathbf{n}||\cos(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}_1, \mathbf{n})| = |\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}_1| = \mathrm{E}, \end{aligned}$$

γιατί $|\mathbf{n}| = 1$ και $\cos(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}_1, \mathbf{n}) = \pm 1$, αφού τα $\mathbf{u_1} \times \mathbf{v_1}$ και $\mathbf{n}$ είναι συγγραμμικά.

8. Γράφουμε

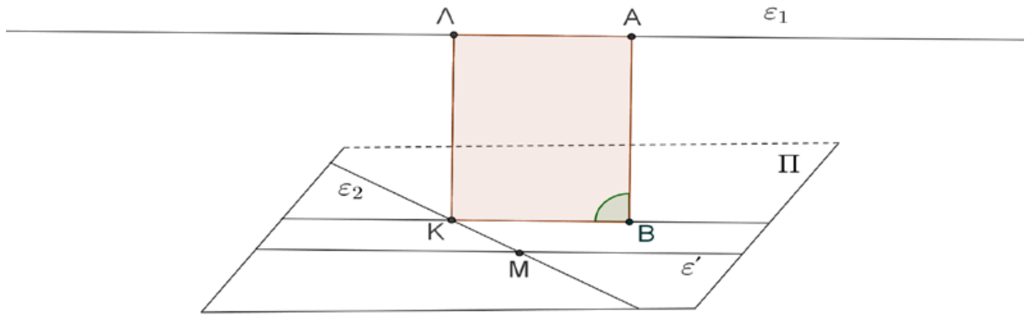
$$\varepsilon_1 : \frac{x-10}{1} = \frac{y}{-1}, z = 3 \text{ και } \varepsilon_2 : \frac{x\text{-}2}{3} = \frac{y}{1}, z = 0$$

Έστω $\mathrm{A}_2(2,0,0) \in \varepsilon_2$. Η ευθεία $\varepsilon_3 \parallel \varepsilon_1$ που περνάει από το A_2 έχει εξισώσεις:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1}, z = 0.$$

Το επίπεδο Π έχει εξίσωση $z = 0$. Θεωρούμε $\mathrm{M}(4,6,3) \in \varepsilon_1$ και φέρουμε ευθεία $\varepsilon_4 \perp \Pi$. Η ε_4 έχει εξισώσεις $x = 4, y = 6$ και τέμνει το Π στο σημείο Β(4,6,0).

Η ευθεία η κάθετη από το Β προς την ε_2 έχει εξισώσεις $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-6}{-1}, z = 0$ και τέμνει την ε_2 στο σημείο



Σχήμα 8

9. (i) $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ συνεπίπεδες $\Leftrightarrow \overrightarrow{P_2P_1}, \vec{a}, \vec{b}$ συνεπίπεδα $\Leftrightarrow (\overrightarrow{P_2P_1}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$

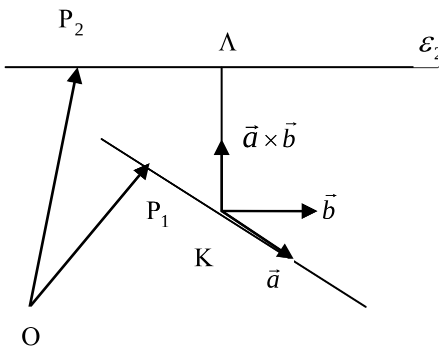
$$\Leftrightarrow (\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{a}, \vec{b}) = 0.$$

(ii) Η προβολή του $\overrightarrow{P_2P_1}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{a}\times\vec{b}$ είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{\Lambda\mathrm{K}}$, οπότε

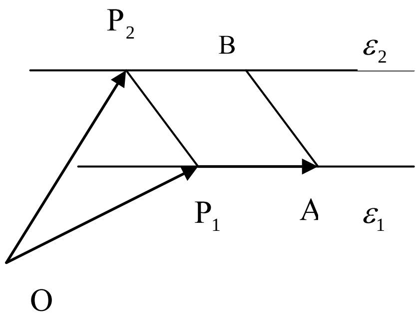
$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\overrightarrow{P_2P_1} = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\overrightarrow{\Lambda\mathrm{K}} \Leftrightarrow (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \pm\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\overrightarrow{\Lambda\mathrm{K}}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{a}, \vec{b})\right| = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\overrightarrow{\Lambda\mathrm{K}}\right| \Leftrightarrow d = \left|\overrightarrow{\Lambda\mathrm{K}}\right| = \frac{\left|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{a}, \vec{b})\right|}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}.$$

(Είναι $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| \neq 0,$ αφού οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι ασύμβατες.)



Σχήμα 9



Σχήμα 10

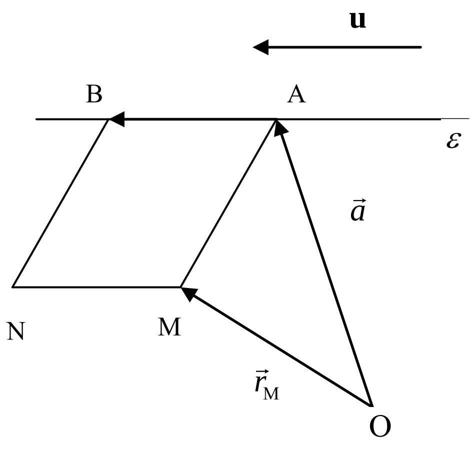
(iii) Είναι $d = \left|\overrightarrow{\mathrm{K}\Lambda}\right|$, όπου $\mathrm{K}\Lambda \perp \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$. Θεωρούμε επί της ε_1 σημείο A τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{\mathrm{P_1A}} = \vec{a}$ και σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο $\mathrm{P_2P_1AB}$. Τότε έχουμε

$$\mathrm{E(P_2P_1AB)} = \left|\overrightarrow{\mathrm{P_1A}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{K}\Lambda}\right| = |\vec{a}|\,d \Leftrightarrow d = \frac{\left|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\times\vec{a}\right|}{|\vec{a}|}.$$

10. Θεωρούμε σημείο $\mathrm{B} \in \varepsilon$ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{u} \parallel \varepsilon$. Επίσης θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΜΑΒΝ. Τότε $\mathrm{E(MABN)} = d(\mathrm{M},\varepsilon)\left|\vec{u}\right|$ και

$\mathrm{E(MABN)} = \left|\overrightarrow{\mathrm{AM}} \times \vec{u}\right| = \left|(\vec{r}_M - \vec{a}) \times \vec{u}\right|$,

οποτε $d(\mathrm{M},\varepsilon) = \dfrac{\left|(\vec{r}_M - \vec{a}) \times \vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}$.



Σχήμα 11

Εφαρμογή: Είναι

$\vec{r}_M = (1,2,-1), \vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1,2,2)$,

$\vec{r}_M - \vec{a} = (-1,3,-5), (\vec{r}_M - \vec{a}) \times \vec{u} = 11\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$

και $d(M,\varepsilon) = \dfrac{\sqrt{155}}{3}$.