Γραμμική Άλγεβρα
Εργασία 3

1. (α) Έστω $W = \langle v_1, v_2, ..., v_{k-1}, v_k \rangle$ και έστω ότι το διάνυσμα v_k είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $v_1, ..., v_{k-1}$. Να δειχθεί ότι $W = \langle v_1, v_2, ..., v_{k-1} \rangle$.
(β) Με χρήση του (α) να βρεθεί μία βάση γιά την γραμμική θήκη των $v_1 = (1, -2, 1), v_2 = (-1, 3, 2), v_3 = (0, 1, 4), v_4 = (0, 4, 2), v_5 = (2, -2, 3)$.

2. (α) Έστω $v_1, ..., v_n$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του διανυσματικού χώρου V. Να δειχθεί ότι

$$v_k \notin \langle v_1, v_2, ..., v_{k-1} \rangle \iff \text{τα } v_1, ..., v_{k-1}, v_k \text{ είναι γραμμικά ανεξάρτητα}$$

(β) με χρήση του (α) και ξεκινώντας από το $v_1 = (1, 2, 3)$ να κατασκευασθεί μία βάση του $\mathbb{R}^3$

3. Έστω

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\}\, ;\, V_2 = \langle (1, -1, 1), (2, 0, 3) \rangle$$

(α) Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση των υπόχωρων $V_1, V_2, V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$ του $\mathbb{R}^3$.
(β) Να βρεθεί υπόχωρος V_3 του $\mathbb{R}^3$ έτσι ώστε $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_3$.

4. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ γραμμική απεικόνιση με $f(e_1) = (1, -1), f(e_2) = (0, 3), f(e_3) = (2, 1)$, όπου e_1, e_2, e_3 η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.
(α) Να βρεθεί ο τύπος και ο πίνακας της f ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$.
(β) Να βρεθούν οι $Kerf$, Imf και να ερμηνευθούν γεωμετρικά.
(γ) Να επαληθευθεί το Θεώρημα Διάστασης Γραμμικής Απεικόνισης.

5. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ με $f(x, y, z) = P \in \mathbb{R}^3$ όπου P η προβολή του σημείου (x, y, z) στο επίπεδο $x - 2y + z = 0$.
(α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείοιυ P συναρτήσει των x, y, z.
(β) Να γραφεί ο τύπος της απεικόνισης f και να δειχθεί ότι είναι γραμμική.