ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

634

ΑΝΤΩ ΝΙΟΣ ΜΕΛΑΣ

ΑΘΗΝΑ
2012

1. ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

1.1 Παραμετρικές Καμπύλες.

Μια παραμετρική καμπύλη είναι η τροχιά ενός κινητού στο επίπεδο xy. Για να περιγράψουμε την τροχιά αυτή δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.1.1 Κάθε διαφορίσιμη απεικόνιση $\gamma:I\to\mathbf{R}^2$ όπου το I είναι ένα διάστημα της ευθείας των πραγματικών αριθμών $\mathbf{R}$ ονομάζεται *(επίπεδη) παραμετρική καμπύλη*. Η εικόνα της απεικόνισης $\gamma(I)\subseteq\mathbf{R}^2$ ονομάζεται *ίχνος* της καμπύλης γ.

Διαφορίσιμη εδώ θα σημαίνει ότι αν γράψουμε $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ οι πραγματικές συναρτήσεις $x,y:I\to\mathbf{R}$ έχουν συνεχείς παραγώγους όλων των τάξεων, είναι δηλαδή $\boldsymbol{C}^\infty$, στο I (στην περίπτωση που το διάστημα I είναι κλειστό, διαφορίσιμη θα σημαίνει ότι κάθε παράγωγος επεκτείνεται συνεχώς στα άκρα του διαστήματος). Οι συναρτήσεις $x,y:I\to\mathbf{R}$ μπορεί να θεωρηθεί ότι δίνουν τις συντεταγμένες (τετμημένη και τεταγμένη) της θέσης στην οποία βρίσκεται το κινητό την χρονική στιγμή t.

Το ίχνος μιας καμπύλης μπορεί να περιγράφεται με διάφορους τρόπους. Μπορεί δηλαδή να δίνεται (α) από μια καρτεσιανή εξίσωση (π.χ. ο κύκλος $x^2+y^2=1$), (β) σαν γράφημα μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $y=f(x)$ (π.χ. η παραβολή $y=x^2$), (γ) από μια εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες (π.χ. ο κύκλος $r=1$) κλπ. Σε κάθε περίπτωση πρέπει να βρούμε μια κατάλληλη απεικόνιση γ που να δίνει το ζητούμενο ίχνος διαλέγοντας κατάλληλα την *παράμετρο t*. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται *παραμετρικοποίηση* και μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους.

Παραδείγματα: (1) Ο κύκλος $x^2+y^2=1$ μπορεί να παραμετρικοποιηθεί ως εξής:

$$\gamma(t)=(x(t),y(t))=(\text{συν}t,\text{ημ}t),\ t\in[0,2\pi].$$

Στην περίπτωση αυτή το t είναι η γωνία που σχηματίζει η ακτίνα του κύκλου στο τυχαίο σημείο του με τον x-άξονα το δε κινητό διαγράφει τον κύκλο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα και με φορά αντίθετη από αυτήν των δεικτών του ρολογιού. Η παραμετρικοποίηση $\gamma_1(t)=(\text{συν}2t,-\text{ημ}2t)$, $t\in[0,\pi]$ περιγράφει επίσης τον κύκλο αλλά τον διαγράφει με διπλάσια γωνιακή ταχύτητα και κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού.

(2) Η έλλειψη $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ μπορεί να παραμετρικοποιηθεί με την $\gamma(t)=(a\text{συν}t,b\text{ημ}t)$, $t\in[0,2\pi]$.

(3) Η $\gamma(t)=(x(t),y(t))=(x_0+at,y_0+bt)$, $t\in\mathbf{R}$ είναι μια παραμετρικοποίηση της ευθείας που περνάει από το σημείο (x_0,y_0) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ διαγράφεται Δε ομόρροπά προς αυτό καθώς το t αυξάνει.

(4) Για να βρούμε την καρτεσιανή εξίσωση του ίχνους μιας παραμετρικής καμπύλης πρέπει να απαλείψουμε το t από τις δύο εξισώσεις $x=x(t),y=y(t)$.Έτσι η παραμετρικοποίηση $x=x(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2},y=y(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ αν υψώσουμε στο τετράγωνο και προσθέσουμε παίρνουμε την εξίσωση $x^2-y^2=1$και την συνθήκη $x>0$ δηλαδή το δεξιό κλάδο μιας ισοσκελούς υπερβολής.

(5) Το γράφημα μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ μπορεί να παραμετρικοποιηθεί χρησιμοποιώντας το x σαν παράμετρο δηλαδη με την $\gamma(t)=(t,f(t))$, $t\in(a,b)$. Έτσι η $\gamma(t)=(t,t^2)$, $t\in\mathbf{R}$ παραμετρικοποιεί το γράφημα της συνάρτησης $y=f(x)=x^2$ (δηλαδή μια παραβολή).

(6) Το σύνολο που περιγράφεται από μια εξίσωση $r=f(\theta)$ σε πολικές συντεταγμένες μπορεί να παραμετρικοποιηθεί ως εξής: $\gamma(t)=(x(t),y(t))=(f(t)\text{συν}t,\ f(t)\text{ημ}t)$ χρησιμοποιώντας δηλαδή το θ σαν παράμετρο.

(7) Η απεικόνιση $\gamma(t)=(t,|t|)$ δεν είναι διαφορίσιμη αφού η δεύτερη συντεταγμένη της δεν έχει παράγωγο στο 0 και άρα δεν είναι παραμετρική καμπύλη.

(8) Μια παραμετρική καμπύλη μπορεί να μην έχει εφαπτομένη με την έννοια της γεωμετρίας. Η $\gamma(t)=(t^3,t^2)$, $t\in\mathbf{R}$ παραμετρικοποιεί το γράφημα της συνάρτησης $y=f(x)=x^{2/3}$ το οποίο δεν έχει εφαπτομένη στο $x=0$.

(9) *Η κυκλοειδής*. Έστω κύκλος ακτίνας 1 ο οποίος αρχικά εφάπτεται του x-άξονα στο σημείο (0,0) και Ρ σταθερό σημείο του που αρχικά συμπίπτει με το (0,0). Η τροχιά που διαγράφει το Ρ καθώς ο κύκλος κυλάει χωρίς να γλιστράει πάνω στον x-άξονα ονομάζεται κυκλοειδής. Για να παραμετρικοποιήσουμε την παραπάνω τροχιά θεωρούμε ότι η γωνιακή ταχύτητα του Ρ κατά την κίνηση του κύκλου είναι σταθερή και ίση με ένα και χρησιμοποιούμε για παράμετρο τον χρόνο t. Τότε κατά την χρονική στιγμή t το σημείο επαφής μεταξύ του κύκλου και του x-άξονα είναι το $\mathrm{A}(t,0)$ το κέντρο του κύκλου βρίσκεται στο σημείο $\mathrm{K}(t,1)$ η δε γωνία ΑΚΡ είναι ίση με t. Συνεπώς το μοναδιαίο διάνυσμα ΚΡ σχηματίζει γωνία $\frac{3\pi}{2}-t$ με τον x-άξονα άρα $\mathrm{KP}=(-\text{ημ}t,-\text{συν}t)$ και άρα $\mathrm{OP}=\mathrm{OK}+\mathrm{KP}=(t,1)+$ $+(-\text{ημ}t,-\text{συν}t)$. Δηλαδή η απεικόνιση $\gamma(t)=(t-\text{ημ}t,1-\text{συν}t)$, $t\geq 0$ παραμετρικοποιεί την κυκλοειδή. Παρατηρούμε ότι στην χρονική στιγμή $t=2\pi$ ο κύκλος θα έχει εκτελέσει μια πλήρη περιστροφή και το Ρ θα είναι ξανά στη θέση επαφής του κύκλου με τον x-άξονα. Όμοιως για $t=2n\pi$ όπου n ακέραιος. Σχεδιάζοντας δε την τροχιά αυτή παρατηρούμε ότι στις θέσεις $t=2n\pi$ η τροχιά δεν έχει εφαπτομένη.

Βλέπουμε ότι κάποιες από τις καμπύλες των παραδειγμάτων δεν έχουν σε κάποια σημεία τους εφαπτομένη (με την έννοια της γεωμετρίας). Ευκολά μπορεί όμως να δει κανείς ότι στις περιπτώσεις που δεν υπάρχει εφαπτομένη έχουμε και $\gamma'(t_0)=\mathbf{0}$. Το διάνυσμα $\gamma'(t_0)$ παριστάνει την ταχύτητα κίνησης. Για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη εφαπτομένης δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.1.2. Μια καμπύλη $\gamma{:}I\to\mathbf{R}^2$ θα λέγεται *ομαλή* αν $\gamma'(t)\neq\mathbf{0}$ για κάθε $t\in I$

.

Αν τωρα μια καμπύλη είναι ομαλή και $t_0\in I$ η χορδή που συνδέει τα σημεία της $\gamma(t_0)$ και $\gamma(t_0+h)$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\frac{\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)}{h}$ το οποίο τείνει στο $\gamma'(t_0)\neq\vec{0}$ καθώς το $h\to 0$ και άρα η παραπάνω χορδή έχει σαν οριακή θέση για $h\to 0$ την ευθεία που περνάει από το $\gamma(t_0)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\gamma'(t_0)\neq\mathbf{0}$. Η ευθεία αυτή που ονομάζεται *εφαπτομένη* της καμπύλης στο $\gamma(t_0)$ έχει παραμετρική εξίσωση

$$\varepsilon(s)=\gamma(t_0)+(s-t_0)\gamma'(t_0),\ s\in\mathbf{R}.$$

Συνεπώς αν μια καμπύλη είναι ομαλή έχει εφαπτομένη σε κάθε σημείο της. Το αντίστροφο δεν ισχύει όμως. Δηλαδή μια παραμετρική καμπύλη μπορεί να έχει εφαπτομένη χωρίς να είναι ομαλή π.χ. η παραμετρικοποίηση $\gamma(t)=(t^3,t^3)$, $t\in\mathbf{R}$ της ευθείας $y=x$ δεν είναι ομαλή στο $t=0$. Στην συνέχεια θα θεωρούμε μόνο ομαλές καμπύλες. Για αυτές ισχύει το εξής,

Πρόταση 1.1.1 Έστω $\gamma{:}I\to\mathbf{R}^2$ μια ομαλή καμπύλη και $a\in I$ ένα *εσωτερικό* σημείο του πεδίου ορισμού της. Τότε υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε το $(a-\delta,a+\delta)\subseteq I$ και το σύνολο $\gamma((a-\delta,a+\delta))\subseteq\mathbf{R}^2$ να είναι γράφημα διαφορίσιμης συνάρτησης της μορφής $y=f(x)$ ή της μορφής $x=g(y)$ (η και των δύο).

Απόδειξη. Γράφοντας $\gamma(t)=(p(t),q(t))$ η σχέση $\gamma'(a)\neq\mathbf{0}$ συνεπάγεται ότι τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς $p'(a),q'(a)$ δεν είναι 0. Έστω π.χ. ότι $p'(a)>0$. Τότε υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα $(a-\delta,a+\delta)\subseteq I$ με $p'(t)>0$ για κάθε $t\in(a-\delta,a+\delta)$. Συνεπώς η συνάρτηση p είναι γνησίως αύξουσα στο $(a-\delta,a+\delta)$ και έχει διαφορίσιμη αντίστροφη $p^{-1}{:}J\to(a-\delta,a+\delta)$. Θέτουμε τώρα $f(x)=q(p^{-1}(x))$. Η $f{:}J\to\mathbf{R}$ είναι διαφορίσιμη και επιπλέον ισχύει "$(x,y)=(p(t),q(t))$ με $t\in(a-\delta,a+\delta)$" αν και μόνο αν "$y=f(x)$" (όπου $x=p(t)$) δηλαδή το σύνολο $\gamma((a-\delta,a+\delta))\subseteq\mathbf{R}^2$ είναι το γράφημα της διαφορίσιμης συνάρτησης $y=f(x)$, $x\in J$. Ανάλογα εργάζεται κανείς στις άλλες περιπτώσεις (αν $q'(a)\neq 0$ τότε θα προκύψει γράφημα της μορφής $x=g(y)$).□

Παράδειγμα. Για τον κύκλο $\gamma(t)=(x(t),y(t))=(\text{συν}t,\text{ημ}t)$, $t\in[0,2\pi]$ και $t=\pi$ ($\gamma(\pi)=(-1,0)$) βλέπουμε ότι το τόξο του $\gamma\left(\left(\pi-\frac{\pi}{2},\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)$ είναι το γράφημα της συνάρτησης $x=-\sqrt{1-y^2}$, $y\in(-1,1)$ αλλά κανένα τόξο γύρω από το $\gamma(\pi)$ δεν είναι γράφημα της μορφής $y=f(x)$ διότι για κάθε $\varepsilon\in(0,1)$ η ευθεία $x=-1+\varepsilon$ τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία.

1.2 Μήκος Τόξου Καμπύλης. Αλλαγή Παραμέτρου.

Για να βρούμε την απόσταση που έχει διανύσει ένα κινητό ολοκληρώνουμε το μέτρο της ταχύτητάς του στο χρονικό διάστημα της κίνησης. Ορίζουμε δηλαδή το μήκος μιας καμπύλης ως εξής:

Ορισμός 1.2.1 Έστω $\gamma:[a,b]\to\mathbf{R}^2$ ομαλή καμπύλη ($\gamma(t)=(x(t),y(t))$). Το μήκος της $l(\gamma)$ ορίζεται ως εξής:

$$l(\gamma)=\int_a^b|\gamma'(t)|dt=\int_a^b\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt\,.$$

Παράδειγμα Για την κυκλοειδή $\gamma(t)=(t-\text{ημ}t,1-\text{συν}t)$, $t\in[0,2\pi]$ έχουμε:

$$l(\gamma)=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\text{συν}t)^2+\text{ημ}^2t}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\text{συν}t)}\,dt=\int_0^{2\pi}2\text{ημ}\frac{t}{2}\,dt=8.$$

Ορισμός 1.2.2 Έστω $\beta:I\to\mathbf{R}^2$, $\gamma:J\to\mathbf{R}^2$, ομαλές καμπύλες. Θα λέμε ότι η β προκύπτει από την γ με αλλαγή της παραμέτρου αν υπάρχει διαφορίσιμη, γνησίως μονότονη και επί συνάρτηση $\varphi:I\to J$ με $\varphi'(s)\neq0$ στο I (άρα η φ^{-1} ορίζεται και είναι διαφορίσιμη) τέτοια ώστε:

$$\beta(s)=\gamma(\varphi(s)) \text{ για κάθε } s\in J.$$

Αν η φ είναι γνησίως αύξουσα θα λέμε ότι οι β,γ έχουν την ίδια φορά ενώ αν είναι γνησίως φθίνουσα , αντίθετη φορά. Όσο για τα μήκη των καμπύλων β,γ ισχύει:
$l(\beta)=\int_I|\beta'(s)|ds=\int_I|\gamma'(\varphi(s))||\varphi'(s)|ds=\int_J|\gamma'(t)|dt=l(\gamma)$, έχουν δηλαδή το ίδιο μήκος.

Παράδειγμα. Η $\beta(s)=(\text{συν}2s,\text{ημ}2s)$, $s\in[0,\pi]$ προκύπτει από την $\gamma(t)=(\text{συν}t,\text{ημ}t)$, $t\in[0,2\pi]$ με την αλλαγή παραμέτρου φ: $[0,\pi]\to[0,2\pi]$ όπου $\varphi(s)=2s$.

Για την μελέτη της γεωμετρίας μιας καμπύλης είναι σημαντικό να έχουμε $|\gamma'(t)|=1$ για κάθε t. Δηλαδή η κίνηση πάνω στην καμπύλη γίνεται με σταθερή ταχύτητα 1.

Ορισμός 1.2.3 Θα λέμε ότι η ομαλή καμπύλη $\gamma:I\to\mathbf{R}^2$ είναι παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου αν $|\gamma'(t)|=1$ για κάθε $t\in I$.

Στην περίπτωση αυτή για κάθε $[\alpha,\beta]\subseteq I$ το μήκος του τόξου της γ για $\alpha\leq t\leq\beta$ είναι ίσο με $\beta-\alpha$.

Πρόταση 1.2.1 Έστω $\gamma:I\to\mathbf{R}^2$ ομαλή καμπύλη. Το η γ μπορεί να παραμετρικοποιηθεί ως προς το μήκος τόξου δηλαδή υπάρχει ομαλή καμπύλη $\beta:J\to\mathbf{R}^2$ παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου, και τέτοια ώστε η β να προκύπτει από την γ με αλλαγή παραμέτρου.

Απόδειξη. Έστω $\alpha\in I$ σταθερό. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$\lambda(t)=\int_a^t|\gamma'(u)|du \text{ για } t\in I.$$

Αφού η καμπύλη είναι ομαλή έχουμε $\lambda'(t)=|\gamma'(t)|\neq0$ για κάθε $t\in I$. Συνεπώς η $\lambda:I\to\lambda(I)=J$ είναι γνησίως αύξουσα με διαφορίσιμη αντίστροφη $\varphi=\lambda^{-1}:J\to I$. Η καμπύλη $\beta:J\to I$ με $\beta(s)=\gamma(\varphi(s))$ προκύπτει από την γ μεαλλαγή παραμέτρου και επιπλέον έχουμε $|\beta'(s)|=|\gamma'(\varphi(s))||\varphi'(s)|=$(παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης)$=|\gamma'(\varphi(s))||\lambda'(\varphi(s))|^{-1}=1$ για κάθε $s\in J$, συνεπώς η β είναι παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου. □

Η απόδειξη της παραπάνω πρότασης δίνει και την μέθοδο εύρεσης της παραμετρικοποίησης ως προς το μήκος τόξου όπως φαίνεται στο επόμενο.

Παράδειγμα. Θέλουμε να παραμετρικοποιήσουμε ως προς το μήκος τόξου την λογαριθμική σπείρα $\gamma(t)=(e^t\text{συν}t,e^t\text{ημ}t)$, $t\in[0,+\infty)$. Έχουμε $|\gamma'(t)|^2=$
$=[e^t(-\text{συν}t+\text{ημ}t)]^2+[e^t(\text{ημ}t+\text{συν}t)]^2=2e^{2t}$. Άρα $\lambda(t)=\int_0^t\sqrt{2}e^u du=\sqrt{2}(e^t-1)$ και συνεπώς

$\varphi(s)=\log(\frac{s}{\sqrt{2}}+1)$ και η ζητούμενη παραμετρικοποίηση είναι:

$$\beta(s)=((\frac{s}{\sqrt{2}}+1)\text{συν}\log(\frac{s}{\sqrt{2}}+1),(\frac{s}{\sqrt{2}}+1)\text{ημ}\log(\frac{s}{\sqrt{2}}+1)) \quad s\in[0,+\infty).$$

1.3 Καμπυλότητα επίπεδης καμπύλης.

Έστω $\gamma{:}I\to\mathbf{R}^2$ ομαλή καμπύλη παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου. Τότε για $s\in I$ το (μοναδιαίο) διάνυσμα $\mathbf{T}(s)=\gamma'(s)$ ονομάζεται *μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα* της καμπύλης στο αντίστοιχο σημείο. Ορίζεται επίσης μονοσήμαντα το διάνυσμα $\mathbf{n}(s)$ έτσι ώστε τα $(\mathbf{T}(s), \mathbf{n}(s))$ να αποτελούν μια θετικά προσανατολισμένη ορθοκανονική βάση του $\mathbf{R}^2$ (δηλ. που προκύπτει από στροφή της κανονικής βάσης $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$), το οποίο ονομάζεται *μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα*. Οι $\mathbf{T},\mathbf{n}$ είναι διαφορίσιμες διανυσματικές συναρτήσεις του s. Αν $\gamma(s)=(x(s),y(s))$ τότε έχουμε:

$$\mathbf{T}(s)=(x'(s),y'(s)) \text{ και } \mathbf{n}(s)=(-y'(s), x'(s)) \text{ για κάθε } s\in I.$$

Πρόταση 1.3.1 Αν η διαφορίσιμη διανυσματική συνάρτηση $\boldsymbol{\alpha}{:}I\to\mathbf{R}^2$ ικανοποιεί την σχέση $|\boldsymbol{\alpha}(s)|=1$ για κάθε $s\in I$ τότε $\boldsymbol{\alpha}(s).\boldsymbol{\alpha}'(s)=0$ για κάθε $s\in I$ δηλαδή για κάθε $s\in I$ το $\boldsymbol{\alpha}'(s)$ είναι ή κάθετο στο $\boldsymbol{\alpha}(s)$ ή το μηδενικό διάνυσμα.

Η παραπάνω πρόταση αποδεικνύεται παραγωγίζοντας την σχέση $\boldsymbol{\alpha}(s).\boldsymbol{\alpha}(s)=|\boldsymbol{\alpha}(s)|^2=$σταθ.$=1$. Για την περίπτωση της $\mathbf{T}$ συμπεραίνουμε ότι το διάνυσμα της επιτάχυνσης $\mathbf{T}'(s)=\gamma''(s)=(x''(s),y''(s))$ είναι συγγραμμικό με το $\mathbf{n}(s)$ και άρα υπάρχει μια διαφορίσιμη (γιατί;) συνάρτηση $k{:}I\to\mathbf{R}$ τέτοια ώστε $\mathbf{T}'(s)=k(s)\mathbf{n}(s)$ για κάθε $s\in I$.

Ορισμός 1.3.1 Ονομάζουμε καμπυλότητα της ομαλής (παραμετρικοποιημένης ως προς το μήκος τόξου) καμπύλης $\gamma{:}I\to\mathbf{R}^2$ την συνάρτηση $k{:}I\to\mathbf{R}$ τέτοια ώστε $\mathbf{T}'(s)=k(s)\mathbf{n}(s)$ για κάθε $s\in I$.

Η απόλυτη τιμή της καμπυλότητας δίνει το μέτρο της κεντρομόλου επιταχύνσεως κατά την κίνηση πάνω στην καμπύλη με σταθερή ταχύτητα 1. Όσο γοα το πρόσημό της είναι + αν κινούμενοι κατά μήκος της καμπύλης, η καμπύλη στρέφει τα κοίλα προς τα αριστερά μας αλλιώς είναι $-$.

Αφού έχουμε $\mathbf{T}\times\mathbf{n}=\mathbf{k}$ (εξωτερικό γινόμενο) προκύπτει ότι $\gamma'(s)\times\gamma''(s).\mathbf{k}=\mathbf{T}(s)\times k(s)\mathbf{n}(s).\mathbf{k}=k(s)$. Άρα $k(s)=x'(s)y''(s)-x''(s)y'(s)$. Επειδή όμως συνήθως το να παραμετρικοποιήσει κανείς μια καμπύλη ως προς το μήκος τόξου είναι υπολογιστικά δυσχερές (ή και αδύνατο) η ακόλουθη πρόταση μας επιτρέπει να υπολογίζουμε την καμπυλότητα για οποιαδήποτε ομαλή καμπύλη.

Πρόταση 1.3.2 Έστω $\gamma{:}I\to\mathbf{R}^2$ ομαλή καμπύλη (όχι αναγκαστικά παραμ. ως προς το μήκος τόξου) $\gamma(t)=(x(t),y(t))$. Τότε η καμπυλότητά της δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$k(t)=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{3/2}} \text{ για κάθε } t\in I.$$

Απόδειξη. Έστω β καμπύλη παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου που προκύπτει από την γ με αλλαγή παραμέτρου (Πρόταση 1.2.1). Τότε η καμπυλότητα της β στο s είναι ίση με $\beta'(s)\times\beta''(s).\mathbf{k}$. Δεδομένου ότι $\beta(s)=\gamma(\varphi(s))$ έχουμε $\beta'(s)=\gamma'(\varphi(s))\varphi'(s)$ και $\beta''(s)=\gamma''(\varphi(s))(\varphi'(s))^2+\gamma'(\varphi(s))\varphi''(s)$ και αφού $\gamma'(\varphi(s))\times\gamma'(\varphi(s))=\mathbf{0}$ παίρνουμε
$\beta'(s)\times\beta''(s).\mathbf{k}=(\gamma'(\varphi(s))\times\gamma''(\varphi(s)).\mathbf{k})(\varphi'(s))^3=(x'(\varphi(s))y''(\varphi(s))-x''(\varphi(s))y'(\varphi(s)))\,(\varphi'(s))^3$.
Επίσης από την απόδειξη της πρότασης 1.2.1 έχουμε αν $t=\varphi(s)$ τότε $\varphi'(s)=|\gamma'(t)|^{-1}$ και άρα η καμπύλότητα της γ στο $t=\varphi(s)$ θα δίνεται από την σχέση $k(t)=(x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t))\,|\gamma'(t)|^{-3}$.□

Παραδείγματα. 1) Κάθε ευθεία $\gamma(t)=(x_0+at,y_0+bt)$ έχει προφανώς καμπυλότητα ταυτοτικά 0. Αντιστρόφως αν η γ έχει καμπυλότητα ταυτοτικά 0 και β είναι παραμετρικοποίηση της γ ως προς το μήκος τόξου τότε $\beta''=\mathbf{0}$ και άρα αν s_0 είναι σταθερό σημείο του πεδίου ορισμού της β τότε $\beta(s)=\beta(s_0)+(s-s_0)\beta'(s_0)$ και άρα η γ έχει ίχνος τμήμα ευθείας. Δηλαδή μια ομαλή καμπύλη έχει καμπυλότητα ταυτοτικά 0 αν και μόνο αν το ίχνος της περιέχεται σε μία ευθεία.
2) Ο κύκλος $\gamma(t)=(\rho\text{συν}t,\rho\text{ημ}t)$ ακτίνας ρ έχει σταθερή καμπυλότητα ίση με 1/ρ όπως εύκολα προκύπτει από την παραπάνω πρόταση.
3) Το γράφημα μιας συνάρτησης $y=f(x)$ μπορεί να παραμετρικοποιηθεί ως $(t,f(t))$ και άρα η καμπυλότητα δίνεται από τον τύπο: $k(x)=\dfrac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{3/2}}$.

Έστω $\gamma{:}I\to\mathbf{R}^2$ ομαλή καμπύλη παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου. Η καμπυλότητα $k(s)$ της γ μπορεί να ερμηνευτεί γεωμετρικά γράφοντας $\mathbf{T}(s)=(\text{συν}\theta(s),\text{ημ}\theta(s))$, αφού το **T** είναι μοναδιαίο, όπου θ:$I\rightarrow$**R** είναι διαφορίσιμη. (η γωνία $\theta(s)$ ορίζεται μόνο ως προς ακέραια πολλαπλάσια του 2π. Παρόλα αυτά αποδεικνύεται ότι αν επιλέξουμε θ_0 και $s_0\in I$ ώστε $\mathbf{T}(s_0)$=(συνθ_0,ημθ_0) τότε υπάρχει μοναδική και διαφορίσιμη θ:$I\rightarrow$**R** με $\mathbf{T}(s)$=(συν$\theta(s)$,ημ$\theta(s)$) και $\theta(s_0)=\theta_0$). Θα έχουμε άρα $\mathbf{n}(s)$=(−ημ$\theta(s)$,συν$\theta(s)$) ενώ $\gamma''(s)=\mathbf{T}'(s)$= (−$\theta'(s)$ημ$\theta(s)$,$\theta'(s)$συν$\theta(s)$) συνεπώς

$$k(s)=\theta'(s) \text{ για κάθε } s\in I.$$

Δηλαδή η καμπυλότητα μιας καμπύλης είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της με τον άξονα των x καθώς κινούμαστε πάνω στην καμπύλη με σταθερή ταχύτητα. Η παραπάνω σχέση μας επιτρέπει να αποδείξουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 1.3.1 (Θεμελιώδες Θεώρημα της θεωρίας των επίπεδων καμπύλων) Έστω I διάστημα και k:$I\rightarrow$**R** μια διαφορίσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει ομαλή καμπλύλη γ:$I\rightarrow\mathbf{R}^2$ παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου με καμπυλότητα ίση με k. Αν β:$I\rightarrow\mathbf{R}^2$ είναι άλλη μια τέτοια καμπύλη τότε η β προκύπτει από την γ με κάποια στερεά κίνηση δηλαδή συνδιασμό στροφής και μεταφορά

Απόδειξη. Γράφοντας $\mathbf{T}(s)$=(συν$\theta(s)$,ημ$\theta(s)$) θα έχουμε $k(s)=\theta'(s)$ για κάθε $s\in I$. Συνεπώς $\theta(s)$=! $k(s)ds+C$ όπου C είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Αφού όμως $\mathbf{T}(s)=(x'(s),y'(s))$ παίρνουμε τελικά $\gamma(s)$=(!συν(! $k(s)ds+C)ds+a$, !ημ(! $k(s)ds+C)ds+b$) όπου a,b είναι αυθαίρετες σταθερές. Δηλαδή αφ'ενός μεν υπάρχει τουλάχιστον μια καμπύλη γ όπως στο θεώρημα αφ'ετέρου δε κάθε άλλη καμπύλη με τις ίδιες ιδιότητες προκύπτει από την γ με αλλαγή κάποιων από τις τρείς αυθαίρετες σταθερές a,b και C. Είναι επίσης εύκολο να δει κανείς ότι μεταβολή των a,b αντιστοιχεί σε μεταφορά της γ ενώ μεταβολή της C σε στροφή της.□

Ορισμός 1.3.2 Η εξίσωση $k=k(s)$ (καμπυλότητα σαν συνάρτηση του μήκους τόξου) ονομάζεται φυσική εξίσωση της αντίστοιχης καμπύλης.

Το Θεώρημα 1.3.1 συνεπώς λέει ότι κάθε εξίσωση $k=k(s)$ περιγράφει μια μοναδική, εκτός από στροφές και μεταφορές καμπύλη, συνεπώς περιγράφει την καμπύλη ανεξάρτητα από το σύστημα συντεταγμένων. Έτσι μπορεί να μιλάει κανείς για την φυσική εξίσωση του κύκλου ακτίνας 1 κλπ. Η απόδειξη του θεωρήματος μας δίνει ένα τρόπο υπολογισμού της αντίστοιχης καμπύλης. Π.χ. αν θέλουμε να βρούμε την καμπύλη με φυσική εξίσωση $k=1$ έχουμε $\theta(s)=s+C$ και άρα $\gamma(s)$=(ημ$(s+C)+a$,−συν$(s+C)+b$) δηλαδή (ανάλογα με το πεδίο ορισμού για το s) τόξα κύκλων ακτίνας 1. Μερικές όμως φορές είναι πιο εύκολο να βρούμε παραμετρικοποίηση της γ όχι αναγκαστικά ως προς το μήκος τόξου ως εξής.

Αν $k\neq 0$ στο I κάνουμε την αντικατάσταση $\theta=\theta(s)=\int k(s)ds$ οπότε $d\theta=k(s)ds$ εκφράζουμε την k συναρτήσει του θ, $k=k(\theta)$, και παίρνουμε την παραμετρική καμπύλη:

$$\gamma(\theta)=\left(\int R(\theta)\text{συν}\theta d\theta, \int R(\theta)\text{ημ}\theta d\theta\right) \quad \text{όπου } R(\theta)=\frac{1}{k(\theta)}.$$

Παράδειγμα. Για να βρούμε μια καμπύλη με φυσική εξίσωση $k=1/s$, $s>0$, παίρνουμε (διαλέγοντας κατάλληλα τις σταθερές ολοκλήρωσης) $\theta(s)=\log s$ άρα $s=e^{\theta}$, $\theta\in$**R** και $k(\theta)=e^{-\theta}$. Συνεπώς $\gamma(\theta)=(\int e^{\theta}\text{συν}\theta d\theta, \int e^{\theta}\text{ημ}\theta d\theta)=(\frac{1}{2}e^{\theta}(\text{συν}\theta+\text{ημ}\theta), \frac{1}{2}e^{\theta}(-\text{συν}\theta+\text{ημ}\theta))$, $\theta\in$**R**.

Το $|R(s)|$ ονομάζεται *ακτίνα καμπυλότητος* στο $\gamma(s)$. Για να βρούμε την γεωμετρική της σημασία θεωρούμε $s_0\in I$ τέτοιο ώστε $k(s_0)\neq 0$. Παίρνουμε $s_1,s_2,s_3\in I$ αρκετά κοντά στο s_0 και τέτοια ώστε τα αντίστοιχα σημεία της καμπύλης να μην είναι συνευθειακά οπότε και ορίζεται ο κύκλος κέντρου $C(s_1,s_2,s_3)$ και ακτίνας $r(s_1,s_2,s_3)$ που διέρχεται από τα $\gamma(s_1),\gamma(s_2),\gamma(s_3)$. Αποδεικνύεται ότι με την υπόθεση $k(s_0)\neq 0$ οι κύκλοι αυτοί καθώς τα $s_1,s_2,s_3\rightarrow s_0$ τείνουν σε κάποιον οριακό κύκλο ο οποίος προσεγγίζει την καμπύλη κοντά στο s_0 καλύτερα από κάθε άλλο κύκλο. Ο κύκλος αυτός ονομάζεται **εγγύτατος κύκλος** της γ στο s_0. Έστω $C(s_0)$ το κέντρο του και $r(s_0)$ η ακτίνα του. Για να υπολογίσουμε τα παραπάνω παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(s)=|\gamma(s)-C(s_1,s_2,s_3)|^2$ ικανοποιεί την $f(s_1)=f(s_2)=f(s_3)$ και άρα υπάρχουν s^*,s^{**} στο διάστημα που ορίζουν τα s_1,s_2,s_3 τέτοια ώστε $f'(s^*)=f''(s^{**})=0$. Υπολογίζοντας τις δύο παραγώγους της f παίρνουμε $f'(s)=2\gamma'(s)\mathbf{.}(\gamma(s)-C(s_1,s_2,s_3))$ και $f''(s)=2\gamma''(s)\mathbf{.}(\gamma(s)-C(s_1,s_2,s_3))+2|\gamma'(s)|^2=2k(s)\mathbf{n}(s)\mathbf{.}(\gamma(s)-C(s_1,s_2,s_3))+2$

συνεπώς $\mathbf{T}(s^*).(\gamma(s^*)-C(s_1,s_2,s_3))=0$ και $k(s^{**})\mathbf{n}(s^{**}).(\gamma(s^{**})-C(s_1,s_2,s_3))+1=0$. Επίσης $s^*,s^{**}\to s_0$ καθώς τα $s_1,s_2,s_3\to s_0$. Άρα $\mathbf{T}(s_0).(\gamma(s_0)-C(s_0))=0$ και $k(s_0)\mathbf{n}(s_0).(\gamma(s_0)-C(s_0))=-1$. Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$\gamma(s_0)-C(s_0)=-\frac{1}{k(s_0)}\mathbf{n}(s_0)=-R(s_0)\mathbf{n}(s_0) \text{ και } r(s_0)=|\gamma(s_0)-C(s_0)|=|R(s_0)|.$$

Συμπεραίνουμε άρα ότι ο εγγύτατος κύκλος της γ στο s_0 έχει κέντρο το σημείο

$$C(s_0)=\gamma(s_0)+R(s_0)\mathbf{n}(s_0)$$

(ονομάζεται **κέντρο καμπυλότητος**) και ακτίνα ίση με την ακτίνα καμπυλότητος $|R(s_0)|$. Η εξίσωσή του άρα είναι $|\mathbf{x}-\gamma(s_0)-R(s_0)\mathbf{n}(s_0)|=|R(s_0)|$. Ο εγγύτατος κύκλος έχει επίσης την ακόλουθη ιδιότητα: κατά την κίνηση κατά μήκος της γ με σταθερή ταχύτητα 1 η κεντρομόλος επιτάχυνση στο s_0 είναι ίση (σαν διάνυσμα) με την αντίστοιχη κεντρομόλο επιτάχυνση στο $\gamma(s_0)$ της ομαλής κυκλικής κίνησης με ταχύτητα 1 πάνω στον αντίστοιχο εγγύτατο κύκλο. Έχει δηλαδή κατεύθυνση προς το κέντρο καμπυλότητος και μέτρο $1/|R(s_0)|$.

1.4 Κλειστές Καμπύλες.

Ορισμός 1.4.1 Η ομαλή καμπύλη $\gamma:[a,b]\to\mathbf{R}^2$ ονομάζεται κλειστή αν ισχύουν οι εξής σχέσεις: $\gamma(a)=\gamma(b)$, $\gamma'(a)=\gamma'(b)$, $\gamma''(a)=\gamma''(b),\ldots, \gamma^{(n)}(a)=\gamma^{(n)}(b),\ldots$.

Πρέπει δηλαδή όλες οι παράγωγοι της να συμφωνούν στο αρχικό και τελικό σημείο. Αυτό συνεπάγεται ότι η γ είναι ο περιορισμός μίας περιοδικής απεικόνισης $\Gamma:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ (με περίοδο $b-a$). Έτσι ο κύκλος $\gamma(t)=(\text{συν}t,\text{ημ}t)$, $t\in[0,2\pi]$ είναι κλειστή καμπύλη ενώ η $\beta(t)=(\text{ημ}2t\text{συν}t, \text{ημ}2t\text{ημ}t)$, $t\in[0,\pi/2]$ δεν είναι παρόλο που $\beta(0)=\beta(\pi/2)$.

Ορισμός 1.4.2 Η ομαλή καμπύλη $\gamma:[a,b]\to\mathbf{R}^2$ ονομάζεται απλή αν $\gamma(t_1)\neq\gamma(t_2)$ για κάθε $t_1,t_2\in[a,b)$ με $t_1\neq t_2$.

Αν τώρα $\gamma:[0,l]\to\mathbf{R}^2$ είναι μια κλειστή καμπύλη παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου τότε έχουμε $\gamma'(s)=(\text{συν}\theta(s),\text{ημ}\theta(s))$ όπου $\theta(s)=\int k(s)ds+C$. Η σχέση άρα $\gamma'(0)=\gamma'(l)$ δίνει $\theta(l)-\theta(0)=2m\pi$ όπου ο m είναι ακέραιος. Ο m μετράει πόσες φορές το εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{T}(s)=\gamma'(s)$ στέφεται γύρω από τον εαυτό του καθώς διατρέχουμε την κλειστή καμπύλη.

Ορισμός 1.4.3 Ο ακέραιος αριθμός $m=\frac{1}{2\pi}\int_0^l k(s)ds$ ονομάζεται δείκτης στροφής της καμπύλης.

Τα επόμενα Θεωρήματα (των οποίων οι αποδείξεις παραλείπονται) είναι βασικά για την θεωρία των κλειστών καμπύλων.

Θεώρημα 1.4.1 (Jordan) Αν $\gamma:[0,l]\to\mathbf{R}^2$ είναι μια απλή και κλειστή καμπύλη τότε το ανοικτό σύνολο $\mathbf{R}^2\backslash\gamma([0,l])$ έχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες (εκ των οποίων η μια είναι φραγμένη και η άλλη όχι) οι οποίες έχουν κοινό σύνορο το $\gamma([0,l])$.

Θεώρημα 1.4.2 (Θεώρημα των στρεφόμενων εφαπτομένων) Αν $\gamma:[0,l]\to\mathbf{R}^2$ είναι μια απλή και κλειστή καμπύλη τότε ο δείκτης στροφής της είναι ίσος με ±1. Δηλαδή

$$\int_0^l k(s)ds=\pm2\pi\ .$$

Θεώρημα 1.4.3 (Ισοπεριμετρική ανισότητα) Αν l είναι το μήκος μιας απλής κλειστής καμπύλης γ και A είναι το εμβαδόν της φραγμένης συνεκτικής συνιστώσας του $\mathbf{R}^2\backslash\gamma([0,l])$ τότε ισχύει η ανισότητα $l^2\geq4\pi A$ με τον ίσον αν και μόνον αν η γ είναι κύκλος. Δηλαδή από όλες τις απλές κλειστές καμπύλες με το ίδιο μήκος ο κύκλος περικλείει το μέγιστο εμβαδόν.

Ορισμός 1.4.3 Η ομαλή καμπύλη $\gamma:[a,b]\to\mathbf{R}^2$ ονομάζεται κυρτή αν για κάθε $t\in[a,b]$ το ίχνος της $\gamma([a,b])$ βρίσκεται εξ ολοκλήρου στο ένα από τα δύο (κλειστά) ημιεπίπεδα που ορίζει η εφαπτομένη της στο $\gamma(t)$.

Ισχύει το ακόλουθο (η απόδειξη παραλείπεται):

Θεώρημα 1.4.3 Μια ομαλή κλειστή καμπύλη είναι κυρτή αν και μόνο αν είναι απλή και η καμπύλότητά της k δεν αλλάζει πρόσημο, το οποίο συμβαίνει αν και μόνο αν η φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του συμπληρώματος του ίχνους της είναι ένα κυρτό υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$.

Σημεία μιας καμπύλης όπου η καμπυλότητα έχει τοπικό ακρότατο, δηλαδή η καμπύλη στρέφεται ή πιο απότομα ή το λιγότερο απότομα από ότι στα κοντινά τους σημεία ονομάζονται κορυφές. Γενικώτερα δίνουμε τον ακόλουθο:

Ορισμός 1.4.4 Έστω η ομαλή καμπύλη $\gamma:[a,b]\to\mathbf{R}^2$. Το σημείο της $\gamma(t_0)$, $t_0\in[a,b]$ ονομάζεται κορυφή της γ αν το t_0 είναι στάσιμο σημείο για την καμπυλότητά της γ δηλαδή αν $k'(t_0)=0$.

Παραδείγματος χάριν μπορεί να δεί κανείς ότι η έλλειψη $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a<b$) έχει ακριβώς τέσσερεις κορυφές (τα σημεία τομής της με τους άξονες) ενώ φυσικά κάθε σημείο ενός κύκλου είναι κορυφή. Σχετικώς θα αποδείξουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 1.4.4 (Το Θεώρημα των τεσσάρων κορυφών) Κάθε (ομαλή) απλή κλειστή και κυρτή καμπύλη έχει τουλάχιστον τέσσερεις κορυφές.

Απόδειξη. Έστω $\gamma:[0,l]\to\mathbf{R}^2$ $\gamma(s)=(x(s),y(s))$ είναι μια απλή κλειστή και κυρτή καμπύλη παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου. Αφού η καμπυλότητά της k είναι συνεχής συνάρτηση θα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Θα υπάρχουν άρα $s_1,s_2\in[0,l]$ με $k(s_1)$ μέγιστο και $k(s_2)$ ελάχιστο. Τα σημεία $p=\gamma(s_1)$ και $q=\gamma(s_2)$ είναι προφανώς κορυφές της γ και αφού η καμπύλη είναι κυρτή η ευθεία pq τέμνει την γ μόνο στα p,q. Με στροφή και μεταφορά της καμπύλης μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ευθεία αυτή συμπίπτει με τον x-άξονα. Έστω τώρα γ_+ το τόξο της καμπύλης που βρίσκεται στο πάνω ημιεπίπεδο $\{y>0\}$ και γ_- το τόξο που βρίσκεται στο κάτω ημιεπίπεδο η δεύτερη συντεταγμένη της γ ικανοποιεί τις σχέσεις $y(s)>0$ στο γ_+ και $y(s)<0$ στο γ_-. Αν η καμπύλη δεν είχε άλλες κορυφές τότε η k' δεν θα αλλάζει πρόσημο ούτε στο γ_+ ούτε στο γ_-. Άρα θα έχουμε:

$$0\neq\int_0^l y(s)k'(s)ds=y(l)k(l)-y(0)k(0)-\int_0^l y'(s)k(s)=-\int_0^l \vartheta'(s)\,\text{ημ}\,\vartheta(s)ds=\text{συν}\,\vartheta(l)-\text{συν}\,\vartheta(0)=0$$

άτοπο. Άρα η γ έχει μία τουλάχιστον κορυφή ακόμη, έστω στο γ_+ και η k' αλλάζει πρόσημο στο γ_+. Αφού όμως το p είναι σημείο μεγίστου και το q σημείο ελαχίστου για την k η k' πρέπει να αλλάζει και δεύτερη φορά πρόσημο στο γ_+. Συνεπώς η γ έχει τουλάχιστον τέσσερεις κορυφές. (Έχουμε δείξει ότι η k έχει τουλάχιστον δύο σχετικά μέγιστα και τουλάχιστον δύο σχετικά ελάχιστα).□

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει για απλές κλειστές καμπύλες γενικά αλλά η απόδειξη είναι πιο δύσκολη.

Ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε καθεμιά από τις παρακάτω καμπύλες: (i) $\gamma(t)=(\text{συν}3t\,\text{συν}t,\text{συν}3t\,\text{ημ}t)$, $t\in[0,2\pi]$, (ii) $\gamma(t)=(\text{συν}4t\,\text{συν}t,\text{συν}4t\,\text{ημ}t)$, $t\in[0,2\pi]$, (iii) $\gamma(t)=(t-2,t^2+1)$, $t\in\mathbf{R}$ και να υπολογίσετε την καμπυλότητά τους.
2. Για τις διάφορες τιμές του $a\geq 0$ να σχεδιαστεί η καμπύλη $\gamma_a(t)=((a+\text{συν}t)\text{συν}t,(a+\text{συν}t)\text{ημ}t)$, $t\in[0,2\pi]$ και να βρεθούν όλες οι τιμές του a για της οποίες η καμπύλη γ_a είναι ομαλή.
3. Να βρείτε παραμετρικοποίηση ως προς το μήκος τόξου της καμπύλης που προκύπτει από σημείο P κύκλου ακτίνας 1 που κυλάει χωρίς να ολισθαίνει (μένοντας εξωτερικά εφαπτόμενος) πάνω σε κύκλο ακτίνας $a>1$. Πότε είναι η καμπύλη αυτή κλειστή; (Η αρχική θέση του P είναι στο $(a,0)$). Να υπολογίσετε την καμπυλότητά της όπου ορίζεται.
4. Να βρείτε την φυσική εξίσωση των παρακάτω καμπύλων: (i) Της κυκλοειδούς $\gamma(t)=(t-\text{ημ}t,1-\text{συν}t)$, $t\in(0,2\pi)$, (ii) Του γραφήματος της $y=\cosh x=(e^x+e^{-x})/2$, $x\in\mathbf{R}$.
5. (i) Να βρεθεί καμπύλη $\gamma:(-1,1)\to\mathbf{R}^2$ με φυσική εξίσωση $(1-s^2)^{1/2}\,k(s)=1$. (ii) Ομοίως για την $2sk(s)^2=1$, $s>0$.
6. Να δείξετε ότι αν όλες οι εφαπτόμενες ευθείες μιας ομαλής καμπύλης διέρχονται από σταθερό σημείο τότε η καμπύλη περιέχεται σε μια ευθεία.
7. Να βρείτε ποιες ομαλές καμπύλες έχουν την ιδιότητα όλες οι κάθετες τους να διέρχονται από σταθερό σημείο (κάθετος είναι η ευθεία που διέρχεται από το $\gamma(s)$ και είναι παράλληλη στο $\mathbf{n}(s)$).
8. Αν $\gamma:I\to\mathbf{R}^2$ είναι μια ομαλή καμπύλη παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου και $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ είναι τα αντίστοιχα μοναδιαία εφαπτόμενα και κάθετα διανύσματα να υπολογίσετε το $\mathbf{n}'(s)$.

9. Αν $\gamma:I\to\mathbf{R}^2$ είναι μια ομαλή καμπύλη με $k(t)\neq 0$ στο I θεωρούμε την καμπύλη $\beta(t)=\gamma(t)+\dfrac{1}{k(t)}\mathbf{n}(t)$ που γράφουν τα κέντρα καμπυλότητας της γ. (i) Να δείξετε ότι αν $k'(t)\neq 0$ η εφαπτομένη της β στο $\beta(t)$ ταυτίζεται με την κάθετη της γ στο $\gamma(t)$. (ii) Να βρείτε και να σχεδιάσετε την β που αντιστοιχεί στην έλλειψη $\gamma(t)=(a\sigma\upsilon\nu t, b\eta\mu t)$, $t\in[0,2\pi]$.
10. Υπάρχει απλή κλειστή (ομαλή) καμπύλη $\gamma:[0,\partial]\to\mathbf{R}^2$ με φυσική εξίσωση: (i) $k(s)=2+\eta\mu 2s$, (ii) $k(s)=1+\eta\mu 8s$, (iii) $k(s)=4(s+\sigma\upsilon\nu 16s)/\pi$;
11. *Να υπολογίσετε την καμπυλότητα μιας ομαλής καμπύλης που δίνεται από την καρτεασιανή εξίσωση $f(x,y)=0$ (υποθέτοντας ότι $\nabla f(x,y)\neq\mathbf{0}$ για κάθε (x,y) με $f(x,y)=0$).
12. Έστω $\gamma:[0,l]\to\mathbf{R}^2$ ομαλή και απλή κλειστή καμπύλη παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου τέτοια ώστε $0<k(s)\leq 1$ για κάθε s. Να δείξετε ότι για το μήκος της l ισχύει η ανισότητα $l\geq 2\pi$.
13. Έστω $\gamma:[0,l]\to\mathbf{R}^2$ ομαλή καμπύλη και $s_0\in[0,l]$ τέτοια ώστε το $\gamma(s_0)$ να απέχει από την αρχή των αξόνων την μέγιστη απόσταση. Να δείξετε ότι $|k(s_0)|\geq 1/|\gamma(s_0)|$.
14. *Έστω $\gamma:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ ομαλή καμπύλη παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου τέτοια ώστε $0<k(s)\leq\dfrac{1}{1+s^2}$ για κάθε $s\in\mathbf{R}$. Να δείξετε ότι η γ είναι απλή δηλαδή $\gamma(s_1)\neq\gamma(s_2)$ αν $s_1,s_2\in\mathbf{R}$, $s_1\neq s_2$.
15. Οι παραβολή $y=x^2$ προκύπτει από την $y=\sqrt{x}$ με στροφή κατά 90^o. Συνεπώς και οι δύο θα ικανοποιούν την ίδια φυσική εξίσωση. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφεί στην μορφή $\left(\dfrac{dR}{ds}\right)^2=9(\sqrt[3]{4R^2}-1)$ όπου $R=1/k$ είναι η ακτίνα καμπυλότητας.
16. *Έστω $\gamma_1,\gamma_2:I\to\mathbf{R}^2$ ομαλές καμπύλες παραμετρικοποιημένες ως προς το μήκος τόξου. Υποθέτουμε ότι η καμπύλη $\gamma(s)=\gamma_1(s)+\gamma_2(s)$, $s\in I$ είναι ομαλή. Αν $k_1(s),k_2(s),k(s)$ είναι οι καμπυλότητες των $\gamma_1(s),\gamma_2(s),\gamma(s)$ αντίστοιχα και $\varphi(s)\in[0,\pi)$ η γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες των γ_1,γ_2 στα σημεία $\gamma_1(s),\gamma_2(s)$ αντίστοιχα να δείξετε ότι: $k(s)=\dfrac{k_1(s)+k_2(s)}{4\sigma\upsilon\nu(\varphi(s)/2)}$.

2. ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ

2.1 Παρεματρικές καμπύλες. Καμπυλότητα.

Παραμετρική καμπύλη στον χώρο θα λέγεται κάθε διαφορίσιμη απεικόνιση $\gamma:I\to\mathbf{R}^3$ όπου το I είναι ένα διάστημα της ευθείας των πραγματικών αριθμών $\mathbf{R}$ ονομάζεται *παραμετρική καμπύλη* στον χώρο. Η εικόνα της απεικόνισης $\gamma(I)\subseteq\mathbf{R}^3$ ονομάζεται *ίχνος* της καμπύλης γ. Όπως και στις επίπεδες καμπύλες η γ θα λέγεται *ομαλή* αν $\gamma'(t)\neq\mathbf{0}$ για κάθε $t\in I$.

Αν τωρα μια καμπύλη είναι ομαλή και $t_0\in I$ η ευθεία που έχει παραμετρική εξίσωση $\varepsilon(s)=\gamma(t_0)+(s-t_0)\gamma'(t_0)$, $s\in\mathbf{R}$ ονομάζεται *εφαπτομένη* της καμπύλης στο $\gamma(t_0)$. Αν $I=[a,b]$ και $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$ το μήκος της θα δίνεται από την

$$l(\gamma)=\int_a^b|\gamma'(t)|dt=\int_a^b\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

Θα λέμε ότι η ομαλή καμπύλη $\gamma:I\to\mathbf{R}^3$ είναι παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου αν $|\gamma'(t)|=1$ για κάθε $t\in I$. Στην περίπτωση αυτή για κάθε $[\alpha,\beta]\subseteq I$ το μήκος του τόξου της γ για $\alpha\leq t\leq\beta$ είναι ίσο με $\beta-\alpha$. Όπως και στις επίπεδες καμπύλες κάθε ομαλή καμπύλη γ μπορεί να παραμετρικοποιηθεί ως προς το μήκος τόξου δηλαδή υπάρχει ομαλή καμπύλη $\beta:J\to\mathbf{R}^3$ παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου, και τέτοια ώστε η β να προκύπτει από την γ με αλλαγή παραμέτρου δηλαδή υπάρχει μια διαφορίσιμη, γνησίως μονότονη και επί συνάρτηση $\varphi:I\to J$ με $\varphi'(s)\neq 0$ στο I και τέτοια ώστε: $\beta(s)=\gamma(\varphi(s))$ για κάθε $s\in J$. Η απόδειξη καθώς και η μέθοδος ευρέσεως της παραμετρικοποίησης αυτής είναι όμοια με την περίπτωση των επίπεδων καμπύλων.

Παραδείγματα. 1) Η $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))=(x_0+at,y_0+bt,z_0+ct)$, $t\in\mathbf{R}$ είναι μια παραμετρικοποίηση της ευθείας που περνάει από το σημείο (x_0,y_0,z_0) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$.

2) Η έλικα $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))=(\alpha\sigma\upsilon\nu t,\alpha\eta\mu t,bt)$, $t\in\mathbf{R}$ προκύπτει από την σύνθεση μιας ομαλής κυκλικής κίνησης στο xy-επίπεδο και μιας ευθύγραμμης ομαλής κίνησης στην διεύθυνση του z-άξονα. Το μήκος του τόξου της για θα δίνεται από την $s=\lambda(t)=\int_0^t|\gamma'(u)|du=t\sqrt{a^2+b^2}$ απ' όπου προκύπτει και η αντίστοιχη παραμετρικοποίηση της ως προς το μήκος τόξου.

Έστω τώρα $\gamma:I\to\mathbf{R}^3$ ομαλή καμπύλη παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου. Τότε για $s\in I$ το (μοναδιαίο) διάνυσμα $\mathbf{T}(s)=\gamma'(s)$ ονομάζεται *μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα* της καμπύλης στο αντίστοιχο σημείο. Δεδομένου όμως ότι στον χώρο δεν μπορεί να οριστεί κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}$ μονοσήμαντα η καμπυλότητα ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 2.1.1 Ονομάζουμε καμπυλότητα της ομαλής (παραμετρικοποιημένης ως προς το μήκος τόξου) καμπύλης $\gamma:I\text{->}\mathbf{R}^3$ την συνάρτηση $k:I\to\mathbf{R}$ τέτοια ώστε $k(s)=|\mathbf{T}'(s)|=|\gamma''(s)|$ για κάθε $s\in I$.

Θα ασχοληθούμε μόνο με καμπύλες στο χώρο για τις οποίες $k(s)\neq 0$ για κάθε $s\in I$. (Σημεία μιας καμπύλης στον χώρο όπου η καμπυλότητα μηδενίζεται ονομάζονται *ιδιάζοντα τάξης* 1). Για μια τέτοια καμπύλη αφού $\gamma'(s).\gamma''(s)=0$ και $\gamma''(s)\neq\mathbf{0}$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n}(s)$ κάθετο στο $\mathbf{T}(s)$ με

$$\gamma''(s)=\mathbf{T}'(s)=k(s)\mathbf{n}(s).$$

Το $\mathbf{n}(s)$ ονομάζεται το *μοναδιαίο κάθετο* (ή *πρώτο κάθετο*) διάνυσμα της καμπύλης.

Ορισμός 2.1.1 Το επίπεδο που διέρχεται από το $\gamma(s)$ και είναι παράλληλο στα $\mathbf{T}(s)$ και $\mathbf{n}(s)$ ονομάζεται *εγγύτατο επίπεδο* της γ στο s.

Ο όρος εγγύτατο επίπεδο μπορεί να δικαιολογηθεί όπως και στην περίπτωση του εγγύτατου κύκλου στις επίπεδες καμπύλες. Πράγματι έστω $s_0\in I$ τέτοιο ώστε $k(s_0)\neq 0$. Παίρνουμε $s_1,s_2,s_3\in I$ αρκετά κοντά στο s_0 και τέτοια ώστε τα αντίστοιχα σημεία της καμπύλης να μην είναι συνεπίπεδα οπότε και ορίζεται το κύκλος επίπεδο που διέρχεται από τα $\gamma(s_1),\gamma(s_2),\gamma(s_3)$. Έστω $\mathbf{a}(s_1,s_2,s_3).\mathbf{x}=c(s_1,s_2,s_3)$ η εξίσωσή του με το $\mathbf{a}(s_1,s_2,s_3)$ μοναδιαίο. Αποδεικνύεται ότι με την υπόθεση $k(s_0)\neq 0$ τα επίπεδα αυτά καθώς τα $s_1,s_2,s_3\to s_0$ τείνουν σε κάποιο οριακό επίπεδο το οποίο προσεγγίζει την καμπύλη κοντά στο s_0 καλύτερα από κάθε άλλο. Έστω $\mathbf{a}(s_0).\mathbf{x}=c(s_0)$ η εξίσωσή του οριακού αυτού επιπέδου. Για να το υπολογίσουμε παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(s)=\mathbf{a}(s_1,s_2,s_3).\gamma(s)$ ικανοποιεί την $f(s_1)=f(s_2)=f(s_3)$ και άρα υπάρχουν s^*, s^{**} στο διάστημα που ορίζουν τα s_1,s_2,s_3 τέτοια ώστε $f'(s^*)=f''(s^{**})=0$. Αφού $s^*,s^{**}\to s_0$ καθώς τα $s_1,s_2,s_3\to s_0$ συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{a}(s_0).\gamma'(s_0)=\mathbf{a}(s_0).\gamma''(s_0)=0$ δηλαδή αφού $k(s_0)\neq 0$ ότι $\mathbf{a}(s_0).\mathbf{T}(s_0)=\mathbf{a}(s_0).\mathbf{n}(s_0)=0$. Συνεπώς το οριακό αυτό επίπεδο είναι αυτό που ορίστηκε σαν το εγγύτατο επίπεδο της γ στο $\gamma(s_0)$. Όπως προκύπτει από τα παραπάνω η εξίσωση του εγγύτατου επιπέδου θα είναι:

$$\gamma'(s_0)\times\gamma''(s_0).(\mathbf{x}-\gamma(s_0))=0$$

ή σε μορφή ορίζουσας:

$$\begin{vmatrix} x-x(s_0) & y-y(s_0) & z-z(s_0) \\ x'(s_0) & y'(s_0) & z'(s_0) \\ x''(s_0) & y''(s_0) & z''(s_0) \end{vmatrix}=0.$$

Ορισμός 2.1.3 Το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{b}(s)=\mathbf{T}(s)\times\mathbf{n}(s)$, κάθετο στο εγγύτατο επίπεδο της γ στο $\gamma(s)$ ονομάζεται *δεύτερο κάθετο* διάνυσμα της γ στο $\gamma(s)$. Ο κύκλος του εγγύτατου επιπέδου με κέντρο $\gamma(s)+R(s)\mathbf{n}(s)$ και ακτίνα $R(s)=1/k(s)$ (ακτίνα καμπυλότητας) ονομάζεται *εγγύτατος κύκλος* της γ στο s.

Αν η καμπύλη ανήκει σε κάποιο επίπεδο τότε προφανώς αυτό θα συμπίπτει με το εγγύτατό επίπεδό της και άρα το $\mathbf{b}$ θα είναι σταθερό.

Σχετικά με τον υπολογισμό της καμπυλότητας για κάθε ομαλή καμπύλη παρατηρώντας ότι $k(s)=|\mathbf{T}'(s)\times\mathbf{T}(s)|=|\gamma'(s)\times\gamma''(s)|$ έχουμε την ακόλουθη:

Πρόταση 2.1.1 Έστω $\gamma:I\to\mathbf{R}^3$ ομαλή καμπύλη (όχι αναγκαστικά παραμ. ως προς το μήκος τόξου), $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$. Τότε η καμπυλότητά της δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$k(t)=\frac{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}=\frac{\left\|\begin{matrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x'(t) & y'(t) & z'(t)\\ x''(t) & y''(t) & z''(t)\end{matrix}\right\|}{(x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2)^{3/2}} \text{ για κάθε } t\in I.$$

Η απόδειξη του παραπάνω είναι όμοια με αυτή της Πρότασης 1.3.2.

2.2 Στρέψη. Το τρίεδρο Frenet.

Έστω τώρα $\gamma:I\to\mathbf{R}^3$ ομαλή καμπύλη παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου με $k(s)\neq 0$ για κάθε $s\in I$ και έστω $\mathbf{b}(s)$ το αντίστοιχο δεύτερο κάθετο διάνυσμα. Το $\mathbf{b}'(s)$ είναι ουσιαστικά η ταχύτητα μεταβολής του εγγύτατου επιπέδου της γ. Το $|\mathbf{b}'(s)|$ μετράει δηλαδή την τάση της καμπύλης να *μην* είναι επίπεδη. Έχουμε τώρα $\mathbf{b}'.\mathbf{b}=0$ (αφού το $\mathbf{b}$ είναι μοναδιαίο) και επιπλέον
$\mathbf{b}'=(\mathbf{T}\times\mathbf{n})'=\mathbf{T}'\times\mathbf{n}+\mathbf{T}\times\mathbf{n}'=\mathbf{T}\times\mathbf{n}'$ αφού $\mathbf{T}'=k\mathbf{n}$ άρα $\mathbf{b}'.\mathbf{T}=0$. Συνεπώς το $\mathbf{b}'$ είναι παράλληλο του $\mathbf{n}$.

Ορισμός 2.2.1 Ονομάζουμε *στρέψη* της καμπύλης $\gamma:I\to\mathbf{R}^3$ με $k(s)\neq 0$ για κάθε $s\in I$ την διαφορίσιμη συνάρτηση $\tau:I\to\mathbf{R}$ με

$$\mathbf{b}'(s)=-\tau(s)\mathbf{n}(s) \text{ για κάθε } s\in I.$$

Για κάθε τώρα $s\in I$ ορίζεται η θετικά προσανατολισμένη ορθοκανονική βάση $<\mathbf{T}(s),\mathbf{n}(s),\mathbf{b}(s)>$ η οποία είναι προσαρμοσμένη στην καμπύλη στο s. Το σύστημα των τριών διανυσματικών συναρτήσεων $<\mathbf{T},\mathbf{n},\mathbf{b}>$ ονομάζεται το **τρίεδρο Frenet** της γ.

Θέλουμε να βρούμε τώρα τις εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση του τριέδρου αυτού καθώς το κινητό κινείται πάνω στην καμπύλη. Έχουμε ήδη δεί ότι $\mathbf{T}'(s)=k(s)\mathbf{n}(s)$ και $\mathbf{b}'(s)=-\tau(s)\mathbf{n}(s)$. Όσο για το $\mathbf{n}'(s)$ παρατηρούμε ότι $\mathbf{n}=\mathbf{b}\times\mathbf{T}$ και άρα
$\mathbf{n}'(s)=\mathbf{b}'(s)\times\mathbf{T}(s)+\mathbf{b}(s)\times\mathbf{T}'(s)=-\tau(s)\mathbf{n}(s)\times\mathbf{T}(s)+k(s)\mathbf{b}(s)\times\mathbf{n}(s)$. Συνεπώς έχουμε τις εξής βασικές εξισώσεις της κίνησης του τριέδρου:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds}=k\mathbf{n}$$
$$\frac{d\mathbf{n}}{ds}=-k\mathbf{T}+\tau\mathbf{b}$$
$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}=-\tau\mathbf{n}$$

Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν την γεωμετρία της καμπύλης γ. Το αντίστοιχο τρίεδρο ορίζει τρία χαρακτηριστικά για την καμπύλη επίπεδα.

Ορισμός 2.2.2 (i) Το επίπεδο που διέρχεται από το $\gamma(s)$ και είναι παράλληλο στα $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ ονομάζεται *εγγύτατο επίπεδο* της γ στο s. Η εξίσωσή του είναι $\mathbf{b}(s).(\mathbf{x}-\gamma(s))=0$.

(ii) Το επίπεδο που διέρχεται από το $\gamma(s)$ και είναι παράλληλο στα $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ ονομάζεται *κάθετο επίπεδο* της γ στο s. Η εξίσωσή του είναι $\mathbf{T}(s).(\mathbf{x}-\gamma(s))=0$.

(iii) Το επίπεδο που διέρχεται από το $\gamma(s)$ και είναι παράλληλο στα $\mathbf{b}(s)$, $\mathbf{T}(s)$ ονομάζεται *ευθειοποιόν επίπεδο* της γ στο s. Η εξίσωσή του είναι $\mathbf{n}(s).(\mathbf{x}-\gamma(s))=0$.

Για να υπολογίσουμε την στρέψη της γ έχουμε $\gamma'=\mathbf{T}$, $\gamma''=k\mathbf{n}$ άρα $k\mathbf{b}=\gamma'\times\gamma''$ και $k'\mathbf{b}+k\mathbf{b}'=\gamma''\times\gamma''+\gamma'\times\gamma'''$. Συνεπώς $\tau k^2=-k\mathbf{n}.(k'\mathbf{b}+k\mathbf{b}')=-\gamma''.(\gamma'\times\gamma''')=(\gamma'\times\gamma'').\gamma'''$. Άρα

$$\tau(s)=\frac{1}{k(s)^2}\begin{vmatrix} x'(s) & y'(s) & z'(s)\\ x''(s) & y''(s) & z''(s)\\ x'''(s) & y'''(s) & z'''(s)\end{vmatrix}.$$

Για τον υπολογισμό της στρέψης για καμπύλες όχι αναγκαστικά παραμετρικοποιημένες ως προς το μήκος τόξου έχουμε την εξής:

Πρόταση 2.2.1 Έστω $\gamma:I\to\mathbf{R}^3$ ομαλή καμπύλη (όχι αναγκαστικά παραμ. ως προς το μήκος τόξου), $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$. Τότε η στρέψη της δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t)\times\gamma''(t))\cdot\gamma'''(t)}{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|^2} = \frac{\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \\ x'''(t) & y'''(t) & z'''(t) \end{vmatrix}}{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|^2}.$$

Απόδειξη. Έστω β καμπύλη παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου που προκύπτει από την γ με αλλαγή παραμέτρου. Τότε η στρέψη της β στο s είναι ίση με $k(s)^{-2}(\beta'(s)\times\beta''(s)).\beta'''(s)$ όπου $k(s)=|\beta'(s)\times\beta''(s)|$. Δεδομένου ότι $\beta(s)=\gamma(\varphi(s))$ έχουμε $\beta'(s)=\gamma'(\varphi(s))\varphi'(s)$, $\beta''(s)=\gamma''(\varphi(s))(\varphi'(s))^2+\gamma'(\varphi(s))\varphi''(s)$ και $\beta'''(s)=\gamma'''(\varphi(s))(\varphi'(s))^3+$ $+3\gamma''(\varphi(s))\varphi'(s)\varphi''(s)+\gamma'(\varphi(s))\varphi'''(s)$. Άρα $(\beta'(s)\times\beta''(s)).\beta'''(s)=$ $=(\gamma'(\varphi(s))\varphi'(s)\times\gamma''(\varphi(s))(\varphi'(s))^2).\gamma'''(\varphi(s))(\varphi'(s))^3=(\gamma'(\varphi(s))\times\gamma''(\varphi(s))).\gamma'''\varphi(s))(\varphi'(s))^6$. Επίσης $|\beta'(s)\times\beta''(s)|=|\gamma'(\varphi(s))\times\gamma''(\varphi(s))|(\varphi'(s))^3$. Άρα $\tau(\varphi(s))=|\beta'(s)\times\beta''(s)|^{-2}(\gamma'(\varphi(s))\times\gamma''(\varphi(s))).\gamma'''\varphi(s))(\varphi'(s))^6=$ $=|\gamma'(\varphi(s))\times\gamma''(\varphi(s))|^{-2}(\gamma'(\varphi(s))\times\gamma''(\varphi(s))).\gamma'''\varphi(s))$ και θέτοντας $t=\varphi(s)$ έχουμε το ζητούμενο.□

Γνωρίζουμε ότι μια καμπύλη με καμπυλότητα παντού 0 περιέχεται σε ευθεία. Σχετικά με τον μηδενισμό της στρέψης έχουμε την ακόλουθη:

Πρόταση 2.2.2 Έστω $\gamma:I\to\mathbf{R}^3$ ομαλή καμπύλη με $k(s)\neq0$ για κάθε $s\in I$. Τότε η γ περιέχεται σε ένα επίπεδο αν και μόνο αν $\tau(s)=0$ για κάθε $s\in I$.

Απόδειξη. (Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η γ είναι παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου). Αν η γ ανήκει στο επίπεδο $\mathbf{a}.\mathbf{x}=b$ θα έχουμε $\mathbf{a}.\gamma(s)=b$ για κάθε $s\in I$ και άρα $\mathbf{a}.\gamma'(s)=\mathbf{a}.\gamma''(s)=\mathbf{a}.\gamma'''(s)=0$ για κάθε $s\in I$ δηλαδή τα $\gamma'(s),\gamma''(s),\gamma'''(s)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Συνεπώς $(\gamma'(s)\times\gamma''(s)).\gamma'''(s)=0$ που δίνει $\tau(s)=0$ για κάθε $s\in I$. Αντιστρόφως αν $\tau(s)=0$ για κάθε $s\in I$ τότε το $\mathbf{b}(s)$ θα είναι σταθερό έστω $\mathbf{b}(s)=\mathbf{a}$ για κάθε $s\in I$. Άρα $\mathbf{a}.\gamma'(s)=\mathbf{b}(s).\mathbf{T}(s)=0$ δηλαδή το $\mathbf{a}.\gamma(s)=b=$σταθ. για κάθε $s\in I$ και η καμπύλη ανήκει στο επίπεδο $\mathbf{a}.\mathbf{x}=b$.□

Η παραπάνω πρόταση χρησιμοποιείται σε μερικές περιπτώσεις για τον γρήγορο υπολογισμό της στρέψης. Πράγματι κάθε καμπύλη της μορφής $\gamma(t)=f(t)\mathbf{a}_1+g(t)\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$ όπου τα διανύσματα $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ είναι σταθερά είναι επίπεδη και άρα έχει στρέψη παντού (όπου $k\neq0$) μηδέν.

Η καμπυλότητα και η στρέψη σαν συναρτήσεις του μήκους τόξου, ανάλογα με την περίπτωση των επίπεδων καμπύλων, καθορίζουν την καμπύλη μονοσήμαντα εκτός από στροφές και μεταφορές στο χώρο. Έχουμε δηλαδή το ακόλουθο:

Θεώρημα 2.2.1 (Θεμελιώδες Θεώρημα της θεωρίας των καμπύλων) Έστω I διάστημα και $k,\tau:I\to\mathbf{R}$ μια διαφορίσιμες συναρτήσεις με $k(s)>0$ για κάθε $s\in I$. Τότε υπάρχει ομαλή καμπλύλη $\gamma:I\to\mathbf{R}^3$ παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου με καμπυλότητα ίση με k και στρέψη ίση με τ. Αν $\beta:I\to\mathbf{R}^3$ είναι άλλη μια τέτοια καμπύλη τότε η β προκύπτει από την γ με κάποια στερεά κίνηση δηλαδή συνδιασμό στροφής και μεταφοράς στον χώρο.

Απόδειξη. Έστω $s_0\in I$ σταθερό. Από την θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων προκύπτει ότι υπάρχουν μοναδικές διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{T},\mathbf{n},\mathbf{b}:I\to\mathbf{R}^3$ που ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds}=k\mathbf{n}$$
$$\frac{d\mathbf{n}}{ds}=-k\mathbf{T}+\tau\mathbf{b}$$
$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}=-\tau\mathbf{n}$$

με $\mathbf{T}(s_0)=\mathbf{i},\mathbf{n}(s_0)=\mathbf{j},\mathbf{b}(s_0)=\mathbf{k}$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $s\in I$ το $<\mathbf{T}(s),\mathbf{n}(s),\mathbf{b}(s)>$ αποτελεί μια θετικά προσανατολισμένη ορθοκανονική βάση του $\mathbf{R}^3$. Πράγματι αυτό ισχύει για $s=s_0$ και οι έξι συναρτήσεις ($\mathbf{T}.\mathbf{n},\mathbf{n}.\mathbf{b},\mathbf{T}.\mathbf{b},\mathbf{T}.\mathbf{T},\mathbf{n}.\mathbf{n},\mathbf{b}.\mathbf{b}$) ικανοποιούν το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{d\mathbf{T}.\mathbf{n}}{ds}=k\mathbf{n}.\mathbf{n}-k\mathbf{T}.\mathbf{T}+\tau\mathbf{T}.\mathbf{b} \qquad \frac{d\mathbf{T}.\mathbf{T}}{ds}=2k\mathbf{T}.\mathbf{n}$$
$$\frac{d\mathbf{n}.\mathbf{b}}{ds}=-k\mathbf{T}.\mathbf{b}-\tau\mathbf{n}.\mathbf{n}+\tau\mathbf{b}.\mathbf{b} \qquad \frac{d\mathbf{n}.\mathbf{n}}{ds}=-2k\mathbf{T}.\mathbf{n}+2\tau\mathbf{n}.\mathbf{b} \text{ στο } I$$
$$\frac{d\mathbf{T}.\mathbf{b}}{ds}=k\mathbf{n}.\mathbf{b}-\tau\mathbf{T}.\mathbf{n} \qquad \frac{d\mathbf{b}.\mathbf{b}}{ds}=-2\tau\mathbf{n}.\mathbf{b}$$

με $(\mathbf{T}.\mathbf{n},\mathbf{n}.\mathbf{b},\mathbf{T}.\mathbf{b},\mathbf{T}.\mathbf{T},\mathbf{n}.\mathbf{n},\mathbf{b}.\mathbf{b})(s_0)=(0,0,0,1,1,1)$ (π.χ. $(\mathbf{n}.\mathbf{b})'=\mathbf{n}'.\mathbf{b}+\mathbf{n}.\mathbf{b}'=(-k\mathbf{T}+\tau\mathbf{b}).\mathbf{b}+\mathbf{n}.(-\tau\mathbf{n})$). Αφού όμως οι σταθερές συναρτήσεις $(0,0,0,1,1,1)$ ικανοποιούν και το σύστημα και τις αρχικές συνθήκες συμπεραίνουμε ότι $(\mathbf{T}.\mathbf{n},\mathbf{n}.\mathbf{b},\mathbf{T}.\mathbf{b},\mathbf{T}.\mathbf{T},\mathbf{n}.\mathbf{n},\mathbf{b}.\mathbf{b})=(0,0,0,1,1,1)$ στο I και άρα για κάθε $s\in I$ το $<\mathbf{T}(s),\mathbf{n}(s),\mathbf{b}(s)>$ αποτελεί μια θετικά προσανατολισμένη ορθοκανονική βάση του $\mathbf{R}^3$. Θεωρούμε τώρα την καμπύλη:

$$\gamma(s)=\int \mathbf{T}(s)ds \ .$$

Αφού $\gamma'=\mathbf{T}$ είναι μοναδιαίο η γ είναι παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου και άρα έχει καμπυλότητα $|\mathbf{T}'(s)|=|k(s)\mathbf{n}(s)|=k(s)$ αφού $k(s)>0$ και το $\mathbf{n}$ είναι μοναδιαίο. Επίσης έχουμε $\gamma'''=(k\mathbf{n})'=k'\mathbf{n}+k\mathbf{n}'=k'\mathbf{n}-k^2\mathbf{T}+k\tau\mathbf{b}$ και άρα η στρέψη της γ θα είναι
$k^{-2}(\gamma'\times\gamma'').\gamma'''=k^{-2}(\mathbf{T}\times k\mathbf{n}).(k'\mathbf{n}-k^2\mathbf{T}+k\tau\mathbf{b})=\tau$ αφού τα $\mathbf{T},\mathbf{n},\mathbf{b}$ είναι ορθοκανονικά.

Αν τώρα $\beta:I\to\mathbf{R}^3$ είναι άλλη μια τέτοια καμπύλη τότε μετά από ένα συνδιασμό μεταφοράς και στροφής A της μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A\beta(s_0)=\gamma(s_0)$ και ότι τα αντίστοιχα τρίεδρα των $A\beta,\gamma$ στο s_0 συμπίπτουν. Δηλαδή τα τρίεδρα των $A\beta,\gamma$ θα ικανοποιούν τις ίδιες εξισώσεις και αρχικές συνθήκες και άρα θα ταυτίζονται σε όλο το I. Αφού επιπλέον $A\beta(s_0)=\gamma(s_0)$ οι καμπύλες $A\beta$ και γ συμπίπτουν. Συνεπώς η β προκύπτει από την γ με κάποια στερεά κίνηση δηλαδή συνδιασμό στροφής και μεταφοράς στον χώρο.□

Ορισμός 2.2.3 Η εξισώσεις $k=k(s),\tau=\tau(s)$ (καμπυλότητα και στρέψη σαν συναρτήσεις του μήκους τόξου) ονομάζονται *φυσικές εξισώσεις* της αντίστοιχης καμπύλης.

Το Θεώρημα 1.3.1 συνεπώς λέει ότι κάθε ζεύγος εξισώσεων $k=k(s),\tau=\tau(s)$ περιγράφουν μια μοναδική, εκτός από στροφές και μεταφορές καμπύλη, συνεπώς περιγράφουν την καμπύλη ανεξάρτητα από το σύστημα συντεταγμένων. Από την απόδειξη προκύπτει μια μέθοδος υπολογισμού της καμπύλης. Συνήθως όμως το σύστημα διαφορικών εξισώσεων που εμφανίζεται δεν μπορεί να λυθεί με στοιχειώδεις μεθόδους. Παραδείγματος χάριν οι φυσικές εξισώσεις της έλικας είναι

$$k=\frac{a}{a^2+b^2},\ \tau=\frac{b}{a^2+b^2}\ .$$

Τοπική συμπεριφορά καμπύλης στον χώρο.

Έστω $\gamma:I\to\mathbf{R}^3$ ομαλή καμπύλη παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου με $k(s)\neq 0$ για κάθε $s\in I$ με $0\in I$ και έστω ότι (μετά ίσως από στροφή και μεταφορά της καμπύλης) έχουμε $\gamma(0)=(0,0,0)$, $\mathbf{T}(0)=\mathbf{i},\mathbf{n}(0)=\mathbf{j},\mathbf{b}(0)=\mathbf{k}$, δηλαδή η καμπύλη διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το αντίστοιχο τρίεδρο συμπίπτει με την κανονική βάση του $\mathbf{R}^3$. Τότε από τον τύπο του Taylor έχουμε:

$$\gamma(s)=\gamma(0)+\gamma'(0)s+\gamma''(0)\frac{s^2}{2}+\gamma'''(0)\frac{s^3}{6}+\mathbf{O}(s^4)$$

για s κοντά στο 0 όπου $\mathbf{O}(s^4)$ σημαίνει μια συνάρτηση $\mathbf{r}(s)$ με $|\mathbf{r}(s)|\le Cs^4$ για κάθε s κοντά στο 0. Επίσης $\gamma'(0)=\mathbf{T}(0)=\mathbf{i}$, $\gamma''(0)=k(0)\mathbf{n}(0)=k(0)\mathbf{j}$ και
$\gamma'''(0)=k'(0)\mathbf{n}(0)+k(0)\mathbf{n}'(0)=k'(0)\mathbf{n}(0)+k(0)(-k(0)\mathbf{T}(0)+\tau(0)\mathbf{b}(0))=-k(0)^2\mathbf{i}+k'(0)\mathbf{j}+\tau(0)\mathbf{k}$. Άρα θέτοντας $k=k(0),\tau=\tau(0),k'=k'(0)$ παίρνουμε

$$\gamma(s)=(s-k^2\frac{s^3}{6},k\frac{s^2}{2}+k'\frac{s^3}{6},\tau k\frac{s^3}{6})+\mathbf{O}(s^4)$$

Κρατώντας σε κάθε συντεταγμένη τους όρους με την μικρότερη δύναμη στο s συμπεραίνουμε ότι η καμπύλη γ για μικρά s προσεγγίζεται από την:

$$\overline{\gamma}(s)=(s,\, k\frac{s^2}{2},\, \tau k\frac{s^3}{6}).$$

Η προσέγγιση αυτή μας βοηθάει να καταλάβουμε την τοπική συμπεριφορά της γ γύρω από το 0 για την περίπτωση που $\tau k\neq 0$. Έτσι η προβολή της γ στο εγγύτατο επίπεδο (δηλαδή το xy-επίπεδο) μοιάζει με την καμπύλη $\gamma_{xy}(s)=(s,\, k\frac{s^2}{2},0)$ δηλαδή την παραβολή $y=\frac{1}{2}kx^2$, η προβολή της γ στο κάθετο επίπεδο (δηλαδή το yz-επίπεδο) μοιάζει με την καμπύλη $\gamma_{yz}(s)=(0,\, k\frac{s^2}{2},\, \tau k\frac{s^3}{6})$ δηλαδή την *μη ομαλή* καμπύλη $z^2=\frac{2\,\tau^2}{9\,k}x^3$ και τέλος η προβολή της γ στο ευθειοποιόν επίπεδο (δηλαδή το zx-επίπεδο) μοιάζει με την καμπύλη $\gamma_{zx}(s)=(s,\, 0,\, \tau k\frac{s^3}{6})$ δηλαδή την κυβική καμπύλη $z=\frac{1}{6}\tau kx^3$. Βλέπουμε άρα ότι η στρέψη τ είναι θετική αν καθώς κινούμαστε πανω στην καμπύλη (με την φορά του $\mathbf{T}$) τέμνουμε το εγγύτατο επίπεδο από "κάτω προς τα επάνω" όπως ορίζεται από το $\mathbf{b}$ ενώ αλλιώς είναι αρνητική. Επίσης από όλα τα επίπεδα από το $\mathbf{0}$ το ευθειοποιόν έχει την ιδιότητα η προβολή της γ σε αυτό να είναι "ευθεία" με την καλύτερη δυνατή ακρίβεια κοντά στο 0 (ακρίβεια της τάξης x^3) γεγονός που δικαιολογεί τον όρο "ευθειοποιόν". Τέλος η καμπυλότητα της γ σε κάποιο σημείο της ισούται με την καμπυλότητα της προβολής της στο εγγύτατο επίπεδο στο αντίστοιχο σημείο.

Εγγύτατη σφαίρα.

Έστω $\gamma:I\to\mathbf{R}^3$ ομαλή καμπύλη παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου. Θεωρούμε $s_0\in I$ τέτοιο ώστε $k(s_0)\tau(s_0)\neq 0$. Παίρνουμε $s_1,s_2,s_3,s_4\in I$ αρκετά κοντά στο s_0 και τέτοια ώστε τα αντίστοιχα σημεία της καμπύλης να μην είναι συνεπίπεδα οπότε και ορίζεται η σφαίρα κέντρου $C(s_1,s_2,s_3,s_4)$ και ακτίνας $r(s_1,s_2,s_3,s_4)$ που διέρχεται από τα $\gamma(s_1),\gamma(s_2),\gamma(s_3),\gamma(s_4)$. Αποδεικνύεται ότι με την υπόθεση $k(s_0)\tau(s_0)\neq 0$ οι σφαίρες αυτές καθώς τα $s_1,s_2,s_3,s_4\to s_0$ τείνουν σε κάποια οριακή σφαίρα. Η σφαίρα αυτή ονομάζεται **εγγύτατη σφαίρα** της γ στο s_0. Έστω $C(s_0)$ το κέντρο της και $r(s_0)$ η ακτίνα της. Για να τα υπολογίσουμε παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(s)=|\gamma(s)-C(s_1,s_2,s_3,s_4)|^2$ ικανοποιεί την $f(s_1)=f(s_2)=f(s_3)=f(s_4)$ και άρα υπάρχουν s^*,s^{**},s^{***} στο διάστημα που ορίζουν τα s_1,s_2,s_3,s_4 τέτοια ώστε $f'(s^*)=f''(s^{**})=f'''(s^{***})=0$. Υπολογίζοντας τις τρείς παραγώγους της f έχουμε
$f'(s)=2\gamma'(s)\mathbf{.}(\gamma(s)-C(s_1,s_2,s_3,s_4))$,
$f''(s)=2\gamma''(s)\mathbf{.}(\gamma(s)-C(s_1,s_2,s_3,s_4))+2|\gamma'(s)|^2=2k(s)\mathbf{n}(s)\mathbf{.}(\gamma(s)-C(s_1,s_2,s_3,s_4))+2$ και
$f'''(s)=2\gamma'''(s)\mathbf{.}(\gamma(s)-C(s_1,s_2,s_3,s_4))+4\gamma'(s)\mathbf{.}\gamma''(s)=2\gamma'''(s)\mathbf{.}(\gamma(s)-C(s_1,s_2,s_3,s_4))$.
Αλλά $\gamma'''=(k\mathbf{n})'=k'\mathbf{n}+k\mathbf{n}'=k'\mathbf{n}-k^2\mathbf{T}+k\tau\mathbf{b}$. Άρα αφού $s^*,s^{**},s^{***}\to s_0$ καθώς τα $s_1,s_2,s_3,s_4\to s_0$ θα έχουμε

$$\mathbf{T}(s_0)\mathbf{.}(\gamma(s_0)-C(s_0))=0,\ k(s_0)\mathbf{n}(s_0)\mathbf{.}(\gamma(s_0)-C(s_0))=-1 \text{ και}$$
$$(k'(s_0)\mathbf{n}(s_0)-k^2(s_0)\mathbf{T}(s_0)+k(s_0)\tau(s_0)\mathbf{b}(s_0))\mathbf{.}(\gamma(s_0)-C(s_0))=0.$$

Δηλαδή θέτοντας $R(s)=\dfrac{1}{k(s)}$ παίρνουμε

$$\mathbf{T}(s_0)\mathbf{.}(\gamma(s_0)-C(s_0))=0,\ \mathbf{n}(s_0)\mathbf{.}(\gamma(s_0)-C(s_0))=-R(s_0) \text{ και } \mathbf{b}(s_0)\mathbf{.}(\gamma(s_0)-C(s_0))=-\frac{R'(s_0)}{\tau(s_0)}.$$

Συνεπώς το κέντρο της εγγύτατης σφαίρας δίνεται από την σχέση

$$C(s_0)=\gamma(s_0)+R(s_0)\mathbf{n}(s_0)+\frac{R'(s_0)}{\tau(s_0)}\mathbf{b}(s_0)$$

η δε ακτίνα της από την

$$r(s_0)=\sqrt{R(s_0)^2+(\frac{R'(s_0)}{\tau(s_0)})^2}\ .$$

Πρόταση 2.2.3 Μια ομαλή καμπύλη $\gamma{:}I\to\mathbf{R}^3$ παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου με $k(s).k'(s).\tau(s)\neq 0$ για κάθε $s\in I$ βρίσκεται εξ ολοκλήρου πάνω σε μια σφαίρα αν και μόνο αν ισχύει:

$$R(s)^2+\left(\frac{R'(s)}{\tau(s)}\right)^2=c=\text{σταθ. για κάθε } s\in I.$$

Απόδειξη. Αν η καμπύλη βρίσκεται πάνω σε μια σφαίρα τότε αυτή θα συμπίπτει με την εγγύτατη σφαίρα σε κάθε σημείο της απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Αντιστρόφως έστω ότι $R(s)^2+\left(\frac{R'(s)}{\tau(s)}\right)^2=c=$ σταθ. για κάθε $s\in I$. Τότε παραγωγίζοντας παίρνουμε $2RR'+2\tau^{-2}R'R''-2\tau^{-3}(R')^2\tau'=0$ δηλαδή $\tau^{-1}R'(R\tau+(R'/\tau)')=0$ και αφού $\tau, R'\neq 0$ στο I έχουμε $R\tau+(R'/\tau)'=0$ στο I. Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση $\beta(s)=\gamma(s)+R(s)\mathbf{n}(s)+\tau(s)^{-1}R'(s)\mathbf{b}(s)$. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του τριέδρου παίρνουμε $\beta'=\mathbf{T}+R'\mathbf{n}+R(-k\mathbf{T}+\tau\mathbf{b})+\tau^{-1}R'\,(-\tau\mathbf{n})+(R'/\tau)'\,\mathbf{b}=(R\tau+(R'/\tau)')\mathbf{b}=0$ στο I. Άρα $\beta(s)=\mathbf{a}=$σταθερό και συνεπώς $|\gamma(s)-\mathbf{a}|=R(s)^2+\left(\frac{R'(s)}{\tau(s)}\right)^2=c=$ σταθ. για κάθε $s\in I$ δηλαδή η καμπύλη γ βρίσκεται εξ ολοκλήρου πάνω στην σφαίρα κέντρου $\mathbf{a}$ και ακτίνας c.□

Η συνθήκη $k'(s)\neq 0$ δεν μπορεί να παραληφθεί τελείως. Παραδείγματος χάριν αν $a^2+b^2=1$, $ab\neq 0$ η έλικα $\gamma(s)=(a\text{συν}s, a\text{ημ}s, bs)$ είναι παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου και έχει $k=$σταθ.$\neq 0$, $\tau=$σταθ.$\neq 0$ άρα το $R^2+(R/\tau)^2$ είναι σταθερό χωρίς φυσικά η καμπύλη να βρίσκεται πάνω σε σφαίρα.

Ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε την καμπυλότητα και την στρέψη καθεμιάς από τις παρακάτω καμπύλες: (i) $\gamma(t)=(a(t-\text{ημ}t), a(1-\text{συν}t), bt)$, $t\in\mathbf{R}$, (ii) $\gamma(t)=(3t-t^3, 3t^2, 3t+t^3)$.
2. Έστω η καμπύλη $\gamma(t)=(\text{ημ}^2 t, \text{συν}t\,\text{ημ}t, \text{συν}t)$, $t\in[0,2\pi]$. Να δείξετε ότι όλα τα κάθετα επίπεδα της γ διέρχονται από την αρχη των αξόνων.
3. Έστω $\gamma{:}I\to\mathbf{R}^3$ μια ομαλή καμπύλη παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου. Να δείξετε ότι αν όλα τα εγγύτατα επίπεδα της γ διέρχονται από σταθερό σημείο τότε η καμπύλη περιέχεται σε ένα επίπεδο.
4. Αν η καμπύλη γ έχει σταθερή στρέψη $\tau\neq 0$, να δείξετε ότι και η καμπύλη $\beta(s)=-\tau^{-1}\mathbf{n}(s)+!\,\mathbf{b}(s)ds$ έχει σταθερή καμπυλότητα $|\tau|$.
5. Μια καμπύλη $\gamma{:}I\to\mathbf{R}^3$ ονομάζεται "έλικα" αν οι εφαπτόμενές της σχηματίζουν σταθερή γωνία με κάποιο (σταθερό) διάνυσμα του χώρου. Αν ισχύει $\tau(s)\neq 0$ για κάθε $s\in I$ να δείξετε ότι η γ είναι έλικα αν και μόνον αν ο λόγος $k(s)/\tau(s)$ είναι σταθερός. Να δείξετε ότι η καμπύλη $\gamma(t)=(6t, 3t^2, t^3)$, είναι έλικα.
6. Να βρεθεί καμπύλη με φυσικές εξισώσεις: $k(s)=\tau(s)=\dfrac{\sqrt{2}}{2s}$, $s>0$.
7. Να δείξετε ότι γνωρίζοντας την διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{b}=\mathbf{b}(s)$ (δεύτερο κάθετο διάνυσμα σαν συνάρτηση του μήκους τόξου) μιας καμπύλης γ με στρέψη $\tau\neq 0$, μπορούμε να βρούμε την καμπυλότητα της καθώς και την απόλυτη τιμή της στρέψης της.
8. Να βρείτε όλες τις ομαλές καμπύλες $\gamma{:}I\to\mathbf{R}^3$ (με $k\neq 0$) όλες οι πρώτες κάθετες των οποίων διέρχονται από σταθερό σημείο (πρώτη κάθετος είναι η ευθεία που διέρχεται από το $\gamma(s)$ και είναι παράλληλη στο $\mathbf{n}(s)$).
9. Να εξετάσετε αν υπάρχει ομαλή καμπύλη $\gamma{:}I\to\mathbf{R}^3$ (με $k\neq 0$) όλες οι δεύτερες κάθετες της οποίας να διέρχονται από σταθερό σημείο (δεύτερη κάθετος είναι η ευθεία που διέρχεται από το $\gamma(s)$ και είναι παράλληλη στο $\mathbf{b}(s)$).
10. *Εστω $\gamma{:}\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$ μια ομαλή καμπύλη παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου για την οποία υπάρχει συνάρτηση $\varphi{:}\mathbf{R}\text{->}\mathbf{R}$ με $\gamma(s)=\dfrac{s}{2}\mathbf{T}(s)+\varphi(s)\mathbf{n}(s)+\dfrac{s}{2}\mathbf{b}(s)$, για κάθε $s\in\mathbf{R}$. Αν $\gamma(0)=(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,0)$ να υπολογίσετε την καμπυλότητα και την στρέψη της γ καθώς και την συνάρτηση φ.
11. Να δείξετε ότι η καμπυλότητα $k(t_0)\neq 0$ στο σημείο $\gamma(t_0)$ μιας ομαλής καμπύλης στον χώρο είναι ίση με την καμπυλότητα της επίπεδης καμπύλης που είναι η ορθή προβολή της γ στο εγγύτατο επίπεδο της στο σημείο $\gamma(t_0)$.

12. Να δείξετε ότι ο εγγύτατος κύκλος μιας ομαλής καμπύλης σε κάποιο σημείο της βρίσκεται πάνω στην εγγύτατη σφαίρα της στο σημείο αυτό.
13. Δίνεται η καμπύλη $\gamma(t)=(\text{συν}t, 2\text{ημ}t, t)$, $t\in\mathbf{R}$ (έλικα πάνω σε ελλειπτικό κύλινδρο). Για $t=\pi/4$ να βρείτε: (i) την καμπυλότητα και την στρέψη της, (ii) τις εξισώσεις των χαρακτηριστικών επιπέδων της (εγγύτατου κλπ) και *(iii) την εξίσωση της εγγύτατης σφαίρας της.
14. Έστω $\beta,\gamma:I\to\mathbf{R}^3$ ομαλές καμπύλες παραμετρικοποιημένες ως προς το μήκος τόξου και τέτοιες ώστε για κάθε $s\in I$ οι αντίστοιχες εφαπτόμενες ευθείες των β,γ στο s να ταυτίζονται. Να δείξετε ότι οι β και γ ταυτίζονται.
15. *Έστω γ ομαλή καμπύλη τέτοια ώστε για οποιαδήποτε δύο σημεία τις οι αντίστοιχες εφαπτόμενες ευθείες έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο (δηλ. τέμνονται ή ταυτίζονται). Να δείξετε ότι η γ είναι επίπεδη.
16. Έστω $\gamma:I\to\mathbf{R}^3$ μια ομαλή καμπύλη παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου (με $k(s)\neq 0$ για κάθε $s\in I$). Υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερό επίπεδο Π στον χώρο τέτοιο ώστε το σημείο $\gamma(s)+\mathbf{b}(s)$ να ανήκει στο Π για κάθε $s\in I$. Αν η στρέψη της γ είναι σταθερή και ίση με 1 να υπολογίσετε την καμπυλότητά της.
17. Έστω $\gamma:I\to\mathbf{R}^3$ μια ομαλή καμπύλη παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου με σταθερή καμπυλότητα $k\neq 0$. Να δείξετε ότι και η καμπύλη $\beta(s)=\gamma(s)+\frac{1}{k}\mathbf{n}(s)$ έχει επίσης σταθερή καμπυλότητα ίση με k.
18. Έστω $\gamma:I\to\mathbf{R}^3$ μια ομαλή καμπύλη παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου με καμπυλότητα $k(s)>0$ και στρέψη $\tau(s)>0$. Να βρείτε την καμπυλότητα την στρέψη και το αντίστοιχο τρίεδρο της καμπύλης $\beta(s)=\mathbf{b}(s)$.

3. ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ

3.1 Παραμετρικές Επιφάνειες. Ομαλές Επιφάνειες.

Ανάλογα με τις καμπύλες ορίζουμε τις παραμετρικές παραστάσεις σαν απεικονίσεις $X:U\to\mathbf{R}^3$ όπου το $U\subseteq\mathbf{R}^2$ ανοικτό και η $X(u,\upsilon)=(x(u,\upsilon),y(u,\upsilon),z(u,\upsilon))$ έχει συνιστώσες με συνεχείς μερικές κάθε τάξης στο U. Οι επιφάνειες δηλαδή θα εξαρτώνται από δύο παραμέτρους. Για ευκολία θα συμβολίζουμε με X_u και X_υ τα

$$X_u=\frac{\partial X}{\partial u}=\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right) \text{ και } X_\upsilon=\frac{\partial X}{\partial \upsilon}=\left(\frac{\partial x}{\partial \upsilon},\frac{\partial y}{\partial \upsilon},\frac{\partial z}{\partial \upsilon}\right).$$

Επίσης θα χρησιμοποιούμε τον εξής συμβολισμό:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\upsilon)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \upsilon}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \upsilon}\end{vmatrix},\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,\upsilon)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \upsilon}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial \upsilon}\end{vmatrix},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,\upsilon)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial \upsilon}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \upsilon}\end{vmatrix}.$$

Παράδειγμα. Η απεικόνιση $X:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ με

$$X(u,\upsilon)=(x_0+a_1u+b_1\upsilon, y_0+a_2u+b_2\upsilon, z_0+a_3u+b_3\upsilon)$$

παριστάνει παραμετρικά το επίπεδο που διέρχεται από το σημείο $X_0=(x_0,y_0,z_0)$ και είναι παράλληλο στα διανύσματα $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$ και $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$ με την προυπόθεση όμως ότι τα διανύσματα $\mathbf{a},\mathbf{b}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Αν όμως τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε το $X(\mathbf{R}^2)$ εκφυλίζεται σε ευθεία ή σημείο και άρα δεν μοιάζει με διδιάστατο αντικείμενο.

Για να εξασφαλίσουμε το ότι μια παραμετρική παράσταση παραμετρικοποιεί μια επιφάνεια δηλαδή ένα διδιάστατο αντικείμενο θα δώσουμε μια συνθήκη μη εκφυλισμού στον επόμενο:

Ορισμός 3.1.1 Παραμετρική επιφάνεια στο χώρο ονομάζεται κάθε διαφορίσιμη απεικόνιση $X{:}U\to\mathbf{R}^3$ όπου το $U\subseteq\mathbf{R}^2$ ανοικτό, τέτοια ώστε για κάθε $q=(u_0,\upsilon_0)\in U$ τα διανύσματα $X_u(q)$ και $X_\upsilon(q)$ του $\mathbf{R}^3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Δηλαδή $X_u(q)\times X_\upsilon(q)\neq\mathbf{0}$ για κάθε $q\in U$.

Η $X_u(q)\times X_\upsilon(q)\neq\mathbf{0}$ ισχύει αν και μόνο αν τουλάχιστον μια από τις ορίζουσες $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\upsilon)}(q),\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,\upsilon)}(q),\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,\upsilon)}(q)$ δεν είναι μηδέν.

Αν τώρα $X{:}U\to\mathbf{R}^3$ είναι μια παραμετρική επιφάνεια και $q=(u_0,\upsilon_0)\in U$ τότε από τον τύπο του Taylor για συναρτήσεις δύο μεταβλητών έχουμε:

$$X(u,\upsilon)=X(u_0,\upsilon_0)+(u-u_0)X_u(u_0,\upsilon_0)+(\upsilon-\upsilon_0)X_\upsilon(u_0,\upsilon_0)+R(u,\upsilon)$$

όπου $|R(u,\upsilon)|\leq C(|u-u_0|^2+|\upsilon-\upsilon_0|^2)$ για (u,υ) κοντά στο (u_0,υ_0). Η απεικόνιση τώρα

$$\mathrm{E}_q(u,\upsilon)=X(u_0,\upsilon_0)+(u-u_0)X_u(u_0,\upsilon_0)+(\upsilon-\upsilon_0)X_\upsilon(u_0,\upsilon_0)$$

παριστάνει επίπεδο λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των $X_u(u_0,\upsilon_0)$ και $X_\upsilon(u_0,\upsilon_0)$ και αφού $|X(u,\upsilon)-\mathrm{E}_q(u,\upsilon)|\leq C(|u-u_0|^2+|\upsilon-\upsilon_0|^2)$ για (u,υ) κοντά στο $q=(u_0,\upsilon_0)$ το E_q είναι το επίπεδο που προσεγγίζει την X κατά τον καλύτερο τρόπο κοντά στο (u_0,υ_0).

Το διάνυσμα

$$\mathbf{N}(q)=\frac{X_u(q)\times X_\upsilon(q)}{|X_u(q)\times X_\upsilon(q)|}$$

θα ονομάζεται *το μοναδιαίο κάθετο* διάνυσμα της παραμετρικής επιφάνειας X στο q. Η καρτεσιανή εξίσωση του αντίστοιχου εφαπτόμενου επιπέδου άρα είναι:

$$\mathbf{N}(q)\mathbf{.}(\mathbf{x}-X(q))=0.$$

Παράδειγμα. Για την παραμετρική επιφάνεια $X(u,\upsilon)=(u,\upsilon,u^2+\upsilon^2)$ και $q=(1,2)$ έχουμε $X_u(q)=(1,0,2)$, $X_\upsilon(q)=(0,1,4)$ και $\mathbf{N}(q)=\frac{1}{\sqrt{21}}(-2,-4,1)$. Συνεπώς το αντίστοιχο εφαπτόμενο επίπεδο έχει παραμετρική παράσταση $\mathrm{E}_q(u,\upsilon)=(u,\upsilon,2u+4\upsilon-5)$ και καρτεσιανή εξίσωση $-2x-4y+z=-3$.

Ένα διάνυσμα $\mathbf{w}$ του $\mathbf{R}^3$ θα λέγεται εφαπτόμενο της παραμετρικής επιφάνειας X στο q αν είναι παράλληλο στο αντίστοιχο εφαπτόμενο επίπεδο. Δηλαδή αν υπάρχουν $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ τέτοια ώστε $\mathbf{w}=\lambda X_u(q)+\mu X_\upsilon(q)$. Το σύνολο άρα όλων των εφαπτόμενων διανυσμάτων είναι ένας διδιάστατος υπόχωρος του $\mathbf{R}^3$ και τα διανύσματα $X_u(q)$ και $X_\upsilon(q)$ αποτελούν μια βάση του. Θα συμβολίζουμε τον υπόχωρο αυτό με T_qX και θα τον ονομάζουμε επίσης εφαπτόμενο επίπεδο της X στο q. Αν θεωρήσουμε επίσης το διαφορικό $(DX)_q{:}\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ (το οποίο είναι μια γραμμική και βάση του ορισμού 3.1.1 ένα προς ένα απεικόνιση) της απεικόνισης X στο q παρατηρούμε ότι $(DX)_q((1,0))=X_u(q)$ και $(DX)_q((0,1))=X_\upsilon(q)$ συμπεραίνουμε ότι

$$T_qX=(DX)_q(\mathbf{R}^2)$$

δηλαδή το εφαπτόμενο επίπεδο της X στο q ταυτίζεται με την εικόνα του διαφορικού της X στο q.

Οι καμπύλες που είναι εικόνες των ευθύγραμμων τμημάτων u=σταθ. και υ=σταθ. μέσω της X ονομάζονται *συντεταγμένες γραμμές* της επιφάνειας. Η συντεταγμένη γραμμή $\gamma(u)=X(u,c_1)$ (δηλαδή $\upsilon=c_1$ σταθερό) έχει εφαπτόμενο διάνυσμα το X_u ενώ η $\beta(\upsilon)=X(c_2,\upsilon)$ (δηλαδή $u=c_2$ σταθερό) έχει εφαπτόμενο διάνυσμα το X_υ.

Σχετικά με την αλλαγή παραμέτρου έχουμε τον ακόλουθο:

Ορισμός 3.1.2 Θα λέμε ότι η $Y{:}V\to\mathbf{R}^3$ προκύπτει από την παραμετρική επιφάνεια $X{:}U\Box\mathbf{R}^3$ με αλλαγή των παραμέτρων αν υπάρχει μια (C^∞) αμφιδιαφόριση $\varphi{:}V\Box U$ (επί) τέτοια ώστε

$$Y(s,t)=X(\varphi(s,t)) \text{ για κάθε } (s,t)\in V.$$

Προφανώς οι X,Y παραμετρικοποιούν το ίδιο σύνολο. Όσο για τα εφαπτόμενα επίπεδα γράφουμε $\varphi(s,t)=(u(s,t),\upsilon(s,t))$ και χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε:

$$Y_s = X_u \frac{\partial u}{\partial s} + X_\upsilon \frac{\partial \upsilon}{\partial s}, Y_t = X_u \frac{\partial u}{\partial t} + X_\upsilon \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \text{ άρα}$$

$$Y_s \times Y_t = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial \upsilon}{\partial s} & \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \end{vmatrix} (X_u \times X_\upsilon) = \frac{\partial(u,\upsilon)}{\partial(s,t)}(X_u \times X_\upsilon) \neq \mathbf{0}$$

αφού η φ είναι αμφιδιαφόριση. Συνεπώς η Y είναι επίσης παραμετρική επιφάνεια και επιπλέον οι X,Y έχουν στα αντίστοιχα σημεία το ίδιο εφαπτόμενο επίπεδο, δηλαδή

$$T_bY \equiv T_{\varphi(b)}X \text{ για κάθε } b \in V.$$

Για τους παραπάνω λόγους θα θεωρούμε τις παραμετρικές επιφάνειες X,Y ισοδύναμες.

Παράδειγμα. Οι $X(u,\upsilon)=(u,\upsilon,u\upsilon)$ και $Y(s,t)=(s+t,s-t,s^2-t^2)$ σχετίζονται με την αλλαγή παραμέτρων $u=s+t,\upsilon=s-t$ (δηλαδή $\varphi(s,t)=(s+t,s-t)$) που είναι προφανώς μια αμφιδιαφόριση του $\mathbf{R}^2$.

Δεδομένου ότι μια παραμετρική επιφάνεια εν γένει μπορεί να τέμνει τον εαυτό της (δηλαδή η απεικόνιση X μπορεί να μην είναι ένα προς ένα) δεν μπορούμε να μιλάμε για το εφαπτόμενο επίπεδο της X στο *σημείο* της $p \in X(U)$ (διότι το p μπορεί να είναι εικόνα περισσότερων από ενός σημείου του U). Για αυτό τον λόγω, συν το γεγονός ότι είναι γενικά δύσκολο να μελετηθεί το πώς μια επιφάνεια μπορεί να τέμνει τον εαυτό της, θα περιοριστούμε στην μελέτη των ακόλουθων επιφανειών:

Ορισμός 3.1.3 Η παραμετρική επιφάνεια $X{:}U \to \mathbf{R}^3$ θα ονομάζεται ομαλή αν η απεικόνιση $X{:}U \to X(U)$ είναι ένας ομοιομορφισμός του ανοικτού υποσυνόλου U του $\mathbf{R}^2$ με το $X(U)$ εφοδιασμένο με την σχετική από τον $\mathbf{R}^3$ τοπολογία. Το υποσύνολο $S=X(U)$ του $\mathbf{R}^3$ ονομάζεται ίχνος της παραμετρικής επιφάνειας X.

Δηλαδή εκτός από τις συνθήκες του ορισμού 3.1.1 θέλουμε η $X{:}U \to \mathbf{R}^3$ να είναι ένα προς ένα και η $X^{-1}{:}X(U) \to U$ να είναι συνεχής. Το τελευταίο συμβαίνει αν και μόνο αν για κάθε $V \subseteq U$ ανοικτό το $X(V)$ είναι ένα σχετικώς ανοικτό υποσύνολο του $X(U)$, δηλαδή υπάρχει $W \subseteq \mathbf{R}^3$ ανοικτό τέτοιο ώστε $X(V)=X(U) \cap W$.

Παρατήρηση. Η απαίτηση η X να είναι ένα προς ένα *δεν* αρκεί. Παραδείγματος χάριν η παραμετρική επιφάνεια του παρακάτω σχήματος είναι ένα προς ένα αλλά δεν είναι ομαλή.

Παραδείγματα. 1) Γράφημα. Αν $U \subseteq \mathbf{R}^2$ είναι ανοικτό και $f{:}U \to \mathbf{R}$ είναι διαφορίσιμη τότε το "γράφημά" της $X{:}U \to \mathbf{R}^3$ με $X(u,\upsilon)=(u,\upsilon,f(u,\upsilon))$ είναι ομαλή επιφάνεια. Πράγματι τα $X_u=(1,0,f_u)$, $X_\upsilon=(1,0,f_\upsilon)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα η X είναι ένα προς ένα και η $X^{-1}{:}X(U) \to U$ είναι συνεχής ως ο περιορισμός της προβολής $pr{:}\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ με $pr(x,y,z)=(x,y)$ στο $X(U)$.

2) Η $X{:}U(=(0,2\pi)\times(0,\pi)) \to \mathbf{R}^3$ με $X(u,\upsilon)=(\text{συν}u\text{ημ}\upsilon,\text{ημ}u\text{ημ}\upsilon,\text{συν}\upsilon)$ είναι ομαλή παραμετρική επιφάνεια. Το ίχνος της είναι η μοναδιαία σφαίρα $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3{:}x^2+y^2+z^2=1\}$ εκτός από ένα ημικύκλιο. Υπολογίζοντας το κάθετο διάνυσμα βρίσκουμε $\mathbf{N}(u,\upsilon)=-X(u,\upsilon)$ δηλαδή την γνωστή ιδιότητα ότι κάθε ακτίνα της σφαίρας είναι κάθετη στο αντίστοιχο εφαπτόμενο επίπεδο της σφαίρας. Τα u,υ σχετίζονται με τις γεωγραφικές συντεταγμένες της σφαίρας. Έτσι οι συντεταγμένες γραμμές u=σταθ. ονομάζονται μεσημβρινοί και οι υ=σταθ. παράλληλοι. Όλη η σφαίρα S^2 δεν μπορεί να παρουσιαστεί σαν το ίχνος ομαλής παραμετρικής επιφάνειας αφού το συμπαγές σύνολο S^2 δεν μπορεί να είναι ομοιομορφικό με κάποιο ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$.

Η χρησιμότητα των γραφημάτων προκύπτει από το επόμενο (αντίστοιχο της πρότασης 1.1.1):

Θεώρημα 3.1.1 Έστω η παραμετρική επιφάνεια $X{:}U \to \mathbf{R}^3$ και το σημείο $q \in U$. Τότε υπάρχει ανοικτή περιοχή $V \subseteq U$ του q τέτοια ώστε η παραμετρική επιφάνεια $X|_V{:}V \to \mathbf{R}^3$

(περιορισμός της X στο V) να είναι ισοδύναμη (να προκύπτει δηλαδή με αλλαγή παραμέτρων) με το γράφημα διαφορίσιμης συνάρτησης τουλάχιστον μιας από τις μορφές $z=f(x,y)$, $x=g(y,z)$, $y=h(z,x)$. Ειδικότερα αν η $X{:}U\to\mathbf{R}^3$ είναι ομαλή τότε για κάθε $p\in X(U)$ υπάρχει $W\subseteq\mathbf{R}^3$ ανοικτό με $p\in W$ και τέτοιο ώστε το *σύνολο* $X(U)\cap W$ να είναι το γράφημα διαφορίσιμης συνάρτησης τουλάχιστον μιας από τις παραπάνω μορφές.

Απόδειξη. Ως γνωστόν τουλάχιστον μια από τις ορίζουσες $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\upsilon)}(q)$, $\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,\upsilon)}(q)$, $\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,\upsilon)}(q)$ δεν είναι μηδέν.

Έστω ότι $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\upsilon)}(q)\neq 0$. Θεωρούμε την προβολή $pr{:}\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ με $pr(x,y,z)=(x,y)$ και ορίζουμε την απεικόνιση $\varphi{:}U\to\mathbf{R}^2$ με $\varphi(u,\upsilon)=pr\circ X(u,\upsilon)=(x(u,\upsilon),y(u,\upsilon))$. Η Ιακωβιανή ορίζουσα της φ στο q είναι $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\upsilon)}(q)\neq 0$. Συνεπώς από το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης υπάρχει ανοικτή περιοχή $V\subseteq U$ του q τέτοια ώστε η $\varphi{:}V\to\varphi(V)$ να είναι μια αμφιδιαφόριση του V επί του ανοικτού $A=\varphi(V)\subseteq\mathbf{R}^2$. Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση $Y{:}A\to\mathbf{R}^3$ με

$$Y(s,t)=X(\varphi^{-1}(s,t)) \text{ για κάθε } (s,t)\in A.$$

Η Y προκύπτει από την $X|_V$ με αλλαγή παραμέτρων, είναι άρα παραμετρική επιφάνεια. Θα δείξουμε ότι η Y προέρχεται από γράφημα. Πράγματι για κάθε $(s,t)\in A$ έχουμε

$$pr\circ Y(s,t)=pr\circ X(\varphi^{-1}(s,t))=\varphi(\varphi^{-1}(s,t))=(s,t)$$

άρα $Y(s,t)=(s,t,f(s,t))$ όπου η $f{:}A\to\mathbf{R}$ είναι διαφορίσιμη.

Ομοίως εργαζόμαστε αν κάποια άλλη από τις τρείς ορίζουσες δεν μηδενίζεται. Αν $\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,\upsilon)}(q)\neq 0$ θα έχουμε γράφημα της μορφής $x=g(y,z)$ (δηλαδή $Y(s,t)=(g(s,t),s,t)$) ενώ αν $\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,\upsilon)}(q)\neq 0$ της μορφής $y=h(z,x)$ (δηλαδή $Y(s,t)=(t,h(s,t),s)$).

Αν τωρα η X είναι ομαλή παραμετρική επιφάνεια αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το αντίστοιχο $X(V)$ είναι ένα σχετικώς ανοικτό υποσύνολο του $X(U)$, δηλαδή υπάρχει $W\subseteq\mathbf{R}^3$ ανοικτό τέτοιο ώστε $X(V)=X(U)\cap W$.□

Επειδή όπως είδαμε η σφαίρα S^2 δεν μπορεί να παρασταθεί από μια ομαλή παραμετρική επιφάνεια, θέλουμε όμως να την συμπεριλάβουμε στις επιφάνειες, δίνουμε τον ακόλουθο:

Ορισμός 3.1.3 Το *υποσύνολο* S του $\mathbf{R}^3$ θα ονομάζεται *ομαλή επιφάνεια* αν για κάθε $p\in S$ υπάρχει ανοικτή περιοχή $W\subseteq\mathbf{R}^3$ του p και ομαλή παραμετρική επιφάνεια $X{:}U\to\mathbf{R}^3$ τέτοια ώστε για το ίχνος της έχουμε $X(U)=S\cap W$. Η $X{:}U\to\mathbf{R}^3$ θα ονομάζεται *παραμετρικοποίηση* της S κοντά στο p. Η $X^{-1}{:}S\cap W\to U$ ονομάζεται *χάρτης* ή *σύστημα συντεταγμένων*.

Για να δείξουμε άρα ότι το S είναι ομαλή επιφάνεια αρκεί να βρούμε μια οικογένεια από *ομαλές παραμετρικές επιφάνειες* $\{X_i{:}U_i\to\mathbf{R}^3,\ i\in I\}$ (όπου το σύνολο δεικτών I μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο) τέτοια ώστε τα αντίστοιχα ίχνη $\{X_i(U_i),\ i\in I\}$ να αποτελούν μια σχετικώς ανοικτή κάλυψη του S. Έτσι κάθε ομαλή παραμετρική επιφάνεια είναι και ομαλή επιφάνεια (η κάλυψη αποτελείται από ένα μόνο σύνολο).

Παράδειγμα. Η μοναδιαία σφαίρα $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3{:}x^2+y^2+z^2=1\}$ είναι ομαλή επιφάνεια. Πράγματι αρκεί να θέσουμε $U=\{(u,\upsilon)\in\mathbf{R}^2{:}\ u^2+\upsilon^2<1\}$ και να θεωρήσουμε τις ομαλές παραμετρικές επιφάνειες (γραφήματα) $X_i{:}U\to\mathbf{R}^3$ ($i=1,2,\ldots,6$) με:

$$X_1(u,\upsilon)=(u,\upsilon,\sqrt{1-u^2-\upsilon^2}),X_2(u,\upsilon)=(u,\upsilon,-\sqrt{1-u^2-\upsilon^2}),X_3(u,\upsilon)=(\sqrt{1-u^2-\upsilon^2},u,\upsilon),$$

$$X_4(u,\upsilon)=(-\sqrt{1-u^2-\upsilon^2},u,\upsilon),X_5(u,\upsilon)=(\upsilon,\sqrt{1-u^2-\upsilon^2},u),X_6(u,\upsilon)=(\upsilon,-\sqrt{1-u^2-\upsilon^2},u).$$

Καθεμιά από τις παραπάνω παραμετρικοποιεί ένα ανοικτό ημισφαίριο η ένωση των οποίων καλύπτει την σφαίρα.

Περισσότερα παραδείγματα προκύπτουν από σύνολα που ικανοποιούν μια καρτεσιανή εξίσωση. Αν $W\subseteq\mathbf{R}^3$ ανοικτό και $F{:}W\to\mathbf{R}$ είναι διαφορίσιμη θα λέμε ότι το $a\in F(W)$ είναι **ομαλή τιμή** της F αν για κάθε $p\in W$ με $F(p)=a$ ισχύει $\nabla F(p)\neq\mathbf{0}$ (δηλαδή μια τουλάχιστον από τις μερικές παραγώγους $F_x(p),F_y(p),F_z(p)$ είναι διάφορη του μηδενός).

Θεώρημα 3.1.2 Έστω $W\subseteq\mathbf{R}^3$ ανοικτό, $F{:}W\to\mathbf{R}$ διαφορίσιμη και $a\in F(W)$ ομαλή τιμή της F. Τότε το σύνολο

$$S=F^{-1}(\{a\})=\{(x,y,z)\in W : F(x,y,z)=a\}$$

είναι ομαλή επιφάνεια. Επιπλέον για κάθε $p\in S=F^{-1}(\{a\})$ το διάνυσμα $\nabla F(p)(\neq\mathbf{0})$ είναι *κάθετο* στην S στο p.

Απόδειξη. Έστω $p=(x_0\,,y_0\,,z_0)\in S$. Υποθέτουμε ότι $F_z(p)\neq 0$. Τότε από το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν ανοικτές περιοχές $W_1\subseteq W$ του p και $U\subseteq\mathbf{R}^2$ του $(x_0\,,y_0)$ καθώς και μια διαφορίσιμη συνάρτηση $g{:}U\to\mathbf{R}$ με $g(x_0\,,y_0)=z_0$ και τέτοια ώστε "$(x,y,z)\in W_1$ και $F(x,y,z)=a$" αν και μόνο αν "$(x,y)\in U$ και $z=g(x,y)$". Συνεπώς η $X{:}U\to\mathbf{R}^3$ με $X(u,\upsilon)=(u,\upsilon,g(u,\upsilon))$ είναι μια ομαλή παραμετρική επιφάνεια (γράφημα) με $X(U)=S\cup W_1$.

Σχετικά με το κάθετο διάνυσμα παρατηρούμε καταρχήν ότι το $X_u(x_0,y_0)\times X_\upsilon(x_0,y_0)=(1,0,g_x(x_0,y_0))\times(0,1,g_y(x_0,y_0))=(-g_x(x_0,y_0),-g_y(x_0,y_0),1)$ είναι κάθετο στην S στο p. Εξάλλου παραγωγίζοντας την σχέση $F(x,y,g(x,y))=a$ παίρνουμε

$$F_x(x,y,g(x,y))+F_z(x,y,g(x,y))g_x(x,y)=0 \text{ και } F_y(x,y,g(x,y))+F_z(x,y,g(x,y))g_y(x,y)=0.$$

Άρα το $\nabla F(x_0\,,y_0\,,z_0)$ είναι συγγραμμικό με το $X_u(x_0,y_0)\times X_\upsilon(x_0,y_0)$:

$$\nabla F(x_0\,,y_0\,,z_0)=F_z(x_0\,,y_0\,,z_0)X_u(x_0,y_0)\times X_\upsilon(x_0,y_0)\neq\mathbf{0}.$$

Ανάλογα εργαζόμαστε αν $F_x(p)\neq 0$ ή $F_y(p)\neq 0$.□

Παραδείγματα. 1) Έστω $W=\mathbf{R}^3\setminus\{\mathbf{0}\}$ $a>0$ και η διαφορίσιμη $F{:}W\to\mathbf{R}$ με

$$F(x,y,z)=(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2=x^2+y^2+z^2+a^2-2a\sqrt{x^2+y^2}\ .$$

Αν $0<r<a$ θα δείξουμε ότι το r^2 είναι ομαλή τιμή της F. Πράγματι αν

$$F_x=2x-\frac{2ax}{\sqrt{x^2+y^2}}=0, F_y=2y-\frac{2ay}{\sqrt{x^2+y^2}}=0, F_z=2z=0$$

τότε $z=0$ και $x(\sqrt{x^2+y^2}-a)=y(\sqrt{x^2+y^2}-a)=0$ άρα αφού $(x,y)\neq(0,0)$, $\sqrt{x^2+y^2}=a$. Δηλαδή $F(x,y,z)=0\neq r^2$. Αφού $r<a$ θα έχουμε $F(x,y,z)\neq r^2$ σε μια περιοχή της ευθείας $(0,0,z)$ απ' όπου προκύπτει ότι η ομαλή επιφάνεια $T=F^{-1}(\{r^2\})$ είναι συμπαγής. Η T ονομάζεται *σπείρα* (torus) και μπορεί να προκύψει από τον κύκλο $(y-a)^2+z^2=r^2$ του yz-επιπέδου με περιστροφή γύρω από τον άξονα των z. (Αν $a<r$ το σύνολο που προκύπτει με ανάλογο τρόπο *δεν* είναι ομαλή επιφάνεια εξαιτίας των σημείων που τέμνεται με τον άξονα των z.)

2) Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος *δεν* ισχύει. Παραδείγματος χάριν αν $F(x,y,z)=z^2$ τότε το 0 *δεν* είναι ομαλή τιμή της αλλά το $F^{-1}(\{a\})$=το xy-επίπεδο, *είναι* ομαλή επιφάνεια.

3) Αν $F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ τότε το $a\in\mathbf{R}$ είναι ομαλή τιμή της F αν και μόνο αν $a\neq 0$. Ως γνωστόν η $S=F^{-1}(\{a\})$ είναι μονόχωνο υπερβολοειδές αν $a>0$, δίχωνο υπερβολοειδές αν $a<0$ και δίχωνος κώνος (που *δεν* είναι ομαλή επιφάνεια) αν $a=0$.

Συνδιάζοντας το Θεώρημα 3.1.1 και τον Ορισμό 3.1.3 συμπεραίνουμε ότι αν η S είναι ομαλή επιφάνεια τότε για κάθε $p\in S$ υπάρχει ανοικτή περιοχή $W\subseteq\mathbf{R}^3$ του p τέτοια ώστε το $S\cup W$ να είναι γράφημα (ενός τουλάχιστον από τους τρείς τύπους). Συνεπώς κάθε ομαλή επιφάνεια τοπικά είναι γράφημα διαφορίσιμης συνάρτησης. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα αυτή μπορούμε να δείξουμε ότι κάποια σύνολα *δεν* είναι ομαλές επιφάνειες. Παραδείγματος χάριν ο μονόχωνος κώνος $K=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x^2+y^2-z^2$ και $z\geq 0\}$ δεν είναι ομαλή επιφάνεια. Πράγματι θεωρώντας το σημείο του $p=(0,0,0)$ παρατηρούμε ότι σε καμία περιοχή του p ο K δεν μπορεί να είναι γράφημα της μορφής $x=g(y,z)$ ή της μορφής $y=h(z,x)$ αφού οι προβολές από τον K στα επίπεδα yz και zx δεν είναι ένα προς ένα σε καμία περιοχή του p. Εξάλλου ο K

είναι το γράφημα της συνάρτησης $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ η οποία όμως δεν είναι διαφορίσιμη στο (0,0). Άρα ο K δεν είναι ομαλή επιφάνεια.

Θα δείξουμε τώρα ότι όλες οι παραμετρικοποιήσεις κοντά σε κάποιο σημείο μιας ομαλής επιφάνειας είναι ουσιαστικά ισοδύναμες.

Θεώρημα 3.1.3 (Αλλαγής Παραμέτρων) Έστω S ομαλή επιφάνεια, $p\in S$ και $X{:}U\to S$ και $Y{:}V\to S$ ομαλές παραμετρικοποιήσεις της S γύρω από το p, δηλαδή $p\in X(U)\cap Y(V)=A$. Τότε η απεικόνιση

$$h=X^{-1}\mathrm{o}Y : Y^{-1}(A)\to X^{-1}(A)$$

είναι μια αμφιδιαφόριση μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbf{R}^2$. Συνεπώς οι παραμετρικοποιήσεις $X{:}U\to S$ και $Y{:}V\to S$ είναι ισοδύναμες σε μια περιοχή του p.

Απόδειξη. Το A είναι σχετικώς ανοικτό υποσύνολο του S και αφού οι X,Y είναι ομοιομορφισμοί συμπεραίνουμε ότι τα $Y^{-1}(A)$,$X^{-1}(A)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbf{R}^2$ και ότι η $h=X^{-1}\mathrm{o}Y$ είναι ομοιομορφισμός. Έστω τώρα $q\in Y^{-1}(A)$ και Z μια παραμετρικοποίηση της S γύρω από το $Y(q)\in A$ η οποία προέρχεται από γράφημα διαφορίσιμης συνάρτησης (χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.1.1). Υποθέτουμε ότι το γράφημα είναι της μορφής $z=f(x,y)$ δηλαδή $Z(s,t)=(s,t,f(s,t))$ σε μια περιοχή του q (ανάλογα εργαζόμαστε στις άλλες περιπτώσεις). Επειδή $h=(Z^{-1}\mathrm{o}X)^{-1}\mathrm{o}(Z^{-1}\mathrm{o}Y)$ κοντά στο q αρκεί να δείξουμε ότι οι $Z^{-1}\mathrm{o}X$ και $Z^{-1}\mathrm{o}Y$ είναι αμφιδιαφορίσεις σε μια περιοχή του q.

Αν λοιπόν $X(u,\upsilon)=(x(u,\upsilon),y(u,\upsilon),z(u,\upsilon))$ τότε, $z(u,\upsilon)=f(x(u,\upsilon),y(u,\upsilon))$ κοντά στο q άρα

$$Z^{-1}\mathrm{o}X(u,\upsilon)=Z^{-1}(x(u,\upsilon),y(u,\upsilon),f(x(u,\upsilon),y(u,\upsilon)))=(x(u,\upsilon),y(u,\upsilon))$$

και η Ιακωβιανή της ορίζουσα στο q είναι ίση με $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,\upsilon)}(q)$. Αν η ορίζουσα αυτή ήταν 0 τότε ο Ιακωβιανός πίνακας της $(DX)_q$ ο οποίος είναι ίσος με (αν $q_1=(x(q),y(q))$)

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(q) & \dfrac{\partial x}{\partial \upsilon}(q) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(q) & \dfrac{\partial y}{\partial \upsilon}(q) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(q_1)\dfrac{\partial x}{\partial u}(q)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(q_1)\dfrac{\partial y}{\partial u}(q) & \dfrac{\partial f}{\partial x}(q_1)\dfrac{\partial x}{\partial \upsilon}(q)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(q_1)\dfrac{\partial y}{\partial \upsilon}(q) \end{pmatrix}$$

και θα έχει άρα βαθμό μικρότερο από 2, αφού η τρίτη γραμμή του είναι γραμμικός συνδιασμός των δύο πρώτων οι οποίες έχουν ορίζουσα μηδέν, άτοπο. Άρα $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,\upsilon)}(q)\neq 0$ και συνεπώς από το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης η $Z^{-1}\mathrm{o}X$ είναι αμφιδιαφόριση σε μια περιοχή του q. Ομοίως αποδεικνύεται ότι και η $Z^{-1}\mathrm{o}Y$ είναι αμφιδιαφόριση σε μια περιοχή του q.□

Πόρισμα 3.1.1 Έστω $X{:}U\to\mathbf{R}^3$ ομαλή παραμετρική επιφάνεια και $\alpha{:}I\to\mathbf{R}^3$ διαφορίσιμη παραμετρική καμπύλη με $\alpha(I)\subseteq X(U)$ (δηλαδή η α βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια). Τότε η καμπύλη $\beta=X^{-1}\mathrm{o}\alpha{:}I\to\mathbf{R}^2$ είναι μια διαφορίσιμη παραμετρική καμπύλη.

Απόδειξη. Η β είναι συνεχής αφού η $X{:}U\to X(U)$ είναι ομοιομορφισμός. Έστω $t_0\in I$ και Z παραμετρικοποίηση "γράφημα" γύρω από το $\gamma(t_0)$ της ομαλής επιφάνειας $X(U)$ (Θεώρημα 3.1.1). Τότε σε μια περιοχή του t_0 θα έχουμε $\beta(t)=(X^{-1}\mathrm{o}Z)\mathrm{o}(Z^{-1}\mathrm{o}\gamma)(t)$ και αφού από το Θεώρημα 3.1.3 η $X^{-1}\mathrm{o}Z$ είναι τοπική αμφιδιαφόριση αρκεί να δείξουμε ότι η $Z^{-1}\mathrm{o}\gamma$ είναι διαφορίσιμη σε μια περιοχή του t_0. Αυτό όμως προκύπτει από το γεγονός ότι η Z^{-1} είναι προβολή σε κάποιο από τα συντεταγμένα επίπεδα. Π.χ. αν $Z(u,\upsilon)=(u,\upsilon,f(u,\upsilon))$ τότε για κάθε $p=(x,y,z)\in X(U)$ κοντά στο $\gamma(t_0)$ θα έχουμε $Z^{-1}(p)=(x,y)$.□

Έτσι κάθε καμπύλη πάνω σε μια ομαλή επιφάνεια μπορεί να γραφεί τοπικά στην μορφή $\alpha(t)=X(u(t),\upsilon(t))$. Θα λέμε ότι η α δίνεται *παραμετρικά*.

Παράδειγμα. Η σφαίρα S^2 μπορεί να καλυφθεί με δύο μόνο παραμετρικοποιήσεις (με μια δεν μπορεί) ως εξής. Έστω $N=(0,0,1)$ ο "βόρειος πόλος" της και $S=(0,0,-1)$ ο "νότιος". Θεωρούμε τις κεντρικές προβολές από τους δύο πόλους στο επίπεδο xy. Αυτές ονομάζονται "στερεογραφικές προβολές" και δίνονται από τις απεικονίσεις $\pi_N{:}S^2\backslash\{N\}\to\mathbf{R}^2$ και $\pi_S{:}S^2\backslash\{S\}\to\mathbf{R}^2$ όπου

$$\pi_N(x,y,z)=\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right),\ \pi_S(x,y,z)=\left(\frac{x}{1+z},\frac{y}{1+z}\right).$$

Οι απεικονίσεις $X=\pi_N^{-1}{:}\mathbf{R}^2\to S^2\backslash\{N\}$ και $Y=\pi_S^{-1}{:}\mathbf{R}^2\to S^2\backslash\{S\}$ είναι δύο ομαλές παραμετρικοποιήσεις της σφαίρας που την καλύπτουν. Έχουμε

$$X(u,\upsilon)=\left(\frac{2u}{1+u^2+\upsilon^2},\frac{2\upsilon}{1+u^2+\upsilon^2},\frac{-1+u^2+\upsilon^2}{1+u^2+\upsilon^2}\right)\text{ για }(u,\upsilon)\in\mathbf{R}^2$$

και

$$Y(s,t)=\left(\frac{2s}{1+s^2+t^2},\frac{2t}{1+s^2+t^2},\frac{1-s^2-t^2}{1+s^2+t^2}\right)\text{ για }(s,t)\in\mathbf{R}^2.$$

Επίσης $X(\mathbf{R}^2)\cap Y(\mathbf{R}^2)=S^2\backslash\{N,S\}$, $X^{-1}(S^2\backslash\{N,S\})=Y^{-1}(S^2\backslash\{N,S\})=\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ και η απεικόνιση αλλαγής παραμέτρων $h=X^{-1}\circ Y:\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}\to\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ είναι η αμφιδιαφόριση:

$$h(s,t)=\left(\frac{s}{s^2+t^2},\frac{t}{s^2+t^2}\right)\text{ για }(s,t)\in\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}.$$

Συνδιάζοντας το παραπάνω Θεώρημα με το γεγονός ότι ισοδύναμες ομαλές παραμετρικοποιήσεις έχουν στα αντίστοιχα σημεία το ίδιο εφαπτόμενο επίπεδο μπορούμε να δώσουμε τον ακόλουθο:

Ορισμός 3.1.4 Αν S είναι ομαλή επιφάνεια και $p\in S$ τότε ονομάζουμε εφαπτόμενο επίπεδο της S στο *σημείο της p* και το συμβολίζουμε με T_pS τον υπόχωρο (διάστασης 2) T_qX του $\mathbf{R}^3$ όπου $X{:}U\to\mathbf{R}^3$ μια παραμετρικοποίηση της S κοντά στο p και $X(q)=p$. Δηλαδή

$$T_pS=(DX)_q(\mathbf{R}^2).$$

Το γεγονός ότι το T_pS είναι ανεξέρτητο της παραμετρικοποίησης προκύπτει από τα παραπάνω. Η επόμενη πρόταση χαρακτηρίζει τον T_pS ανεξάρτητα από παραμετρικοποιήσεις.

Πρόταση 3.1.1 Το T_pS είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων $\mathbf{w}$ του $\mathbf{R}^3$ για τα οποία υπάρχει $\varepsilon>0$ και διαφορίσιμη καμπύλη $\alpha{:}(-\varepsilon,\varepsilon)\to S\subseteq\mathbf{R}^3$ τέτοια ώστε

$$\alpha(0)=p \text{ και } \alpha'(0)=\mathbf{w}.$$

Απόδειξη. Έστω $X{:}U\to S$ ομαλή παραμετρικοποίηση της S γύρω από το p. Αν $\mathbf{w}\in T_pS$ θα υπάρχουν $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ με $\mathbf{w}=\lambda X_u(q)+\mu X_\upsilon(q)$ όπου $q=X^{-1}(p)$. Έστω $\gamma(t)=X(q+(\lambda,\mu)t)$, $|t|<\varepsilon$ (όπου το $\varepsilon>0$ είναι αρκετά μικρό ώστε το $q+(\lambda,\mu)t\in U$ για $|t|<\varepsilon$). Τότε $\alpha(0)=p$ και από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε $\alpha'(0)=\lambda X_u(q)+\mu X_\upsilon(q)=\mathbf{w}$.

Αντιστόφως αν $\alpha{:}(-\varepsilon,\varepsilon)\to S\subseteq\mathbf{R}^3$ διαφορίσιμη καμπύλη τέτοια ώστε $\alpha(0)=p$ τότε υπάρχει $0<\delta<\varepsilon$ τέτοιο ώστε $\alpha((-\delta,\delta))\subseteq X(U)$ (η α είναι συνεχής) και άρα σύμφωνα με το Πόρισμα 3.1.1 η $\beta=X^{-1}\circ\alpha{:}(-\delta,\delta)\to U$ είναι διαφορίσιμη. Γράφοντας $\beta(t)=(u(t),\upsilon(t))$ παίρνουμε $\alpha(t)=X(u(t),\upsilon(t))$ και αφού $\beta(0)=q$ θα έχουμε $\alpha'(0)=u'(0)X_u(q)+\upsilon'(0)X_\upsilon(q)\in T_pS$.□

3.2 Διαφορικός λογισμός σε ομαλές επιφάνειες.

Πολλές έννοιες του Διαφορικού λογισμού γενικεύονται για απεικονίσεις μεταξύ ομαλών επιφανειών. Καταρχήν έχουμε τον εξής:

Ορισμός 3.2.1 (1) Έστω S ομαλή επιφάνεια και $p\in S$. Η συνάρτηση $f{:}S\to\mathbf{R}$ θα λέγεται διαφορίσιμη στο p αν υπάρχει (ομαλή) παραμετρικοποίηση $X{:}U\to S$ της S γύρω από το p τέτοια ώστε η $f\circ X{:}U\to\mathbf{R}$ να είναι διαφορίσιμη C^∞ σε μια περιοχή του $q=X^{-1}(p)$.

(2) Έστω S_1,S_2 ομαλές επιφάνειες και $p\in S_1$. Η απεικόνιση $f{:}S_1\to S_2$ θα λέγεται διαφορίσιμη στο p αν υπάρχουν (ομαλές) παραμετρικοποιήσεις $X{:}U\to S_1, Y{:}V\to S_2$ των S_1,S_2 γύρω από τα $p,f(p)$ αντίστοιχα τέτοιες ώστε $f(X(U))\subseteq Y(V)$ και η $Y^{-1}\circ f\circ X{:}U\to V$ να είναι διαφορίσιμη C^∞ σε μια περιοχή του $q=X^{-1}(p)$. Η $h=Y^{-1}\circ f\circ X{:}U\to V$ θα λέγεται *τοπική παράσταση* της f ως προς τις παραμετρικοποιήσεις X,Y.

Μια f όπως παραπάνω θα λέγεται διαφορίσιμη αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Παρατήρηση. Ο ορισμός είναι ανεξάρτητος των παραμετρικοποιήσεων. Πράγματι αν $X_1{:}U_1\to S_1, Y_1{:}V_1\to S_2$ είναι δύο άλλες παραμετρικοποιήσεις με $p\in X_1(U_1))$, $f(X_1(U_1))\subseteq Y_1(V_1)$

τότε η $Y_1^{-1}\circ f\circ X_1=(Y_1^{-1}\circ Y)\circ(Y^{-1}\circ f\circ X)\circ(X^{-1}\circ X_1)$ είναι διαφορίσιμη C^∞ σε μια περιοχή του $X_1^{-1}(p)$ αφού οι $(X^{-1}\circ X_1)$, $(Y_1^{-1}\circ Y)$ είναι τοπικές αμφιδιαφορίσεις.

Παράδειγμα. Η $f:S^2\to S^2$ με $f(x,y,z)=(-x,-y,-z)$ είναι διαφορίσιμη. Παίρνοντας π.χ. την $X(u,\upsilon)=(u,\upsilon,\sqrt{1-u^2-\upsilon^2})$ για το πεδίο ορισμού της (άνω ημισφαίριο) η Y θα πρέπει να παραμετρικοποιεί το *κάτω* ημισφαίριο άρα μπορούμε να πάρουμε την $Y(u,\upsilon)=(u,\upsilon,-\sqrt{1-u^2-\upsilon^2})$ οπότε η αντίστοιχη τοπική παράσταση είναι $Y^{-1}\circ f\circ X(u,\upsilon)=$ $=(-u,-\upsilon)$ που είναι διαφορίσιμη.

Γενικώτερα ισχύει η ακόλουθη:

Πρόταση 3.2.1 Έστω $F:W\to\mathbf{R}^3$ διαφορίσιμη C^∞ στο ανοικτό $W\subseteq\mathbf{R}^3$ και S_1,S_2 ομαλές επιφάνειες τέτοιες ώστε $S_1\subseteq W$ και $F(S_1)\subseteq S_2$. Τότε η απεικόνιση $f=F\big|_{S_1}:S_1\to S_2$ είναι διαφορίσιμη. Ομοίως αν η $F:W\to\mathbf{R}$ είναι C^∞ τότε η απεικόνιση $f=F\big|_{S_1}:S_1\to\mathbf{R}$ είναι διαφορίσιμη.

Απόδειξη. Η f είναι προφανώς συνεχής και άρα για κάθε $p\in S_1$ υπάρχουν (ομαλές) παραμετρικοποιήσεις $X:U\to S_1, Y:V\to S_2$ των S_1,S_2 γύρω από τα $p,f(p)$ αντίστοιχα τέτοιες ώστε $f(X(U))\subseteq Y(V)$ και η $Y:V\to S_2$ να είναι γράφημα. Τότε η Y^{-1} είναι προβολή σε κάποιο από τα συντεταγμένα επίπεδα και η $F\circ X:U\to\mathbf{R}^3$ είναι C^∞ σαν σύνθεση τέτοιων. Η σχέση $F(S_1)\subseteq S_2$ δίνει $Y^{-1}\circ f\circ X= Y^{-1}\circ F\circ X$ στο U και άρα η τοπική παράσταση είναι C^∞. Η απόδειξη της δεύτερης πρότασης είναι παρόμοια.□

Παράδειγμα. Για κάθε $p_0,\mathbf{u}\in\mathbf{R}^3$ και κάθε ομαλή επιφάνεια S οι συναρτήσεις $f,h:S\to\mathbf{R}$ με $f(p)=|p-p_0|^2$ και $h(p)=\mathbf{u}.(p-p_0)$ είναι διαφορίσιμες ως περιορισμοί C^∞ συναρτήσεων του $\mathbf{R}^3$.

Ορισμός 3.2.2 Η απεικόνιση $f:S_1\to S_2$ θα λέγεται *αμφιδιαφόριση* αν είναι διαφορίσιμη ένα προς ένα και επί και η απεικόνιση $f:S_1\to S_2$ είναι επίσης διαφορίσιμη. Σε αυτή την περίπτωση οι ομαλές επιφάνειες S_1,S_2 θα λέγονται *αμφιδιαφορικές*.

Παράδειγμα. Η σφαίρα S^2 και το ελλειψοειδές $S=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\}$ είναι επιφάνειες αμφιδιαφορικές. Πράγματι η $f:S^2\to S$ με $f(x,y,z)=(ax,by,cz)$ είναι διαφορίσιμη (από την Πρόταση 3.2.1) ένα προς ένα και επί και η αντίστροφή της $f^{-1}(x,y,z)= =(x/a,y/b,z/c)$ είναι επίσης διαφορίσιμη.

Έχοντας ορίσει το εφαπτόμενο επίπεδο σαν την καλύτερη "γραμμική προσέγγιση" μιας επιφάνειας γύρω από ένα σημείο της μπορούμε τώρα να ορίσουμε το διαφορικό μιας διαφορίσιμης απεικόνισης $f:S_1\to S_2$ στο σημείο $p\in S_1$ ως την καλύτερη γραμμική απεικόνιση μεταξύ των αντίστοιχων εφαπτόμενων επιπέδων που "προσεγγίζει" την f κοντά στο p.

Ορισμός 3.2.3 Έστω η διαφορίσιμη απεικόνιση $f:S_1\to S_2$ και το σημείο $p\in S_1$. Τότε το *διαφορικό* της f στο p, $(df)_p:T_pS_1\to T_{f(p)}S_2$ ορίζεται ως εξής: Για κάθε $\mathbf{w}\in T_pS_1$ παίρνουμε μια διαφορίσιμη καμπύλη $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to S_1$ τέτοια ώστε $\alpha(0)=p$ και $\alpha'(0)=\mathbf{w}$ και θέτουμε $(df)_p(\mathbf{w})=\beta'(0)$ όπου $\beta=f\circ\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to S_2$.

Πρόταση 3.2.2 Η απεικόνιση $(df)_p:T_pS_1\to T_{f(p)}S_2$ είναι καλά ορισμένη και γραμμική.

Απόδειξη. Έστω $X:U\to S_1, Y:V\to S_2$ (ομαλές) παραμετρικοποιήσεις των S_1,S_2 γύρω από τα $p,f(p)$ αντίστοιχα τέτοιες ώστε $f(X(U))\subseteq Y(V)$ και $h=(h_1,h_2)=Y^{-1}\circ f\circ X:U\to V$ η αντίστοιχη τοπική παράσταση της f. Έστω $\mathbf{w}=\lambda X_u(q)+\mu X_\upsilon(q)\in T_pS_1$, $q=X^{-1}(p)$ και μια καμπύλη $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to S_1$ τέτοια ώστε $\alpha(0)=p$ και $\alpha'(0)=\mathbf{w}$. Τότε για μικρά t η α θα δίνεται παραμετρικά ως $\alpha(t)=X(u(t),\upsilon(t))$ και άρα $\mathbf{w}=\alpha'(0)=u'(0)X_u(q)+\upsilon'(0)X_\upsilon(q)$ απ' όπου παίρνουμε $\lambda=u'(0),\mu=\upsilon'(0)$. Συνεπώς $\beta(t)=f\circ\alpha(t)=f\circ X(u(t),\upsilon(t))=Y\circ h(u(t),\upsilon(t))=Y(h_1(u(t),\upsilon(t)),h_2(u(t),\upsilon(t)))$ και άρα από τον κανόνα της αλυσίδας θα έχουμε

$$(df)_p(\mathbf{w})=\beta'(0)=Y_s(h(q))\left(\frac{\partial h_1}{\partial u}(q)\lambda+\frac{\partial h_1}{\partial \upsilon}(q)\mu\right)+Y_t(h(q))\left(\frac{\partial h_2}{\partial u}(q)\lambda+\frac{\partial h_2}{\partial \upsilon}(q)\mu\right).$$

Άρα το $(df)_p(\mathbf{w})$ εξαρτάται μόνο από τα λ,μ και όχι την καμπύλη α και είναι γραμμική συνάρτηση του (λ,μ).□

Παρατήρηση. Από την απόδειξη προκύπτει ότι ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης $(df)_p{:}T_pS_1\to T_{f(p)}S_2$ ως προς τις βάσεις $<X_u(q),X_\upsilon(q)>$ και $<Y_s(h(q)),Y_t(h(q))>$ που ορίζουν οι παραμετρικοποιήσεις στα αντίστοιχα εφαπτόμενα επίπεδα είναι ίσος με

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u}(q) & \frac{\partial h_1}{\partial \upsilon}(q) \\ \frac{\partial h_2}{\partial u}(q) & \frac{\partial h_2}{\partial \upsilon}(q) \end{pmatrix}$$

δηλαδή με τον Ιακωβιανό πίνακα της αντίστοιχης τοπικής παράστασης της f.

Ομοίως ορίζεται και το διαφορικό μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $f{:}S\to\mathbf{R}$ στο σημείο $p\in S$ ως η γραμμική απεικόνιση (απόδειξη ανάλογα) $(df)_p{:}T_pS\to\mathbf{R}$ με $(df)_p(\mathbf{w})=(f\circ\alpha)'(0)$ για κάθε $\mathbf{w}\in T_pS$ και κάθε διαφορίσιμη καμπύλη $\alpha{:}(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$ τέτοια ώστε $\alpha(0)=p$ και $\alpha'(0)=\mathbf{w}$. Πολλές από τις ιδιότητες των διαφορίσιμων απεικονίσεων μεταξύ Ευκλειδίων χώρων (π.χ. ο κανόνας της αλυσίδας) γενικεύονται και για απεικονίσεις μεταξύ ομαλών επιφανειών. Το θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης γίνεται:

Πρόταση 3.2.3 Έστω η διαφορίσιμη απεικόνιση $f{:}S_1\to S_2$ και το σημείο $p\in S_1$. Αν το διαφορικό της f στο p, $(df)_p{:}T_pS_1\to T_{f(p)}S_2$ είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός τότε η f είναι μια τοπική αμφιδιαφόριση.

Παραδείγματα. 1) Έστω $L{:}\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ μια γραμμική απεικόνιση και S_1,S_2 ομαλές επιφάνειες με $L(S_1)\subseteq S_2$. Τότε από την Πρόταση 3.2.1 η απεικόνιση $L{:}S_1\to S_2$ είναι διαφορίσιμη. Έστω $\mathbf{w}\in T_pS_1$ και διαφορίσιμη καμπύλη $\alpha{:}(-\varepsilon,\varepsilon)\to S_1$ τέτοια ώστε $\alpha(0)=p$ και $\alpha'(0)=\mathbf{w}$. Τότε $(dL)_p(\mathbf{w})=\lim_{t\to 0}(\frac{L(\alpha(t))-L(\alpha(0))}{t})=\lim_{t\to 0} L(\frac{\alpha(t)-\alpha(0)}{t})=L(\alpha'(0))=L(\mathbf{w})$ δηλαδή το $(dL)_p$ είναι ο περιορισμός της L στον υπόχωρο T_pS_1 του $\mathbf{R}^3$.

2) Έστω η διαφορίσιμη συνάρτηση $f{:}S\to\mathbf{R}$ με $f(p)=|p-p_0|^2$. Τότε αν $\mathbf{w}\in T_pS$ και $\alpha{:}(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$ διαφορίσιμη με $\alpha(0)=p$ και $\alpha'(0)=\mathbf{w}$ έχουμε

$$(df)_p(\mathbf{w})=(f\circ\alpha)'(0)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}|\alpha(t)-p_0|^2=2(\alpha(0)-p_0).\alpha'(0)=2(p-p_0).\mathbf{w}.$$

Γενικώτερα ισχύει η ακόλουθη:

Πρόταση 3.2.4 Έστω $F{:}W\to\mathbf{R}^3$ διαφορίσιμη στο ανοικτό $W\subseteq\mathbf{R}^3$ και S_1,S_2 ομαλές επιφάνειες με $S_1\subseteq W$, $F(S_1)\subseteq S_2$ και η απεικόνιση $f=F\big|_{S_1}{:}S_1\to S_2$. Τότε το διαφορικό $(df)_p{:}T_pS_1\to T_{f(p)}S_2$ της f στο σημείο $p\in S_1$ είναι ίσο με τον *περιορισμό* του διαφορικού $(DF)_p{:}\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ στον υπόχωρο T_pS_1 του $\mathbf{R}^3$.

Απόδειξη. Αν $\mathbf{w}\in T_pS_1$ και $\alpha{:}(-\varepsilon,\varepsilon)\to S_1$ διαφορίσιμη καμπύλη με $\alpha(0)=p$ και $\alpha'(0)=\mathbf{w}$ τότε από τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε $(df)_p(\mathbf{w})=(f\circ\alpha)'(0)=(F\circ\alpha)'(0)=(DF)_{\alpha(0)}(\alpha'(0))=$ $=(DF)_p(\mathbf{w})$.□

3.3 Η απεικόνιση Gauss και ο "τελεστής σχήματος".

Ιδιαίτερη για την γεωμετρία μιας ομαλής εποφάνειας S σημασία έχει το πως μεταβάλλεται το εφαπτόμενο επίπεδό της καθώς κινούμαστε πάνω σε αυτήν. Αυτό μπορεί να περιγραφεί αν έχουμε μια *διαφορίσιμη* απεικόνιση $\mathbf{N}{:}S\to S^2\subseteq\mathbf{R}^3$ τέτοια ώστε για κάθε $p\in S$ το $\mathbf{N}(p)$ να είναι ένα μοναδιαίο κάθετο στο T_pS διάνυσμα. Τέτοια απεικόνιση όμως δεν υπάρχει πάντα, π.χ. για την ταινία του Mobius δεν υπάρχει ούτε συνεχής $\mathbf{N}$. Ομαλές επιφάνειες για τις οποίες υπάρχει διαφορίσιμη (αρκεί να υποθέσουμε συνεχής) απεικόνιση $\mathbf{N}$ όπως παραπάνω ονομάζονται **προσανατολίσιμες**. Αποδεικνύεται ότι κάθε *συμπαγής* ομαλή επιφάνεια είναι προσανατολίσιμη. Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε μόνο με προσανατολίσιμες ομαλές επιφάνειες.

Ορισμός 3.3.1 Μια διαφορίσιμη απεικόνιση $\mathbf{N}{:}S\to S^2\subseteq\mathbf{R}^3$ τέτοια ώστε για κάθε $p\in S$ το $\mathbf{N}(p)$ είναι ένα μοναδιαίο κάθετο στο T_pS διάνυσμα η $\mathbf{N}$ ονομάζεται **απεικόνιση Gauss** της S.

Αν η S είναι *συνεκτική* τότε υπάρχουν μόνο δύο δυνατές επιλογές για την $\mathbf{N}$.

Παραδείγματα. 1) Αν $X:U\to\mathbf{R}^3$ είναι μια ομαλή παραμετρική επιφάνεια και $S=X(U)$ τότε η S είναι προσανατολίσιμη και μπορούμε να πάρουμε $\mathbf{N}(p)=\dfrac{X_u\times X_\upsilon}{|X_u\times X_\upsilon|}(X^{-1}(p))$. Στην περίπτωση αυτή θα γράφουμε για ευκολία $\mathbf{N}(u,\upsilon)$ αντί για το $\mathbf{N}(X(u,\upsilon))$, $(u,\upsilon)\in U$.

2) Κάθε ομαλή επιφάνεια S που δίνεται από μια καρτεσιανή εξίσωση $F(x,y,z)=a$ όπως στο Θεώρημα 3.1.2 είναι προσανατολίσιμη αφού μπορούμε να πάρουμε $\mathbf{N}(p)=\dfrac{\nabla F}{|\nabla F|}(p)$ για κάθε $p\in S$.

Η συμπεριφορά της απεικόινισης Gauss $\mathbf{N}$ κοντά στο σημείο $p\in S$ μας δίνει πληροφορίες για το πως και για το πόσο καμπυλώνεται η S στο p. Επειδή όμως μπορούμε να μεταβάλλουμε το $\mathbf{N}$ κατά άπειρες διευθύνσεις (κάθε διεύθυνση που ανήκει στον T_pS) οι πληροφορίες αυτές δεν θα δίνονται από έναν αριθμό (όπως στις καμπύλες) αλλά από την γραμμική απεικόνιση $(d\mathbf{N})_p:T_pS\to T_{\mathbf{N}(p)}S^2$. Δεδομένου όμως ότι

$$T_{\mathbf{N}(p)}S^2=\{\mathbf{w}\in\mathbf{R}^3:\mathbf{w}.\mathbf{N}(p)=0\}=T_pS,$$

μπορούμε να δούμε την απεικόνιση αυτή σαν ένα γραμμικό τελεστή $(d\mathbf{N})_p:T_pS\to T_pS$.

Ορισμός 3.3.2 Ο γραμμικός τελεστής $(d\mathbf{N})_p:T_pS\to T_pS$ ονομάζεται *τελεστής σχήματος* της ομαλής επιφάνειας S στο σημείο της p.

Η υλοποίηση του τελεστή αυτού γίνεται ως εξής: Αν $\mathbf{w}\in T_pS$ θεωρούμε μια καμπύλη $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to S\subseteq\mathbf{R}^3$ τέτοια ώστε $\alpha(0)=p$ και $\alpha'(0)=\mathbf{w}$, και θέτουμε $N(t)=\mathbf{N}\circ\alpha(t)$. Δεδομένου ότι το $N(t)$ είναι μοναδιαίο συμπεραίνουμε ότι το $(d\mathbf{N})_p(\mathbf{w})=N'(0)$ είναι κάθετο στο $N(0)=\mathbf{N}(p)$ και άρα ανήκει στο T_pS. Αν $X:U\to S$ είναι μια ομαλή παραμετρικοποίηση της S γύρω από το σημείο της p τότε για $\mathbf{w}=\lambda X_u(q)+\mu X_\upsilon(q)\in T_pS$, $q=X^{-1}(p)$ οπότε χρησιμοποιώντας μια καμπύλη $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$ τέτοια ώστε $\alpha(0)=p$ και $\alpha'(0)=\mathbf{w}$ που δίνεται παραμετρικά ως $\alpha(t)=X(u(t),\upsilon(t))$ με $\lambda=u'(0),\mu=\upsilon'(0)$ παίρνουμε $(d\mathbf{N})_p(\mathbf{w})=\lambda\mathbf{N}_u(q)+\mu\mathbf{N}_\upsilon(q)$ (γράφοντας $\mathbf{N}(u,\upsilon)$ αντί για $\mathbf{N}(X(u,\upsilon))$. Συνεπώς

$$(d\mathbf{N})_p(\lambda X_u(q)+\mu X_\upsilon(q))=\lambda\mathbf{N}_u(q)+\mu\mathbf{N}_\upsilon(q) \text{ για κάθε } \lambda,\mu\in\mathbf{R}.$$

Στην περίπτωση που η επιφάνεια S δίνεται από μια καρτεσιανή εξίσωση $F(x,y,z)=a$ όπως στο Θεώρημα 3.1.2 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 3.2.4 για τον υπολογισμό του $(d\mathbf{N})_p:T_pS\to T_pS$ αφού το $\mathbf{N}(p)=\dfrac{\nabla F}{|\nabla F|}(p)$ ορίζεται σε μια ανοικτή (στον $\mathbf{R}^3$) περιοχή της S.

Παραδείγματα. 1) Για την μοναδιαία σφαίρα μπορούμε να πάρουμε $\mathbf{N}(p)=-p$ και άρα από την Πρόταση 3.2.4 $(d\mathbf{N})_p=-\mathrm{id}_{T_pS^2}$. Η ισότητα αυτή συνεπάγεται ότι η σφαίρα καμπυλώνεται το ίδιο προς κάθε (εφαπτόμενη) κατεύθυνση.

2) Αν S είναι ο κύλινδρος με εξίσωση $x^2+y^2=1$ και $p=(1,0,0)$ τότε μπορούμε να πάρουμε $\mathbf{N}(x,y,z)=(-x,-y,0)$ για κάθε $(x,y,z)\in S$ και άρα από την Πρόταση 3.2.4 $(d\mathbf{N})_p(\alpha,\beta,\gamma)=(-\alpha,-\beta,0)$ για κάθε $(\alpha,\beta,\gamma)\in T_pS=\{(\lambda,\mu,\nu)\in\mathbf{R}^3:\lambda=0\}$. Άρα $(d\mathbf{N})_p(\mathbf{j})=-\mathbf{j}$ και $(d\mathbf{N})_p(\mathbf{k})=\mathbf{0}$ που σημαίνει ότι στο p ο κύλινδρος καμπυλώνεται κατά την κατεύθυνση του y-άξονα αλλά *δεν* καμπυλώνεται κατά την κατεύθυνση του z-άξονα.

Ασκήσεις

1. Έστω $P=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3:x=y\}$. Να εξετάσετε αν η απεικόνιση $X:U\to P$ με $U=\{(u,\upsilon)\in\mathbf{R}^2:u>\upsilon\}$ και $X(u,\upsilon)=(u+\upsilon,u+\upsilon,u\upsilon)$ είναι (ομαλή) παραμετρικοποίηση της P.
2. Ποιές από τις παρακάτω εξισώσεις παριστάνουν ομαλή επιφάνεια και γιατί; (i) $x^4+y^6+z^2=1$, (ii) $(x+y)^3+y^3+(z-x)^3=2$, (iii) $x^4=(y+z)^4$, (iv) $e^{xy}+e^{yz}+e^{zx}=4$, (v) $x^2+xy+y^2=z^3$.
3. Θεωρούμε τις ευθείες l_1,l_2 όπου η l_1 είναι ο άξονας των z και η l_2 δίνεται από τις $y=1,z=0$. Έστω S το σύνολο όλων των σημείων του χώρου που δεν ανήκουν σε καμιά από τις δύο ευθείες l_1 και l_2 και έχουν την ιδιότητα το άθροισμα των αποστάσεών τους από τις l_1 και l_2 είναι σταθερό και ίσο με 2. (i) Να δείξετε ότι το S είναι μια ομαλή επιφάνεια. *(ii) Να δείξετε ότι το σύνολο $S\cap\{(0,0,\sqrt{3})\}$ *δεν* είναι ομαλή επιφάνεια.

4. Να δείξετε ότι το ελλειπτικό παραβολοειδές $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ και το επίπεδο z=0 είναι αμφιδιαφορικές ομαλές επιφάνειες.
5. Έστω N=(0,0,1) ο βόρειος πόλος της S^2, $\pi_N:S^2\setminus\{N\}\to\mathbf{R}^2$ η αντίστοιχη στερεογραφική προβολή και $X=\pi_N^{-1}:\mathbf{R}^2\to S^2\setminus\{N\}$. Έστω επίσης η απεικόνιση $h:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ με $h(x,y)=(ax^2+by^2,xy)$ όπου $a,b\in\mathbf{R}$. Να βρείτε όλα τα a,b ώστε η απεικόνιση $f:S^2\to S^2$ με $f(p)=\begin{cases} XohoX^{-1}(p) & \text{αν } p\in S^2\setminus\{N\} \\ N & \text{αν } p=N \end{cases}$ να είναι διαφορίσιμη στο σημείο N.
6. Να βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο τυχαίο σημείο $p=(x_0,y_0,z_0)$ για κάθε μια από τις παρακάτω επιφάνειες: (i) $x^4+y^4+z^4=1$, (ii) $x^2+2y^2-z^2=2$, (iii) z=ημ(xy).
7. Να δείξετε ότι αν S είναι μια ομαλή επιφάνεια και P είναι ένα επίπεδο με $S\cap P=\{p\}$ τότε το P συμπίπτει με το εφπτόμενο επίπεδο της S στο p.
8. Δίνεται η παραμετρική επιφάνεια $X:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ με $X(u,\upsilon)=(u\upsilon,u+\upsilon,2u^2+\upsilon^2)$ και το σημείο $q=(1,1)\in\mathbf{R}^2$. Να βρείτε περιοχή V του q και γράφημα διαφορίσιμης συνάρτησης (πάνω από κάποιο από τα συντεταγμένα επίπεδα) ισοδύναμο με την $X|_V:V\to\mathbf{R}^3$.
9. Αφού δείξετε ότι το $S=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3:x^2y+y^2z+z^2x=6\}$ είναι ομαλή επιφάνεια να παρουσιάσετε κατάλληλη περιοχή του σημείου της $p=(2,2,-1)$ σαν γράφημα διαφορίσιμης συνάρτησης.
10. Αν η S είναι μια *συνεκτική* ομαλή επιφάνεια και η $f:S\to\mathbf{R}$ είναι διαφορίσιμη και τέτοια ώστε $(df)_p=0$ για κάθε $p\in S$, να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.
11. Έστω S ομαλή επιφάνεια και $p\in S$. (i) Αν η $f:S\to\mathbf{R}$ είναι διαφορίσιμη και το p είναι τοπικό ακρότατο της f να δείξετε ότι $(df)_p=0$. (ii) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή που παίρνει η συνάρτηση $f(x,y,z)=xyz$ πάνω στην μοναδιαία σφαίρα S^2.
12. Θεωρούμε την απεικόνιση $f:S^2\to S$ από την σφαίρα S^2 στο ελλειψοειδές $S=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3:4x^2+2y^2+z^2=1\}$ όπου $f(p)$="το σημείο τομής του ελλειψοειδούς S με την ημιευθεία $\mathbf{0}p$" για κάθε $p\in S^2$. Να δείξετε ότι η f είναι μια αμφιδιαφόριση και να υπολογίσετε το διαφορικό της $(df)_p:T_pS^2\to T_{f(p)}S$ στο τυχαίο σημείο $p\in S^2$.
13. Αν η S είναι μια *συνεκτική* ομαλή επιφάνεια τέτοια ώστε όλες οι κάθετες ευθείες της να διέρχονται από σταθερό σημείο να δείξετε ότι η S περιέχεται στην επιφάνεια μιας σφαίρας.
14. Έστω $S=X(\mathbf{R}^2)$ όπου $X(u,\upsilon)=(\upsilon\,\text{συν}\,u,\upsilon\,\text{ημ}\,u,u)$. (i) Να δείξετε ότι η S είναι μια ομαλή επιφάνεια. (ii) Να υπολογίσετε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $N(u,\upsilon)$ της S. (iii) Αν $p=(-1,0,\pi)$, $\mathbf{w}=(3,-2,2)$ να δείξετε ότι $\mathbf{w}\in T_pS$ και να εκφράσετε το $\mathbf{w}$ ως γραμμικό συνδιασμό των διανυσμάτων $X_u(q)$, $X_\upsilon(q)$ όπου $q=X^{-1}(p)$.

3.4 Η πρώτη θεμελιώδης μορφή.

Ο υπολογισμός μηκών και γωνιών διανυσμάτων του $\mathbf{R}^3$ γίνεται ως γνωστόν με χρήση του εσωτερικού γινομένου. Περιορίζοντας το εσωτερικό αυτό γινόμενο σε κάθε εφαπτόμενο επίπεδο μιας ομαλής επιφάνειας μας επιτρέπει να μετράμε μήκη και γωνίες πάνω σ' αυτή. Για κάθε p που ανήκει στην ομαλή επιφάνεια S θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο $<\ ,\ >_p:T_pS\times T_pS\to\mathbf{R}$ που είναι ο περιορισμός του εσωτερικού γινομένου του $\mathbf{R}^3$ στον υπόχωρο T_pS. Το εσωτερικό αυτό γινόμενο μεταβάλλεται με το p, αν και το εσωτερικό γινόμενο του $\mathbf{R}^3$ είναι σταθερό, διότι μεταβάλλεται το πεδίο ορισμού του.

Ορισμός 3.4.1 Η αντίστοιχη του παραπάνω εσωτερικού γινομένου θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή $\mathrm{I}_p:T_pS\to\mathbf{R}$ με $\mathrm{I}_p(\mathbf{w})=<\mathbf{w},\mathbf{w}>_p=\mathbf{w}.\mathbf{w}\geq 0$ για κάθε $\mathbf{w}\in T_pS$ ονομάζεται η *πρώτη θεμελιώδης μορφή* της ομαλής επιφάνειας S στο $p\in S$.

Έστω τώρα $X:U\to S$ (ομαλή) παραμετρικοποίηση της S γύρω από το p. Τότε αν $\mathbf{w}=\lambda X_u(q)+\mu X_\upsilon(q)\in T_pS$, $q=X^{-1}(p)$ θα έχουμε

$$\mathrm{I}_p(\mathbf{w})=(\lambda X_u(q)+\mu X_\upsilon(q)).(\lambda X_u(q)+\mu X_\upsilon(q))=\lambda^2X_u(q).X_u(q)+2\lambda\mu X_u(q).X_\upsilon(q)+\mu^2X_\upsilon(q).X_\upsilon(q).$$

Ορίζοντας λοιπόν τις συναρτήσεις $E,F,G:U\to\mathbf{R}$ με

$$E(u,\upsilon)=X_u(u,\upsilon).X_u(u,\upsilon),\ F(u,\upsilon)=X_u(u,\upsilon).X_\upsilon(u,\upsilon),\ G(u,\upsilon)=X_\upsilon(u,\upsilon).X_\upsilon(u,\upsilon),\ (u,\upsilon)\in U,$$

θα έχουμε

$$\mathrm{I}_p(\lambda X_u(q)+\mu X_\upsilon(q))=\lambda^2E(q)+2\lambda\mu F(q)+\mu^2G(q) \text{ για κάθε } q\in U,\ p=X(q)\in S,\ \lambda,\mu\in\mathbf{R}.$$

όσο για το αντίστοιχο εσωτερικό γινόμενο αν $\mathbf{w}_1=\lambda_1X_u(q)+\mu_1X_\upsilon(q),\mathbf{w}_2=\lambda_2X_u(q)+\mu_2X_\upsilon(q)\in T_pS$,

$$<\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2>_p=\lambda_1\lambda_2E(q)+(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1)F(q)+\mu_1\mu_2G(q).$$

Οι διαφορίσιμες συναρτήσεις $E,F,G{:}U\to\mathbf{R}$ που καθορίζουν πλήρως την πρώτη θεμελιώδη μορφή στο $X(U)$ ονομάζονται *συνιστώσες* της πρώτης θεμελιώδους μορφής της S ως προς την παραμετρικοποίηση $X{:}U\to S$. Αυτές μας επιτρέπουν να υπολογίζουμε μήκη και γωνίες καμπύλων που βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια S.

Αν η διαφορίσιμη καμπύλη $\alpha{:}I\to S$ δίνεται παραμετρικά στην μορφή $\alpha(t)=X(u(t),\upsilon(t))$ τότε $\alpha'(t)=X_u(u(t),\upsilon(t))u'(t)+X_\upsilon(u(t),\upsilon(t))\upsilon'(t)$ και άρα το μήκος της για $a\leq t\leq b$ θα δίνεται από την σχέση:

$$l(\alpha)=\int_a^b\sqrt{\mathrm{I}_p(\alpha'(t))}dt=\int_a^b\sqrt{E(u(t),\upsilon(t))u'(t)^2+2F(u(t),\upsilon(t))u'(t)\upsilon'(t)+G(u(t),\upsilon(t))\upsilon'(t)^2}\,dt$$

Επίσης αν φ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\in T_pS$ τότε

$$\text{συν}\varphi=\frac{<\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2>_p}{\sqrt{\mathrm{I}_p(\mathbf{w}_1)}\sqrt{\mathrm{I}_p(\mathbf{w}_2)}}$$

απ' όπου μπορεί κανείς να βρεί την γωνία υπό την οποία τέμνονται δυο καμπύλες της S. Οι συντεταγμένες γραμμές $u=u_0$ και $\upsilon=\upsilon_0$ ως προς την παραμετρικοποίηση $X{:}U\to S$ θα τέμνονται στο $p=X(u_0,\upsilon_0)$ υπό γωνία φ με

$$\text{συν}\varphi=\frac{<X_u,X_\upsilon>_p}{\sqrt{\mathrm{I}_p(X_u)}\sqrt{\mathrm{I}_p(X_\upsilon)}}=\frac{F(u_0,\upsilon_0)}{\sqrt{E(u_0,\upsilon_0)G(u_0,\upsilon_0)}}.$$

Άρα οι συντεταγμένες γραμμές μιας παραμετρικοποίησης $X{:}U\to S$ θα είναι παντού ορθογώνιες αν και μόνο αν για την αντίστοιχη συνιστώσα της πρώτης θεμελιώδους μορφής έχουμε $F(q)=0$ για κάθε $q\in U$. Μια τέτοια παραμετρικοποίηση θα λέγεται *ορθογώνια*.

Η πρώτη θεμελιώδης μορφή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του εμβαδού τμήματος μιας επιφάνειας ως εξής. Ως γνωστόν αν K συμπαγές υποσύνολο του $X(U)$ τότε το εμβαδόν του ισούται με $\iint_{X^{-1}(K)}\left|X_u(u,\upsilon)\times X_\upsilon(u,\upsilon)\right|dud\upsilon$. Η σχέση όμως $|X_u\times X_\upsilon|^2+(X_u.X_\upsilon)^2=|X_u|^2.|X_\upsilon|^2$ συνεπάγεται ότι το εμβαδόν αυτό θα είναι ίσο με

$$A(K)=\iint_{X^{-1}(K)}\sqrt{E(u,\upsilon)G(u,\upsilon)-F(u,\upsilon)^2}\,dud\upsilon.$$

Αν θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν όλης της επιφάνειας (αν αυτή είναι συμπαγής) τότε ή την χωρίζουμε σε ξένα μεταξύ τους τμήματα το καθένα από τα οποία περιέχεται στην εικόνα κάποιας παραμετρικοποίησης ή προσπαθούμε να βρούμε παραμετρικοποίηση $X{:}U\to S$ τέτοια ώστε το $S\backslash X(U)$ να είναι "διδιάστατου μέτρου μηδέν" (π.χ. ένωση πεπερασμένου πλήθους καμπύλων ή μεμονομένων σημείων) και να εφαρμόσουμε κατόπιν τον παραπάνω τύπο αλλά θέτοντας για K το ανοικτό U.

Γενικώτερα αν $f{:}K\to\mathbf{R}$ είναι συνεχής τότε το ολοκλήρωμά της πάνω στο K ορίζεται ως εξής:

$$\iint_K f dA=\iint_{X^{-1}(K)}(f\text{o}X)(u,\upsilon)\sqrt{E(u,\upsilon)G(u,\upsilon)-F(u,\upsilon)^2}\,dud\upsilon.$$

Παραδείγματα 1) Θεωρούμε την παραμετρικοποίηση $X{:}U\to S^2$ της σφαίρας S^2 με $X(u,\upsilon)=(\text{ημυσυν}u,\text{ημυημ}u,\text{συνυ})$, $U=\{(u,\upsilon)\in\mathbf{R}^2{:}0<u<2\pi,\ 0<\upsilon<\pi\}$ (σφαιρικές συντεταγμένες). Έχουμε $X_u=(-\text{ημυημ}u,\text{ημυσυν}u,0)$, $X_\upsilon=(\text{συνυσυν}u,\text{συνυημ}u,-\text{ημυ})$ και άρα

$$E(u,\upsilon)=\text{ημ}^2\upsilon,\ F(u,\upsilon)=0,\ G(u,\upsilon)=1,$$

η παραμετρικοποίηση αυτή είναι άρα ορθογώνια.

(α) Το μήκος της καμπύλης α της σφαίρας που δίνεται παραμετρικά από τις $u=2t$, $\upsilon=\pi/4$, $0<t<\pi$, θα είναι άρα $l(\alpha)=\int_0^\pi\sqrt{(\eta\mu^2\upsilon(t))u'(t)^2+\upsilon'(t)^2}\,dt=\sqrt{2}\pi$.

(β) Για να βρούμε την γωνία θ υπό την οποία τέμνονται οι καμπύλη α με $u(t)=t$, $\upsilon(t)=t$, $0<t<\pi$, και ο ισημερινός $\upsilon=\pi/2$, παρατηρούμε ότι η α θα τέμνει τον ισημερινό όταν το $\upsilon(t)=\pi/2$ άρα για $t=\pi/2$ και για την α έχουμε $u'(\pi/2)=\upsilon'(\pi/2)=1$ ενώ για τον ισημερινό ($u_1(s)=s$, $\upsilon_1(s)=\pi/2$) έχουμε $u_1'(\pi/2)=1$, $\upsilon_1'(\pi/2)=0$ και άρα

$$\text{συν}\theta=\frac{\text{ημ}^2(\pi/2)}{\sqrt{\text{ημ}^2(\pi/2)+1}\sqrt{\text{ημ}^2(\pi/2)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$ δηλαδή $\theta=\pi/4$.

(γ) Αφού η X καλύπτει όλη την σφαίρα εκτός από ένα ημικύκλιο μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε το εμβαδόν της σφαίρας. Θα έχουμε άρα $A(S^2)=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\text{ημ}^2\upsilon.1-0}\,dud\upsilon=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\text{ημ}\upsilon\, dud\upsilon=4\pi$.

2) *Επιφάνειες εκ περιστροφής*. Θεωρούμε μια *απλή* ομαλή καμπύλη C: $x=\varphi(\upsilon)$, $z=\psi(\upsilon)$, $\upsilon\in(a,b)$ στο xz-επίπεδο με $\varphi>0$ στο (a,b). Η επιφάνεια S που προκύπτει από την περιστροφή της καμπύλης C γύρω από τον άξονα των z μπορεί να παραμετρικοποιηθεί με την $X(u,\upsilon)=(\varphi(\upsilon)\text{συν}u,\varphi(\upsilon)\text{ημ}u,\psi(\upsilon))$, $u\in(0,2\pi)$, $\upsilon\in(a,b)$ και την $Y(u,\upsilon)=(\varphi(\upsilon)\text{συν}u,\varphi(\upsilon)\text{ημ}u,\psi(\upsilon))$, $u\in(-\pi,\pi)$, $\upsilon\in(a,b)$ που αποδεικνύεται ότι είναι ομαλές παραμετρικοποιήσεις. Άρα η S είναι μια ομαλή επιφάνεια. Οι συντεταγμένες γραμμές u=σταθ. ονομάζονται μεσημβρινοί και οι υ=σταθ. παράλληλοι. Ως προς την παραμετρικοποίηση X της επιφάνειας που καλύπτει το $S\backslash C$ έχουμε $X_u(u,\upsilon)=(-\varphi(\upsilon)\text{ημ}u,\varphi(\upsilon)\text{συν}u,0)$, $X_\upsilon(u,\upsilon)=(\varphi'(\upsilon)\text{συν}u,\varphi'(\upsilon)\text{ημ}u,\psi'(\upsilon))$ και άρα $\mathbf{N}(u,\upsilon)=\dfrac{1}{\sqrt{\psi'(\upsilon)^2+\varphi'(\upsilon)^2}}(\psi'(\upsilon)\text{συν}u,\psi'(\upsilon)\text{ημ}u,-\varphi'(\upsilon))$. Προκύπτει άρα ότι κάθε επίπεδο της μορφής $y=\lambda x$ τέμνει την S κάθετα κατά μήκος κάποιου μεσημβρινού και κάθε επίπεδο της μορφής $z=\psi(\upsilon_0)$ τέμνει την S κατά μήκος κάποιου παράλληλου και την τέμνει κάθετα αν και μόνο αν $\varphi'(\upsilon_0)=0$ δηλαδή αν και μόνο αν η εφαπτομένη της C στο υ_0 είναι παράλληλη στον άξονα των z. Οι συνιστώσες της πρώτης θεμελιώδους μορφής ως προς την παραπάνω παραμετρικοποίηση είναι

$$E(u,\upsilon)=\varphi(\upsilon)^2,\ F(u,\upsilon)=0,\ G(u,\upsilon)=\varphi'(\upsilon)^2+\psi'(\upsilon)^2,$$

η X άρα είναι ορθωγώνια. Το εμβαδόν άρα της S (αν είναι πεπερασμένο) μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο

$$A(S)=\int_a^b\int_0^{2\pi}\varphi(\upsilon)\sqrt{\varphi'(\upsilon)^2+\psi'(\upsilon)^2}\,dud\upsilon=2\pi\int_a^b\varphi(\upsilon)\sqrt{\varphi'(\upsilon)^2+\psi'(\upsilon)^2}\,d\upsilon\,.$$

Αν η καμπύλη C είναι παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου τότε ο τύπος αυτός δίνει $A(S)=2\pi\int_a^b\varphi(\upsilon)d\upsilon=2\pi(b-a)$.(μέση τιμή της απόστασης του τυχαίου σημείου της C από τον άξονα των z).

3) *Γραφήματα*. Έστω S η ομαλή επιφάνεια που είναι το γράφημα της διαφορίσιμης συνάρτησης $h{:}U\to\mathbf{R}$, όπου $U\subseteq\mathbf{R}^2$ ανοικτό. Ως προς την παραμετρικοποίηση $X{:}U\to\mathbf{R}^3$ με $X(x,y)=(x,y,h(x,y))$ θα έχουμε $X_x(x,y)=(1,0,h_x(x,y))$, $X_y(x,y)=(0,1,h_y(x,y))$ και $\mathbf{N}=\dfrac{1}{\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}}(-h_x,-h_y,1)$. Οι συνιστώσες άρα της πρώτης θεμελιώδους μορφής ως προς την παραπάνω παραμετρικοποίηση είναι

$$E=1+h_x^2,\ F=h_xh_y,\ G=1+h_y^2\,.$$

Για την γωνία θ υπό την οποία τέμνονται οι συντεταγμένες γραμμές x=σταθ. και y=σταθ. θα έχουμε

$$\text{συν}\theta=\frac{h_xh_y}{\sqrt{1+h_x^2}\sqrt{1+h_y^2}}$$

η παραμετρικοποίηση άρα εν γένει δεν είναι ορθογώνια. Επίσης αφού $EG-F^2=(1+h_x^2)(1+h_y^2)-(h_xh_y)^2=1+h_x^2+h_y^2$, το εμβαδόν του τμήματος της S που βρίσκεται πάνω από το συμπαγές χωρίο $R\subseteq U$ θα είναι

$$A(X^{-1}(R))=\iint_R\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}\,dxdy\,.$$

Βλέπουμε άρα ότι η πρώτη θεμελιώδης μορφή καθορίζει την "μετρική δομή" μιας επιφάνειας. Δηλαδή αν ξέρουμε τις συναρτήσεις $E,F,G{:}U\to\mathbf{R}$ (συνιστώσες) της πρώτης θεμελιώδους μορφής της S ως προς μια παραμετρικοποίηση $X{:}U\to S$ *χωρίς αναγκαστικά να γνωρίζουμε την παραμετρικοποίηση* X μπορούμε να υπολογίσουμε μήκη και γωνίες καμπύλων καθώς και εμβαδά χωρίων που βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια S αν δίνονται υπό παραμετρική μορφή.

Ορισμός 3.4.2 Μια αμφιδιαφόριση $f{:}S_1 \to S_2$ λέγεται *ισομετρία* αν για κάθε $p \in S_1$ και $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in T_pS_1$ έχουμε

$$<\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2>_p = <(df)_p(\mathbf{w}_1), (df)_p(\mathbf{w}_2)>_{f(p)} .$$

Αν $U \subseteq S_1$ είναι ανοικτό, μια ισομετρία $f{:}U \to S_2$ ονομάζεται *τοπική ισομετρία*.

Παρατήρηση. Αρκεί να υποθέσουμε ότι για κάθε $p \in S_1$ και $\mathbf{w} \in T_pS_1$ έχουμε $\mathrm{I}_p(\mathbf{w}) = \mathrm{I}_{f(p)}((df)_p(\mathbf{w}))$ (χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $2<\mathbf{a},\mathbf{b}> = <\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{a}+\mathbf{b}> - <\mathbf{a},\mathbf{a}> - <\mathbf{b},\mathbf{b}>$ που ισχύει για κάθε εσωτερικό γινόμενο).

Παράδειγμα. Αν $A{:}\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ είναι μια *ορθογώνια* γραμμική απεικόνιση τότε η A διατηρεί τα μήκη και άρα η απεικόνιση $A{:}S^2 \to S^2$ είναι μια ισομετρία.

Πρόταση 3.4.1 Αν S, S^* είναι δύο ομαλές επιφάνειες, $U \subseteq \mathbf{R}^2$ είναι ανοικτό και $X{:}U \to S$, $X^*{:}U \to S^*$ είναι ομαλές παραμετρικοποιήσεις τέτοιες ώστε να έχουμε $E=E^*$, $F=F^*$, $G=G^*$ στο U τότε η απεικόνιση $f = X^* \circ X^{-1}{:}X(U) \to S^*$ είναι μια τοπική ισομετρία.

Απόδειξη. Η f είναι μία τοπική αμφιδιαφόριση αφού η τοπική της παράσταση ως προς τις παραπάνω παραμετρικοποιήσεις είναι $X^{*-1} \circ f \circ X = \mathrm{id}_U$. Αν τώρα $p \in S$ και $q = X^{-1}(p) = X^{*-1}(f(p))$ τότε ο πίνακας του $(df)_p$ ως προς τις βάσεις που ορίζουν οι παραπάνω παεαμετρικοποιήσεις είναι ίσος με τον Ιακωβιανό πίνακα της id_U στο q δηλαδή
$(df)_p(\lambda X_u(q) + \mu X_\upsilon(q)) = \lambda X_u^*(q) + \mu X_\upsilon^*(q)$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Επίσης
$\mathrm{I}_p(\lambda X_u(q) + \mu X_\upsilon(q)) = \lambda^2 E(q) + 2\lambda\mu F(q) + \mu^2 G(q)$ και
$\mathrm{I}_{f(p)}(\lambda X_u^*(q) + \mu X_\upsilon^*(q)) = \lambda^2 E^*(q) + 2\lambda\mu F^*(q) + \mu^2 G^*(q)$ και αφού $E=E^*$, $F=F^*$, $G=G^*$ στο U συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{I}_p(\mathbf{w}) = \mathrm{I}_{f(p)}((df)_p(\mathbf{w}))$ για κάθε $p \in S$. Άρα η f είναι μια τοπική ισομετρία.□

Παράδειγμα. Αν S είναι το xy-επίπεδο και S^* ο κύλιδρος $x^2+y^2=1$ θεωρούμε τις παραμετρικοποιήσεις $X{:}U \to S$, $X^*{:}U \to S^*$ με $U = (0,2\pi) \times \mathbf{R}$ και $X(u,\upsilon) = (u,\upsilon,0)$, $X(u,\upsilon) = (\text{συν}u, \text{ημ}u, \upsilon)$ έχουμε $E=E^*=G=G^*=1$, $F=F^*=0$, στο U άρα η $X^* \circ X^{-1}{:}X(U) \to S^*$ είναι μια τοπική ισομετρία.

Ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τις πρώτες θεμελιώδεις μορφές για τις παρακάτω παραμετρικοποιήσεις: (i) $X(u,\upsilon) = (a\text{ημ}\upsilon\text{συν}u, b\text{ημ}\upsilon\text{ημ}u, c\text{συν}\upsilon)$ (ελλειψοειδές), (ii) $X(u,\upsilon) = (a\upsilon\text{συν}u, b\upsilon\text{ημ}u, \upsilon^2)$ (ελλειπτι-κό παραβολοειδές), (iii) $X(u,\upsilon) = (\text{συν}u - \upsilon\text{ημ}u, \text{ημ}u + \upsilon\text{συν}u, \upsilon)$. Να εκφράσετε το εμβαδόν του ελ-λειψοειδούς στο (i) στην μορφή απλού ολοκληρώματος.
2. (i) Να βρείτε την πρώτη θεμελιώδη μορφή της σφαίρας S^2 ως προς την παραμετρικοποίηση (στερεογραφικής προβολής) $X(u,\upsilon) = (\dfrac{2u}{1+u^2+\upsilon^2}, \dfrac{2\upsilon}{1+u^2+\upsilon^2}, \dfrac{-1+u^2+\upsilon^2}{1+u^2+\upsilon^2})$, $(u,\upsilon) \in \mathbf{R}^2$. (ii) Να υπολογίσετε το μήκος της καμπύλης πάνω στην S^2 που δίνεται παραμετρικά από τις $u(t)=2+t$, $\upsilon(t)=3t$, $t \in \mathbf{R}$. (iii) Αν $A = \{(u,\upsilon) \in \mathbf{R}^2 : u>0,\ 0<\upsilon<\lambda u\}$ ($\lambda>0$ σταθερό) να περιγράψετε το υποσύνολο $B = X(A)$ της S^2 και να υπολογίσετε το εμβαδόν του.
3. Αν η $f{:}S^2 \to \mathbf{R}$ δίνεται από την $f(x,y,z) = |x|$ να υπολογίσετε το $\iint_{S^2} f dA$.
4. Θεωρούμε την παραμετρικοποίηση X της σφαίρας S^2 με $X(u,\upsilon) = (\text{ημ}\upsilon\text{συν}u, \text{ημ}\upsilon\text{ημ}u, \text{συν}\upsilon)$, $0<u<2\pi$, $0<\upsilon<\pi$. Να βρείτε καμπύλη $\alpha{:}I \to S^2$ με $\alpha(0)=(0,1,0)$ με την ιδιότητα η α να τέμνει τους μεσημβρινούς u=σταθ. υπό σταθερή γωνία ίση με $\pi/4$. Να βρεθεί η α στην μορφή $\alpha(t) = X(u(t), \upsilon(t))$.
5. Θεωρούμε την παραμετρικοποίηση X της σφαίρας S^2 με $X(u,\upsilon) = (\text{ημ}\upsilon\text{συν}u, \text{ημ}\upsilon\text{ημ}u, \text{συν}\upsilon)$, $0<u<2\pi$, $0<\upsilon<\pi$. (i) Να υπολογίσεται το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου της S^2 που έχει πλευρές τον παράλληλο $u=\pi4$, τον μεσημβρινό $\upsilon=0$ και την καμπύλη σε παραμετρική μορφή $u=t, \upsilon=t$. (ii) Να βρείτε την γωνία υπό την οποία τέμνονται οι καμπύλες που έχουν παραμετρική μορφή α_1: $u_1(t)=6t, \upsilon_1(t) = \dfrac{\pi}{6} - t$, $0<t<\pi/12$ και α_2: $u_2(s)=s, \upsilon_2(s)=s^2/\pi$, $0<s<\pi$. *(iii) Να βρείτε την καμπύλη πάνω στην σφαίρα που συνδέει τα σημεία με σφαιρικές συντεταγμένες $(u,\upsilon)=(0,0)$ και $(u,\upsilon)=(\pi/2,\pi/2)$ και έχει το ελάχιστο δυνατό μήκος.
6. Να βρείτε καμπύλη πάνω στο υπερβολοειδές εκ περιστροφής $x^2+y^2-z^2=1$ που να διέρχεται από το σημείο $(1,0,0)$ και να τέμνει τις παραλλήλους υπό σταθερή γωνία $\varphi \in (0,\pi/2)$.

7. Θεωρούμε το παραβολοειδές $z=x^2+y^2$. (i) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τμήματος του παραβολοειδούς που βρίσκεται στον ημιχώρο $z\leq a^2$. (ii) Να βρεθούν οι καμπύλες πάνω στο παραβολοειδές που τέμνουν τις συντεταγμένες γραμμές x=σταθ. κάθετα.
8. Δίνεται η παραμετρική επιφάνεια $X(u,\upsilon)=(u\text{συν}\upsilon, u\text{ημ}\upsilon, \log\text{συν}\upsilon+u)$, $-\frac{\pi}{2}<\upsilon<\frac{\pi}{2}$. Να δείξετε ότι για σταθερά a,b οι συντεταγμένες γραμμές $X(a,\upsilon)$ και $X(b,\upsilon)$ ορίζουν τμήματα ίσου μήκους σε καθεμία από τις συντεταγμένες γραμμές της μορφής $X(u,\text{σταθ.})$.
9. (i) Έστω S ομαλή επιφάνεια, $X:U\to S$ και $Y:V\to S$ ομαλές παραμετρικοποιήσεις της S με $X(U)\cap Y(V)=A\neq\varnothing$ και $h=X^{-1}\circ Y : Y^{-1}(A)\to X^{-1}(A)$ η απεικόνιση αλλαγής παραμέτρων. Να βρείτε την σχέση που έχουν οι συνιστώσες $E,F,G:X^{-1}(A)\to\mathbf{R}$ της πρώτης θεμελιώδους μορφής της S ως προς την παραμετρικοποίηση X με τις αντίστοιχες συνιστώσες $E^*,F^*,G^*:Y^{-1}(A)\to\mathbf{R}$ ως προς την Y. (ii) Να δείξετε ότι κάθε επιφάνεια εκ περιστροφής μπορεί να παραμετρικοποιηθεί έτσι ώστε $E=E(\upsilon)$, $F=0$, $G=1$.
10. Να δείξετε ότι αν αν S είναι ομαλή επιφάνεια, $K\subseteq S$ συμπαγές και $f:K\to\mathbf{R}$ συνεχής τότε ο ορισμός του ολοκληρώματος $\iint_K f dA$ είναι ανεξέρτητος της παραμετρικοποίησης που χρησιμοποιείται.
11. Να βρείτε μια τοπική ισομετρία μεταξύ του κώνου (χωρίς την κορυφή) $K=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : z>0$ και $x^2+y^2-z^2=0\}$ και του xy-επιπέδου.
12. *Να δείξετε ότι *δεν* υπάρχει παραμετρικοποίηση $X:U\to S^2$ τμήματος της σφαίρας ως προς την οποία η πρώτη θεμελιώδης μορφή να έχει συνιστώσες $E(u,\upsilon)=G(u,\upsilon)=1$, $F(u,\upsilon)=0$ για κάθε $(u,\upsilon)\in U$. Να συμπεράνετε ότι *δεν* υπάρχει τοπική ισομετρία μεταξύ του επιπέδου και της σφαίρας.

3.5 Η δεύτερη θεμελιώδης μορφή

Ο τελεστής σχήματος $(d\mathbf{N})_p:T_pS\to T_pS$ μιας ομαλής επιφάνειας S στο σημείο της p και η αντίστοιχη πρώτη θεμελιώδης μορφή I_p συνδέονται ως εξής:

Θεώρημα 3.5.1 Ο τελεστής σχήματος $(d\mathbf{N})_p:T_pS\to T_pS$ της ομαλής επιφάνειας S στο σημείο της p είναι συμμετρικός (αυτοσυζυγής) ως προς το εσωτερικό γινόμενο $<,>_p$ του T_pS.

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι $<(d\mathbf{N})_p(\mathbf{w}_1),\mathbf{w}_2>_p=<(d\mathbf{N})_p(\mathbf{w}_2),\mathbf{w}_1>_p$ για κάθε $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\in T_pS$. Έστω $X:U\to S$ μια ομαλή παραμετρικοποίηση της S γύρω από το p. Αφού όμως $(d\mathbf{N})_p(\lambda X_u(q)+\mu X_\upsilon(q))=\lambda\mathbf{N}_u(q)+\mu\mathbf{N}_\upsilon(q)$ για κάθε $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ όπου $q=X^{-1}(p)$ αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathbf{N}_u(q).X_\upsilon(q)=\mathbf{N}_\upsilon(q).X_u(q).$$

Παραγωγίζοντας όμως την σχέση $\mathbf{N}.X_\upsilon=0$ ως προς u παίρνουμε $\mathbf{N}_u.X_\upsilon+\mathbf{N}.X_{\upsilon u}=0$ και ομοίως παραγωγίζοντας την $\mathbf{N}.X_u=0$ ως προς υ παίρνουμε $\mathbf{N}_\upsilon.X_u+\mathbf{N}.X_{u\upsilon}=0$. Αφού λοιπόν ισχύει $X_{\upsilon u}=X_{u\upsilon}$ στο U συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{N}_u.X_\upsilon=-\mathbf{N}.X_{\upsilon u}=-\mathbf{N}.X_{u\upsilon}=\mathbf{N}_\upsilon.X_u$ στο U και άρα ο $(d\mathbf{N})_p$ είναι συμμετρικός.□

Ορισμός 3.5.1 Η τετραγωνική μορφή $\mathrm{II}_p:T_pS\to\mathbf{R}$ (αντίστοιχη του συμμετρικού τελεστή $-(d\mathbf{N})_p$) με $\mathrm{II}_p(\mathbf{w})=-<(d\mathbf{N})_p(\mathbf{w}),\mathbf{w}>_p$ για κάθε $\mathbf{w}\in T_pS$ ονομάζεται η *δεύτερη θεμελιώδης μορφή* της ομαλής επιφάνειας S στο $p\in S$.

Η τετραγωνική αυτή μορφή δεν είναι αναγκαστικά θετικά ορισμένη. Αν $X:U\to S$ είναι μια ομαλή παραμετρικοποίηση της S γύρω από το p τότε για κάθε $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ θα έχουμε:

$$\mathrm{II}_p(\lambda X_u(q)+\mu X_\upsilon(q))=-(\lambda\mathbf{N}_u(q)+\mu\mathbf{N}_\upsilon(q)).(\lambda X_u(q)+\mu X_\upsilon(q)) \text{ και άρα}$$

$$\mathrm{II}_p(\lambda X_u(q)+\mu X_\upsilon(q))=\lambda^2\mathbf{N}(q).X_{uu}(q)+2\lambda\mu\mathbf{N}(q).X_{u\upsilon}(q)+\mu^2\mathbf{N}(q).X_{\upsilon\upsilon}(q).$$

Οι συναρτήσεις $e,f,g:U\to\mathbf{R}$ με

$$e(u,\upsilon)=\mathbf{N}(u,\upsilon).X_{uu}(u,\upsilon),\ f(u,\upsilon)=\mathbf{N}(u,\upsilon).X_{u\upsilon}(u,\upsilon),\ g(u,\upsilon)=\mathbf{N}(u,\upsilon).X_{\upsilon\upsilon}(u,\upsilon)$$

ονομάζονται *συνιστώσες* της δεύτερης θεμελιώδους μορφής της S ως προς την παραμετρικοποίηση $X:U\to S$ και θα έχουμε:

$$\mathrm{II}_p(\lambda X_u(q)+\mu X_\upsilon(q))=\lambda^2 e(q)+2\lambda\mu f(q)+\mu^2 g(q) \text{ για κάθε } q\in U,\ p=X(q)\in S,\ \lambda,\mu\in\mathbf{R}.$$

Παράδειγμα. Για την μοναδιαία σφαίρα (με $\mathbf{N}(p)=-p$) έχουμε $(d\mathbf{N})_p=-\mathrm{id}_{T_pS^2}$ και άρα $\mathrm{II}_p=\mathrm{I}_p$ για κάθε $p\in S^2$.

Χρησιμοποιώντας τώρα γνωστές ιδιότητες των συμμετρικών γραμμικών τελεστών συμπεραίνουμε τα εξής:

α) Ο τελεστής σχήματος $(d\mathbf{N})_p{:}T_pS\to T_pS$ είναι διαγωνοποιήσιμος. Υπάρχει μάλιστα μια *ορθοκανονική* βάση $<\mathbf{w}_1(p),\mathbf{w}_2(p)>$ του T_pS και δύο πραγματικοί αριθμοί $k_1(p),k_2(p)$ $(k_1(p)\geq k_2(p))$ (ιδιοτιμές του $-(d\mathbf{N})_p$) τέτοια ώστε $(d\mathbf{N})_p(\mathbf{w}_1(p))=-k_1(p)\mathbf{w}_1(p)$ και $(d\mathbf{N})_p(\mathbf{w}_2(p))=-k_2(p)\mathbf{w}_2(p)$.
β) Οι αριθμοί $k_1(p)$ και $k_2(p)$ είναι αντίστοιχα η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή που παίρνει η δεύτερη θεμελιώδης μορφή II_p πάνω στον μοναδιαίο κύκλο $\{\mathbf{w}\in T_pS : I_p(\mathbf{w})=1\}$ του T_pS.

Ορισμός 3.5.2 α) Τα διανύσματα $\mathbf{w}_1(p),\mathbf{w}_2(p)$ της παραπάνω ορθοκανονικής βάσης του ονομάζονται **κύριες διευθύνσεις** της S στο p. Γενικώτερα κάθε ιδιοδιάνυσμα του $(d\mathbf{N})_p$ θα λέγεται **κύριο διάνυσμα**.
β) Οι πραγματικοί αριθμοί $k_1(p),k_2(p)$ $(k_1(p)\geq k_2(p))$ (ιδιοτιμές του $-(d\mathbf{N})_p$) ονομάζονται **κύριες καμπυλότητες** της S στο p.
γ) Το γινόμενο των κύριων καμπυλοτήτων $K(p)=k_1(p)k_2(p)=\det((d\mathbf{N})_p)$ ονομάζεται **καμπυλότητα Gauss** της S στο p.
δ) Το ημιάθροισμα των κύριων καμπυλοτήτων $H(p)=\frac{1}{2}(k_1(p)+k_2(p))=-\frac{1}{2}\mathrm{tr}((d\mathbf{N})_p)$ ονομάζεται **μέση καμπυλότητα** της S στο p.

Θα υπολογίσουμε τώρα τις παραπάνω ποσότητες χρησιμοποιώντας μια ομαλή παραμετρικοποίηση $X{:}U\to S$ της S γύρω από το p. Αφού
$(d\mathbf{N})_p(\lambda X_u(q)+\mu X_\upsilon(q))=\lambda\mathbf{N}_u(q)+\mu\mathbf{N}_\upsilon(q)$ για κάθε $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ (όπου $q=X^{-1}(p)$) για να βρούμε τον πίνακα της $(d\mathbf{N})_p$ ως προς την βάση $X_u(q),X_\upsilon(q)$ του T_pS αρκεί να βρούμε τους συντελεστές στις παρακάτω σχέσεις:

$$\mathbf{N}_u = a_{11}X_u + a_{21}X_\upsilon,$$
$$\mathbf{N}_\upsilon = a_{12}X_u + a_{22}X_\upsilon.$$

Θα έχουμε τότε
$(d\mathbf{N})_p(\lambda X_u(q)+\mu X_\upsilon(q))=\lambda(a_{11}(q)X_u(q)+a_{21}(q)X_\upsilon(q))+\mu(a_{12}(q)X_u(q)+a_{22}(q)X_\upsilon(q))$ για κάθε $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$
δηλαδή

$$(d\mathbf{N})_p(\lambda X_u(q)+\mu X_\upsilon(q))=(\lambda a_{11}(q)+\mu a_{12}(q))X_u(q)+(\lambda a_{21}(q)+\mu a_{22}(q))X_\upsilon(q) \text{ για κάθε } \lambda,\mu\in\mathbf{R}$$

και άρα ο πίνακας της $(d\mathbf{N})_p$ ως προς την βάση $X_u(q),X_\upsilon(q)$ του T_pS θα είναι ο

$$\begin{pmatrix} a_{11}(q) & a_{12}(q) \\ a_{21}(q) & a_{22}(q) \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας αυτός *δεν* είναι συμμετρικός εκτός αν η βάση $X_u(q),X_\upsilon(q)$ του T_pS είναι ορθοκανονική.

Για να βρούμε τις συναρτήσεις $a_{ij}{:}U\to\mathbf{R}$ πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά με X_u και με X_υ και παίρνουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned}
-e &= \mathbf{N}_u\cdot X_u = a_{11}X_u\cdot X_u + a_{21}X_\upsilon\cdot X_u = a_{11}E + a_{21}F,\\
-f &= \mathbf{N}_u\cdot X_\upsilon = a_{11}X_u\cdot X_\upsilon + a_{21}X_\upsilon\cdot X_\upsilon = a_{11}F + a_{21}G,\\
-f &= \mathbf{N}_\upsilon\cdot X_u = a_{12}X_u\cdot X_u + a_{22}X_\upsilon\cdot X_u = a_{12}E + a_{22}F,\\
-g &= \mathbf{N}_\upsilon\cdot X_\upsilon = a_{12}X_u\cdot X_\upsilon + a_{22}X_\upsilon\cdot X_\upsilon = a_{12}F + a_{22}G,
\end{aligned}$$

και άρα

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} -G & F \\ F & -E \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Έχουμε λοιπόν τις σχέσεις

$$\mathbf{N}_u = \frac{fF-eG}{EG-F^2}X_u + \frac{eF-fE}{EG-F^2}X_u,$$
$$\mathbf{N}_\upsilon = \frac{gF-fG}{EG-F^2}X_u + \frac{fF-gE}{EG-F^2}X_u,$$
οι οποίες ονομάζονται **εξισώσεις Weingarten**.

Από αυτές παίρνουμε για την καμπυλότητα Gauss:
$$K=\det(a_{ij})=\frac{eg-f^2}{EG-F^2},$$
και για την μέση καμπυλότητα:
$$H=-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(a_{ij})=-\frac{1}{2}(a_{11}+a_{22})=\frac{eG-2fF+gE}{2(EG-F^2)}.$$
Οι κύριες καμπυλότητες k_1, k_2 ($k_1 \geq k_2$) θα είναι ρίζες της εξίσωσης $k^2-2Hk+K=0$ και άρα:
$$k_1 = H+\sqrt{H^2-K},\ k_2 = H-\sqrt{H^2-K}.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι οι κύριες καμπυλότητες k_1, k_2 ($k_1 \geq k_2$) είναι *συνεχείς* συναρτήσεις πάνω στην S και μάλιστα διαφορίσιμες σε κάθε σημείο με $k_1>k_2$ δηλαδή με $H^2>K$. Σημεία της S για τα οποία έχουμε $k_1(p)=k_2(p)$ ονομάζονται **ομφαλικά**. Προφανώς σε κάθε ομφαλικό σημείο θα έχουμε για τον τελεστή σχήματος $(d\mathbf{N})_p=-k\mathrm{id}_{T_pS}$ (όπου $k=k_1(p)=k_2(p)$) δηλαδή η S στο p καμπυλώνεται το ίδιο προς κάθε (εφαπτόμενη) κατεύθυνση.

Για να βρούμε τώρα τις κύριες διευθύνσεις αρκεί να βρούμε δύο *μοναδιαία* ιδιοδιανύσματα του $-(d\mathbf{N})_p$ που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $k_1(p), k_2(p)$. Αν το $\mathbf{w}=\lambda X_u(q)+\mu X_\upsilon(q)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $(d\mathbf{N})_p$ τότε θα έχουμε
$$-k(\lambda X_u(q)+\mu X_\upsilon(q))=(d\mathbf{N})_p(\lambda X_u(q)+\mu X_\upsilon(q))=\lambda\mathbf{N}_u(q)+\mu\mathbf{N}_\upsilon(q)$$
και άρα πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με $X_u(q)$ και με $X_\upsilon(q)$ παίρνουμε:
$$\lambda e(q)+\mu f(q)=k(\lambda E(q)+\mu F(q)) \text{ και } \lambda f(q)+\mu g(q)=k(\lambda F(q)+\mu G(q))$$
και απαλείφοντας το k παίρνουμε $(\lambda E(q)+\mu F(q))(\lambda f(q)+\mu g(q))=(\lambda F(q)+\mu G(q))(\lambda e(q)+\mu f(q))$ που δίνει $\lambda^2(E(q)f(q)-F(q)e(q))+\lambda\mu(E(q)g(q)-G(q)e(q))+\mu^2(F(q)g(q)-G(q)f(q))=0$ ή ισοδύναμα
$$\begin{vmatrix} \mu^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 \\ E(q) & F(q) & G(q) \\ e(q) & f(q) & g(q) \end{vmatrix}=0.$$

Η σχέση αυτή μας επιτρέπει να βρούμε όλα τα κύρια διανύσματα. Για τις κύριες διευθύνσεις πρέπει να την συνδιάσουμε με την $\mathrm{I}_p(\mathbf{w})=\lambda^2E(q)+2\lambda\mu F(q)+\mu^2G(q)=1$.

Το σημείο p της επιφάνειας S είναι *ομφαλικό* αν και μόνο αν η παραπάνω ορίζουσα μηδενίζεται για κάθε $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχει $\kappa\in\mathbf{R}$ με
$$e(q)=\kappa E(q),\ f(q)=\kappa F(q),\ g(q)=\kappa G(q).$$

Έχουμε ακόμη την ακόλουθη:

Πρόταση 3.5.1 Έστω ότι το σημείο $p=X(q)$ της επιφάνειας S *δεν* είναι ομφαλικό. Τότε τα διανύσματα $X_u(q)$ και $X_\upsilon(q)$ είναι κύρια αν και μόνο αν $f(q)=F(q)=0$. Στην περίπτωση αυτή οι αντίστοιχες κύριες καμπυλότητες είναι $\frac{e(q)}{E(q)}$ και $\frac{g(q)}{G(q)}$.

Απόδειξη. Τα $X_u(q)$ και $X_\upsilon(q)$ είναι κύρια αν και μόνο αν είναι ορθογώνια δηλαδή $F(q)=X_u(q)\boldsymbol{.}X_\upsilon(q)=0$ (αφού το σημείο δεν είναι ομφαλικό) και επιπλέον $\begin{vmatrix} \mu^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 \\ E(q) & F(q) & G(q) \\ e(q) & f(q) & g(q) \end{vmatrix}=0$ για $(\lambda,\mu)=(1,0)$ και $(0,1)$ δηλαδή $f(q)=0$. Θα έχουμε άρα:

$$\begin{pmatrix} a_{11}(q) & a_{12}(q) \\ a_{21}(q) & a_{22}(q) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} E(q) & 0 \\ 0 & G(q) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e(q) & 0 \\ 0 & g(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{e(q)}{E(q)} & 0 \\ 0 & -\dfrac{g(q)}{G(q)} \end{pmatrix},$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό για τις κύριες καμπυλότητες.

Επίσης για τα ομφαλικά σημεία ισχύει το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.4.2 Έστω S *συνεκτική* ομαλή επιφάνεια όλα τα σημεία της οποίας είναι ομφαλικά. Τότε η S περιέχεται ή σε ένα επίπεδο ή σε μια σφαίρα.

Απόδειξη. Αφού η S είναι συνεκτική αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ομαλή παραμετρικοποίηση $X{:}U\to S$ της S με το U *συνεκτικό* το $X(U)$ περιέχεται ή σε ένα επίπεδο ή σε μια σφαίρα. Θα έχουμε όμως αφού για κάθε $q=(u,\upsilon)\in U$ το $p=X(q)$ είναι ομφαλικό ότι

$$\mathbf{N}_u(q)=(d\mathbf{N})_p(X_u(q))=-k(q)X_u(q) \text{ και } \mathbf{N}_\upsilon(q)=(d\mathbf{N})_p(X_\upsilon(q))=-k(q)X_\upsilon(q)$$

όπου η $k{:}U\to\mathbf{R}$ είναι διαφορίσιμη. Παραγωγίζοντας ως προς u και υ παίρνουμε

$$-k_\upsilon X_u=\mathbf{N}_{u\upsilon}+kX_{u\upsilon}=\mathbf{N}_{\upsilon u}+kX_{\upsilon u}=-k_u X_\upsilon$$

στο U και αφού τα X_u,X_υ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα έχουμε ότι $k_u=k_\upsilon$ στο U και αφού το U είναι συνεκτικό ότι η kείναι *σταθερή* στο U. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) $k=0$ στο U. Τότε $\mathbf{N}_u=\mathbf{N}_\upsilon=\mathbf{0}$ στο U και άρα το $\mathbf{N}=\mathbf{a}$ είναι σταθερό. Άρα $(\mathbf{a}.X)_u=\mathbf{N}.X_u=0$ και ομοίως $(\mathbf{a}.X)_\upsilon=\mathbf{N}.X_\upsilon=0$ στο U δηλαδή το $\mathbf{a}.X=c$ είναι σταθερό και συνεπώς το $X(U)$ περιέχεται στο επίπεδο $\mathbf{a}.\mathbf{x}=c$.

β) $k\neq 0$ στο U. Τότε από τις $(\mathbf{N}+kX)_u=(\mathbf{N}+kX)_\upsilon=\mathbf{0}$ στο U παίρνουμε ότι το $\mathbf{N}+kX=\mathbf{b}$ είναι σταθερό, $\left|X-\dfrac{1}{k}\mathbf{b}\right|=\dfrac{1}{|k|}|\mathbf{N}|=\dfrac{1}{|k|}$ και συνεπώς το $X(U)$ περιέχεται στην σφαίρα $\left|\mathbf{x}-\dfrac{1}{k}\mathbf{b}\right|=\dfrac{1}{|k|}$.□

Έστω τώρα $\alpha{:}(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$ ομαλή καμπύλη παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου, που βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια, με $\alpha(0)=p$. Θέτοντας $N(s)=\mathbf{N}\circ\alpha(s)$ και παραγωγίζοντας την σχέση $N(s).\alpha'(s)=0$ παίρνουμε $N'(s).\alpha'(s)+N(s).\alpha''(s)=0$. Έχουμε όμως $\alpha''(0)=k(0)\mathbf{n}(0)$ (όπου k η καμπυλότητα της α) και $N'(0)=(d\mathbf{N})_p(\alpha'(0))$ και άρα $(d\mathbf{N})_p(\alpha'(0)).\alpha'(0)+k(0)\mathbf{n}(0).\mathbf{N}(p)=0$ που δίνει την σχέση:

$$k(0)\mathbf{n}(0).\mathbf{N}(p)=\mathrm{II}_p(\alpha'(0)).$$

Η ποσότητα $k_n=k(0)\mathbf{n}(0).\mathbf{N}(p)=k(0)$συν$\omega$ (όπου $\omega\in(0,\pi)$ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\mathbf{n}(0)$ και $\mathbf{N}(p)$) είναι η προβολή του διανύσματος της επιτάχυνσης της α στο κάθετο στην S διάνυσμα και ονομάζεται **κάθετη καμπυλότητα** της καμπύλης α στο p. Δηλαδή η κάθετη καμπυλότητα είναι η συνιστώσα της επιτάχυνσης που είναι κάθετη στην επιφάνεια και άρα εξαρτάται και από την καμπύλη και από την επιφάνεια. Παρατηρούμε όμως ότι η k_n αντίθετα με την καμπυλότητα της α εξαρτάται μόνο από το εφαπτόμενο διάνυσμα $\alpha'(0)$ και όχι από το $\alpha''(0)$. Έχουμε δηλαδή το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.5.3 (Meusnier) Όλες οι καμπύλες της S που διέρχονται από το p και έχουν το ίδιο εφαπτόμενο διάνυσμα στο p θα έχουν και την ίδια κάθετη καμυλότητα στο p.

Μπορούμε άρα να γράψουμε $k_n(\mathbf{w})$ για την κοινή κάθετη καμπυλότητα όλων των ομαλών καμπύλων της S που διέρχονται από το p και έχουν ως εφαπτόμενο το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{w}\in T_pS$.

Συμπεραίνουμε άρα ότι η κάθετη καμπυλότητα $k_n(\mathbf{w})$ είναι ίση με την *καμπυλότητα* στο p της *επίπεδης* καμπύλης που είναι η τομή της S με το επίπεδο που διέρχεται από το p και είναι παράλληλο στα διανύσματα $\mathbf{w}$ και $\mathbf{N}$(p) (**κάθετη τομή** της S). Συνεπώς το $k_n(\mathbf{w})$ μετράει το πόσο και το πώς καμπυλώνεται η επιφάνεια S κατά την κατεύθυνση του $\mathbf{w}$. Έτσι αν $k_n(\mathbf{w})>0$ η αντίστοιχη κάθετη τομή στρέφει τα κοίλα στο p με κατεύθυνση ομόρροπη του $\mathbf{N}$(p) ενώ αν $k_n(\mathbf{w})<0$ με κατεύθυνση αντίρροπη του $\mathbf{N}$(p). Κατευθύνσεις $\mathbf{w}$ για τις οποίες $k_n(\mathbf{w})=0$ ονομάζονται **ασυμτωτικές**. Η αντίστοιχη κάθετη τομή σε αυτή την περίπτωση θα έχει στο p καμπυλότητα μηδέν.

Γενικώτερα αν το $\mathbf{w}\in T_pS$ ($\mathbf{w}\neq\mathbf{0}$) δεν είναι μοναδιαίο τότε για την αντίστοιχη κάθετη καμπυλότητα θα έχουμε:

$$k_n(\mathbf{w})=\frac{\mathrm{II}_p(\mathbf{w})}{\mathrm{I}_p(\mathbf{w})}\ .$$

Έτσι η κάθετη καμπυλότητα κατά κάποιο εφαπτόμενο διάνυσμα είναι ίση με τον λόγο των δύο θεμελιωδών μορφών. Π.χ. για την σφαίρα όπου $\mathrm{II}_p=\mathrm{I}_p$ για κάθε $p\in S^2$ όλες οι καμπύλες πάνω σε αυτήν θα έχουν κάθετη καμπυλότητα ίση με 1 ενώ στο επίπεδο (όπου $\mathrm{II}_p=0$ για κάθε p) όλες οι καμπύλες θα έχουν κάθετη καμπυλότητα ίση με μηδέν. Επίσης όλες οι διευθύνσεις πάνω στην σφαίρα είναι κύριες ενώ πάνω στο επίπεδο ασυμτωτικές.

Για να υπολογίσουμε την κάθετη καμπυλότητα κατά την κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{w}\in T_pS$ θεωρούμε μια ορθοκανονική βάση $<\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2>$ του T_pS αποτελούμενη από κύρια διανύσματα και θέτουμε

$$\mathbf{w}=\text{συν}\theta\mathbf{w}_1+\text{ημ}\theta\mathbf{w}_2$$

και έχουμε $k_n(\mathbf{w})=\mathrm{II}_p(\mathbf{w})=-<(d\mathbf{N})_p(\text{συν}\theta\mathbf{w}_1+\text{ημ}\theta\mathbf{w}_2),\text{συν}\theta\mathbf{w}_1+\text{ημ}\theta\mathbf{w}_2>_p=k_1\text{συν}^2\theta+k_2\text{ημ}^2\theta$ όπου k_1,k_2 είναι οι αντίστοιχες κύριες καμπυλότητες. Έχουμε δηλαδή:

$$k_n(\text{συν}\theta\mathbf{w}_1+\text{ημ}\theta\mathbf{w}_2)=k_1\text{συν}^2\theta+k_2\text{ημ}^2\theta.$$

Η σχέση αυτή που ονομάζεται *εξίσωση του Euler* συνεπάγεται ότι οι κύριες διευθύνσεις είναι εκείνες κατά τις οποίες η κάθετη καμπυλότητα παίρνει την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της και οι τιμές αυτές είναι ίσες με τις αντίστοιχες κύριες καμπυλότητες.

Βλέπουμε λοιπόν ότι αν $K=k_1k_2>0$ (τα k_1,k_2 είναι ομόσημα) τότε όλες οι κάθετες τομές της S στρέφουν τα κοίλα στο p προς την ίδια κατεύθυνση ανάλογα με το κοινό πρόσημο των k_1,k_2 (αυτό συμβαίνει π.χ. σε κάθε σημείο ενός ελλειψοειδούς). Ένα τέτοιο σημείο p θα ονομάζεται **ελλειπτικό**. Αντίθετα αν $K=k_1k_2<0$ (τα k_1,k_2 είναι ετερόσημα) τότε υπάρχουν κάθετες τομές που στρέφουν τα κοίλα στο p ομόρροπα του $\mathbf{N}(\mathrm{p})$, κάθετες τομές που στρέφουν τα κοίλα αντίρροπα του $\mathbf{N}(\mathrm{p})$ και κάθετες τομές με καμπυλότητα 0 στο p που αντιστοιχούν στις ασυμπτωτικές διευθύνσεις $\mathbf{w}=\text{συν}\theta\mathbf{w}_1+\text{ημ}\theta\mathbf{w}_2$ όπου $\text{εφ}\theta=\pm\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}$ (αυτό συμβαίνει π.χ. σε κάθε σημείο ενός μονόχωνου υπερβολοειδούς). Ένα τέτοιο σημείο p θα ονομάζεται **υπερβολικό**. Επίσης αν $K=k_1k_2=0$ αλλά $|k_1|+|k_2|>0$ (άρα υπάρχει μια μόνο ασυμπτωτική διεύθυνση) το p θα ονομάζεται **παραβολικό** (π.χ. σε κάθε σημείο του κυλίνδρου). Αν δε $k_1=k_2=0$ (άρα όλες οι διευθύνσεις είναι ασυμπτωτικές) το p θα ονομάζεται **επίπεδο** (π.χ. σε κάθε σημείο ενός επιπέδου).

Θα εξετάσουμε τώρα τις παραπάνω ποσότητες για μερικές περιπτώσεις επιφανειών.

1) *Επιφάνειες εκ περιστροφής*. Έχουμε δεί ότι ως προς την παραμετρικοποίηση $X(u,\upsilon)=(\varphi(\upsilon)\text{συν}u,\varphi(\upsilon)\text{ημ}u,\psi(\upsilon))$, $u\in(0,2\pi)$, $\upsilon\in(a,b)$ θα είναι

$X_u(u,\upsilon)=(-\varphi(\upsilon)\text{ημ}u,\varphi(\upsilon)\text{συν}u,0)$, $X_\upsilon(u,\upsilon)=(\varphi'(\upsilon)\text{συν}u,\varphi'(\upsilon)\text{ημ}u,\psi'(\upsilon))$,

$\mathbf{N}(u,\upsilon)=\dfrac{1}{\sqrt{\psi'(\upsilon)^2+\varphi'(\upsilon)^2}}(\psi'(\upsilon)\text{συν}u,\psi'(\upsilon)\text{ημ}u,-\varphi'(\upsilon))$ και $E(u,\upsilon)=\varphi(\upsilon)^2$, $F(u,\upsilon)=0$,

$G(u,\upsilon)=\varphi'(\upsilon)^2+\psi'(\upsilon)^2$. Επίσης $X_{uu}(u,\upsilon)=(-\varphi(\upsilon)\text{συν}u,-\varphi(\upsilon)\text{ημ}u,0)$,

$X_{u\upsilon}(u,\upsilon)=(-\varphi'(\upsilon)\text{ημ}u,\varphi'(\upsilon)\text{συν}u,0)$ και $X_{\upsilon\upsilon}(u,\upsilon)=(\varphi''(\upsilon)\text{συν}u,\varphi''(\upsilon)\text{ημ}u,\psi''(\upsilon))$. Άρα:

$$e(u,\upsilon)=-\frac{\varphi(\upsilon)\psi'(\upsilon)}{\sqrt{\varphi'(\upsilon)^2+\psi'(\upsilon)^2}},\ f(u,\upsilon)=0,\ g(u,\upsilon)=\frac{\psi'(\upsilon)\varphi''(\upsilon)-\varphi'(\upsilon)\psi''(\upsilon)}{\sqrt{\varphi'(\upsilon)^2+\psi'(\upsilon)^2}}.$$

Από την πρόταση 3.5.1 προκύπτει άρα ότι τα διανύσματα X_u και X_υ εφαπτόμενα στους μεσημβρινούς και παραλλήλους αντίστοιχα είναι κύρια και οι αντίστοιχες κύριες καμπυλότητες είναι:

$$k_\mu=\frac{e}{E}=-\frac{\psi'}{\varphi((\varphi')^2+(\psi')^2)^{1/2}},\ k_\pi=\frac{g}{G}=\frac{\psi'\varphi''-\varphi'\psi''}{((\varphi')^2+(\psi')^2)^{3/2}}$$

και η καμπυλότητα Gauss είναι:

$$K=k_\mu k_\pi=-\frac{\psi'(\psi'\varphi''-\varphi'\psi'')}{\varphi((\varphi')^2+(\psi')^2)^2}.$$

Ειδικότερα στην περίπτωση που η καμπύλη C είναι παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου θα έχουμε $G=(\varphi')^2+(\psi')^2=1$ και παραγωγίζοντας την παίρνουμε $\varphi'\varphi''=-\psi'\psi''$, $\psi'(\psi'\varphi''-\varphi'\psi'')=\varphi''((\varphi')^2+(\psi')^2)=\varphi''$ και άρα στην περίπτωση αυτή έχουμε:

$$E=\varphi^2,\ F=0,\ G=1,\ e=-\varphi\psi',\ f=0,\ g=\psi'\varphi''-\varphi'\psi'',$$

$$k_\mu=-\frac{\psi'}{\varphi},\ k_\pi=\psi'\varphi''-\varphi'\psi'',$$

$$K=-\frac{\varphi''}{\varphi},\ H=\frac{\varphi(\psi'\varphi''-\varphi'\psi'')-\psi'}{2\varphi}.$$

Σαν εφαρμογή θα βρούμε όλες τις καμπύλες C οι οποίες παράγουν μια επιφάνεια εκ περιστροφής με σταθερή καμπυλότητα Gauss ίση με 1. Αφού μπορούμε να παραμετρικοποιήσουμε την C ως προς το μήκος τόξου θέλουμε δύο διαφορίσιμες συναρτήσεις φ,ψ με $\varphi>0$, $(\varphi')^2+(\psi')^2=1$ και $\frac{\varphi''}{\varphi}=K=-1$. Η τελευταία δίνει (διαλέγοντας την παράμετρο κατάλληλα) $\varphi(\upsilon)=A\eta\mu\upsilon$ με $A>0$ και το υ περιορισμένο στο υποδιάστημα του $(0,\pi)$ όπου $\varphi<1$. Η σχέση $(\varphi')^2+(\psi')^2=1$ τώρα δίνει $\psi(\upsilon)=\int\sqrt{1-A^2\eta\mu^2\upsilon}\,d\upsilon$. Η περίπτωση $A=1$ μας δίνει την σφαίρα.

2) *Γράφημα της διαφορίσιμης συνάρτησης* $h:U\to\mathbf{R}$ ($U\subseteq\mathbf{R}^2$ ανοικτό). Ως προς την παραμετρικοποίηση $X:U\to\mathbf{R}^3$ με $X(x,y)=(x,y,h(x,y))$ έχουμε δεί ότι $X_x=(1,0,h_x)$, $X_y=(0,1,h_y)$, $\mathbf{N}=\frac{1}{\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}}(-h_x,-h_y,1)$ και $E=1+h_x^2$, $F=h_xh_y$, $G=1+h_y^2$. Επίσης $X_{xx}=(0,0,h_{xx})$, $X_{xy}=(0,0,h_{xy})$, $X_{yy}=(0,0,h_{yy})$ και:

$$e=\frac{h_{xx}}{\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}},\ f=\frac{h_{xy}}{\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}},\ g=\frac{h_{yy}}{\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}}.$$

Συνεπώς:

$$K=\frac{eg-f^2}{EG-F^2}=\frac{h_{xx}h_{yy}-h_{xy}^2}{(1+h_x^2+h_y^2)^2},\ H=\frac{(1+h_x^2)h_{yy}-2h_xh_yh_{xy}+(1+h_y^2)h_{xx}}{2(1+h_x^2+h_y^2)^{3/2}},$$

$$k_1=H+\sqrt{H^2-K},\ k_2=H-\sqrt{H^2-K}.$$

Το εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{w}=\lambda X_x+\mu X_y=(\lambda,\mu,\lambda h_x+\mu h_y)$ θα είναι:

α) *Κύριο* αν και μόνο αν έχουμε

$$\begin{vmatrix}\mu^2 & -\lambda\mu & \lambda^2\\ 1+h_x^2 & h_xh_y & 1+h_y^2\\ h_{xx} & h_{xy} & h_{yy}\end{vmatrix}=0.$$

β) *Ασυμπτωτικό* αν και μόνο αν έχουμε

$$h_{xx}\lambda^2+2h_{xy}\lambda\mu+h_{yy}\mu^2=0.$$

Επίσης το αντίστοιχο σημείο του γραφήματος είναι *ομφαλικό* αν και μόνο αν υπάρχει $\kappa\in\mathbf{R}$ με $h_{xx}=\kappa(1+h_x^2)$, $h_{xy}=\kappa h_xh_y$, $h_{yy}=\kappa(1+h_y^2)$.

Σαν εφαρμογή των παραπάνω θεωρούμε μια ομαλή επιφάνεια S και το σημείο της p. Σύμφωνα με το 3.1.1 η S κοντά στο p μπορεί να παραμετρικοποιηθεί ως γράφημα. Κάνοντας μια μεταφορά και στροφή του συστήματος συντεταγμένων μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p=(0,0,0)$ ότι το T_pS είναι το xy-επίπεδο η $X:U\to S$ με $X(x,y)=(x,y,h(x,y))$ είναι ομαλή παραμετρικοποίηση της S γύρω από το p και τέλος ότι οι διευθύνσεις $\mathbf{i},\mathbf{j}$ είναι *κύριες*. Θα έχουμε άρα $h_x(0,0)=h_y(0,0)=0$ (αφού το T_pS είναι το xy-επίπεδο), $E(0,0)=G(0,0)=1$, $F(0,0)=0$.

Επίσης $f(0,0)=h_{xy}(0,0)=0$ (αφού τα $X_x(0,0)=(1,0,0)$, $X_y(0,0)=(0,1,0)$ είναι κύρια) και $k_1(p)=h_{xx}(0,0)$, $k_2(p)=h_{yy}(0,0)$. Από τον τύπο του Taylor έχουμε τώρα:

$$h(x,y)=\frac{1}{2}(k_1x^2+k_2y^2)+R(x,y)=\frac{1}{2}\mathrm{II}_p(x,y)+R(x,y)$$

για κάθε $(x,y)\in U$ κοντά στο $(0,0)$ όπου για το υπόλοιπο $R(x,y)$ έχουμε: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{R(x,y)}{x^2+y^2}=0$.

α) Το $\mathrm{II}_p(x,y)$ προσεγγίζει την απόσταση του σημείου $(x,y,h(x,y))$ της επιφάνειας από το εφαπτόμενο επίπεδο T_pS.

β) Αν $K=k_1k_2\neq 0$ οι τομές της επιφάνειας S με τα επίπεδα $z=\alpha$ παράλληλα στο T_pS και κοντάσε αυτό (δηλ. το α αρκετά μικρό) δείχνουν κατά προσέγγιση κοντά στο p σαν τα σημειοσύνολα του xy-επιπέδου που ικανοποιούν την:

$$k_1x^2+k_2y^2=2\alpha$$

τα οποία είναι:

(i) Αν το p είναι ελλειπτικό: *ελλείψεις* για α ομόσημο των k_1,k_2, το p για $\alpha=0$ και το κενό σύνολο για α ετερόσημο των k_1,k_2 δηλαδή το τμήμα της S κοντά στο p βρίσκεται στο ένα μέρος του εφαπτόμενου επιπέδου T_pS που τέμνει την S κοντά στο p μόνο στο p (σχετικό ακρότατο). Ειδικώτερα αν το σημείο είναι ομφαλικό τότε οι τομές αυτές μοιάζουν με κύκλους.

(ii) Αν το p είναι υπερβολικό: *υπερβολές* για $\alpha\neq 0$, και οι δύο ευθείες $y=\pm\sqrt{-\dfrac{k_1}{k_2}}x$ για $\alpha=0$ που είναι οι κοινές ασύπτωτες των υπερβολών και επίσης είναι παράλληλες των ασυμπτωτικών διευθύνσεων και άρα το τμήμα της S κοντά στο p βρίσκεται και στα δύο μέρη που ορίζει το εφαπτόμενο επιπέδο T_pS (σαγματικό σημείο).

Στην περίπτωση του παραβολικού σημείου οι καμπύλες προσεγγίζονται κοντά στο $(0,0)$ από δύο παράλληλες ευθείες για α ομόσημο της κύριας καμπυλότητας που δεν είναι μηδέν, μια ευθεία για $\alpha=0$ και το κενό σύνολο αλλιώς (δεν μπορούμε όμως να βγάλουμε συμπέρασμα για την σχέση της S με το T_pS). Για επίπεδα σημεία όμως δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για την μορφή των τομών αυτών.

3) *Καρτεσιανή εξίσωση*. Έστω ότι η επιφάνεια δίνεται από μια καρτεσιανήεξίσωση $S=F^{-1}(\{a\})=\{(x,y,z)\in W: F(x,y,z)=a\}$ όπως στο θεώρημα 3.1.2 (το a ομαλή τιμή της F). Τότε για κάθε $p\in S$ το διάνυσμα $\nabla F(p)(\neq\mathbf{0})$ είναι *κάθετο* στην S στο p και άρα:

$$T_pS=\{\mathbf{w}:\mathbf{w}\cdot\nabla F(p)=0\}=\{(a_1,a_2,a_3):\sum a_iF_i=0\}$$

όπου για ευκολία θέτουμε $F_1=F_x(p)$, $F_2=F_y(p)$, $F_3=F_z(p)$, $F_{11}=F_{xx}(p)$, $F_{12}=F_{xy}(p)$ κ.ο.κ.. Επίσης έχουμε για την απεικόνιση Gauss $\mathbf{N}=\dfrac{\nabla F}{|\nabla F|}$ και άρα για κάθε $\mathbf{w}=(a_1,a_2,a_3)\in T_pS$ έχουμε:

$$\mathrm{II}_p(\mathbf{w})=-(d\mathbf{N})_p(\mathbf{w})\cdot\mathbf{w}=-\frac{1}{|\nabla F(p)|}(D\nabla F)_p(\mathbf{w})\cdot\mathbf{w}-\mathbf{w}(\frac{1}{|\nabla F|})\nabla F(p)\cdot\mathbf{w}=$$

$$=-\frac{1}{|\nabla F(p)|}(D\nabla F)_p(\mathbf{w})\cdot\mathbf{w}=-\frac{1}{|\nabla F(p)|}\sum a_ia_jF_{ij}.$$

Συνεπώς για να βρούμε τις κύριες καμπυλότητες αρκεί να βρούμε τις ακρότατες τιμές της παράστασης $\sum a_ia_jF_{ij}$ υπό τις συνθήκες $\sum a_iF_i=0$ (αφού $(a_1,a_2,a_3)\in T_pS$) και $\sum a_i^2=1$ (αφού το (a_1,a_2,a_3) πρέπει να είναι μοναδιαίο). Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange (και αφού $F_{ij}=F_{ji}$) θέλουμε $a_1,a_2,a_3,\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ τέτοια ώστε:

$$\sum a_iF_{ij}=\lambda a_j+\mu F_j,\ j=1,2,3$$

$$\sum a_iF_i=0,\ \sum a_i^2=1.$$

Το σύστημα αυτό δίνει:

$$\begin{pmatrix} F_{11}-\lambda & F_{12} & F_{13} & F_1 \\ F_{21} & F_{22}-\lambda & F_{23} & F_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33}-\lambda & F_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \sum a_i^2 = 1.$$

Από το ομογενές σύστημα παίρνουμε άρα ότι θα πρέπει:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} F_{11}-\lambda & F_{12} & F_{13} & F_1 \\ F_{21} & F_{22}-\lambda & F_{23} & F_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33}-\lambda & F_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Αντιστρόφως αν το $\lambda \in \mathbf{R}$ ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση τότε μπορούμε να βρούμε $a_1, a_2, a_3, \mu \in \mathbf{R}$ τέτοια ώστε τα $a_1, a_2, a_3, \lambda, \mu$ να ικανοποιούν το αρχικό σύστημα. Παρατηρούμε επίσης ότι στην περίπτωση αυτή θα ισχύει:

$$\sum a_i a_j F_{ij} = \lambda \sum a_j^2 + \mu \sum a_j F_j = \lambda$$

και άρα η αντίστοιχη κύρια καμπυλότητα θα είναι ίση με $-\dfrac{\lambda}{|\nabla F(p)|}$.

Συνεπώς οι κύριες καμπυλότητες είναι οι αριθμοί:

$$k_i = -\frac{\lambda_i}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}}, \ i = 1,2$$

όπου λ_1, λ_2 είναι οι ρίζες της *δευτεροβάθμιας* εξίσωσης $P(\lambda)=0$. Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το γινόμενο και το ημιάθροισμα των ριζών μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης μπορούμε να υπολογίσουμε τα K, H. Ειδικότερα αν

$$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

τότε η εξίσωση $P(\lambda)=0$ γράφεται

$$F_1^2(\lambda-\mu_2)(\lambda-\mu_3) + F_2^2(\lambda-\mu_3)(\lambda-\mu_1) + F_3^2(\lambda-\mu_1)(\lambda-\mu_2) = 0$$

και άρα

$$K = \frac{F_1^2\mu_2\mu_3 + F_2^2\mu_3\mu_1 + F_3^2\mu_1\mu_2}{(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)^2},$$

$$H = \frac{F_1^2(\mu_2+\mu_3) + F_2^2(\mu_3+\mu_1) + F_3^2(\mu_1+\mu_2)}{2(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)^{3/2}}.$$

Το διάνυσμα $\mathbf{w}=(a_1,a_2,a_3) \in T_pS$ είναι ασυμπτωτικό αν και μόνο αν:

$$\sum a_i a_j F_{ij} = 0 \ \text{και} \ \sum a_i F_i = 0.$$

Για να βρούμε τα κύρια διανύσματα παρατηρούμε ότι το $\mathbf{w}=(a_1,a_2,a_3) \in \mathbf{R}^3$ είναι κύριο αν και μόνο αν $\mathbf{w}.\mathbf{N}(p)=0$ (αφού $\mathbf{w} \in T_pS$) και $((d\mathbf{N})_p(\mathbf{w}) \times \mathbf{w}).\mathbf{N}(p)=0$ (αφού το $(d\mathbf{N})_p(\mathbf{w}) \in T_pS$ και είναι συγγραμικό με το $\mathbf{w}$ αν και μόνο αν το $\mathbf{w}$ είναι κύριο) δηλαδή:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \sum a_i F_{1i} & \sum a_i F_{2i} & \sum a_i F_{3i} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = 0 \ \text{και} \ \sum a_i F_i = 0.$$

Το p θα είναι ομφαλικό αν και μόνο αν η παραπάνω ορίζουσα είναι μηδέν για κάθε $(a_1,a_2,a_3) \in \mathbf{R}^3$ με $\sum a_i F_i = 0$.

Έτσι π.χ. για το ελλειψοειδές $S=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\}$ παίρνουμε $F(x,y,z)=$ $=\frac{1}{2}(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})$ και έχουμε $\nabla F=(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2})$ και $(F_{ij})=\begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c^2 \end{pmatrix}$. Άρα η καμπυλότητα Gauss θα δίνεται από την σχέση:

$$K=\frac{1}{a^2b^2c^2}.(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4})^{-2}.$$

Τα κύρια διανύσματα στο (x,y,z) θα είναι αυτά που ικανοποιούν το σύστημα:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1/a^2 & a_2/b^2 & a_3/c^2 \\ x/a^2 & y/b^2 & z/c^2 \end{vmatrix}=\frac{a_1x}{a^2}+\frac{a_2y}{b^2}+\frac{a_3z}{c^2}=0.$$

Ασκήσεις

1. Θεωρούμε την ομαλή επιφάνεια S με παραμετρικοποίηση $X(u,\upsilon)=(u-\upsilon^2, 2u\upsilon-\frac{u^2+\upsilon^2}{2}-2u+\upsilon, -u^2+\upsilon)$, $(u,\upsilon)\in U$ όπου U μια περιοχή του $q=(0,1)$ και το σημείο $p=X(q)\in S$. Να υπολογίσετε τις κύριες καμπυλότητες, τις κύριες και τις ασυμπτωτικές διευθύνσεις καθώς και την καμπυλότητα Gauss της S στο p.
2. Θεωρούμε την ομαλή επιφάνεια S με παραμετρικοποίηση $X(u,\upsilon)=(u+u\upsilon^2, \upsilon+u^2+\upsilon^2, 2u\upsilon+2\upsilon^2-\upsilon)$, $(u,\upsilon)\in U$ όπου U μια περιοχή του $q=(0,0)$ και το σημείο $p=X(q)\in S$. Να υπολογίσετε τις κύριες καμπυλότητες της S στο p, το είδος του σημείου p καθώς και μια ορθοκανονική βάση του T_pS που να αποτελείται από κύρια διανύσματα.
3. (i) Να βρείτε τα ομφαλικά σημεία του ελλειψοειδούς $\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\}$ αν $0<a<b<c$.

   *(ii) Να δείξετε ότι η τομές του ελλειψοειδούς με επίπεδα παράλληλα των εφαπτό-μενων επιπέδων στα ομφαλικά σημεία (και προς το μέρος του ελλειψοειδούς) είναι κύκλοι.
4. Να υπολογίσετε τις κύριες καμπυλότητες για το ελλειψοειδές εκ περιστροφής με παραμετρικοποίηση $X(u,\upsilon)=(a\eta\mu\upsilon\sigma\upsilon\nu u, a\eta\mu\upsilon\eta\mu u, b\sigma\upsilon\nu\upsilon)$, $(a<b)$.
5. Για την *σπείρα* με παραμετρικοποίηση $X(u,\upsilon)=((a+r\sigma\upsilon\nu\upsilon)\sigma\upsilon\nu u, (a+r\sigma\upsilon\nu\upsilon)\eta\mu u, r\sigma\upsilon\nu\upsilon)$, $0<u,\upsilon<2\pi$ να βρείτε την καμπυλότητα Gauss σε κάθε σημείο και τα ελλειπτικά υπερβολικά και παραβολικά σημεία. Υπάρχουν ομφαλικά σημεία;
6. (i) Να βρείτε όλες τις επιφάνειες εκ περιστροφής με σταθερή καμπυλοτητα Gauss ίση με μηδέν.
   (ii) Να βρείτε όλες τις επιφάνειες εκ περιστροφής με σταθερή καμπυλοτητα Gauss ίση με -1.
7. * Να βρείτε όλες τις επιφάνειες εκ περιστροφής με σταθερή μέση καμπυλοτητα ίση με μηδέν.
8. Να δείξετε ότι το σημείο $p=(0,0,0)$ είναι επίπεδο για την ομαλή επιφάνεια S με παραμετρικοποίηση $X(x,y)=(x,y,x^3-3xy^2)$ και να βρείτε τι μορφή έχουν οι τομές της S με τα επίπεδα $z=\alpha$ παράλληλα στο T_pS.
9. Για τις παρακάτω ομαλές επιφάνεις να βρείτε τις κύριες καμπυλότητες τις κύριες και ασυμπτωτικές διευθύνσεις (όπου υπάρχουν) και την καμπυλότητα Gauss στο τυχαίο σημείο τους καθώς και τα ομφαλικά σημεία τους (αν υπάρχουν). (i) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (μονόχωνο ελλειπτικό υπερβολοειδές), (ii) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (δίχωνο ελλειπτικό υπερβολοειδές), (iii) $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ (ελλειπτικό παραβολοειδές), (iv) $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ (υπερβολικό παραβολοειδές).
10. Στην ομαλή επιφάνεια με καρτεσιανή εξίσωση $x^3+y^3+z^3=1$ να βρείτε τα ελλειπτικά και τα υπερβολικά σημεία, τα ομφαλικά σημεία και τα ασυμπτωτικά διανύσματα (όπου υπάρχουν).
11. Έστω ότι οι ομαλές επιφάνειες S_1,S_2 τέμνονται κατά μια ομαλή καμπύλη C. Αν $p\in C$, k είναι η καμπυλότητα της C στο p, κ_1,κ_2 οι κάθετες καμπυλότητες της C στο p ως προς τις επιφάνειες S_1,S_2

αντίστοιχα και θ η γωνία που σχηματίζουν τα μοναδαία κάθετα διανύσματα $\mathbf{N}_1(p)$ και $\mathbf{N}_2(p)$ των S_1,S_2 αντίστοιχα να δείξετε ότι: $k^2 \,\text{ημ}^2\,\theta = \kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 2\kappa_1\kappa_2\,\text{συν}\theta$.

12. Έστω S ομαλή επιφάνεια $\mathbf{N}:S\to S^2$ η απεικόνιση Gauss της p ένα *μη επίπεδο* σημείο της τέτοιο ώστε $H(p)=0$. (i) Να δείξετε ότι στο p μπορούμε να βρούμε δύο ορθογώνιες ασυμτωτικές διευθύνσεις. (ii) Να δείξετε ότι για κάθε $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\in T_pS$ έχουμε $(d\mathbf{N})_p(\mathbf{w}_1)\mathbf{.}(d\mathbf{N})_p(\mathbf{w}_2)=-K(p)\mathbf{w}_1\mathbf{.}\mathbf{w}_2$.
13. (i) Έστω S ομαλή επιφάνεια και $p_0\in S$ τέτοιο ώστε $|p_0|\geq|p|$ για κάθε $p\in S$. Να δείξετε ότι για την καμπυλότητα Gauss έχουμε $|p_0|^2K(p_0)\geq 1$. (ii) Να δείξετε ότι κάθε *συμπαγής* ομαλή επιφάνεια έχει τουλάχιστον ένα ελλειπτικό σημείο.
14. Έστω S *συμπαγής* ομαλή επιφάνεια και $\mathbf{N}:S\to S^2$ η απεικόνιση Gauss της. *(i) Να δείξετε ότι υπάρχει $\varepsilon_0>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ το σύνολο $S_\varepsilon=\{p+\varepsilon\mathbf{N}(p):p\in S\}$ είναι ομαλή επιφάνεια. (ii) Αν k_i, $i=1,2$ είναι οι κύριες καμπυλότητες της S στο $p\in S$ τότε οι κύριες καμπυλότητες της S_ε στο $p+\varepsilon\mathbf{N}(p)$ είναι $\dfrac{k_i}{1+\varepsilon k_i}$, $i=1,2$. (iii) Να βρείτε την σχέση που έχουν οι μέσες καμπυλότητες και οι καμπυλότητες Gauss των S και S_ε.

3.6 Οι θεμελιώδεις εξισώσεις.

Έστω $X:U\to S$ παραμετρικοποίηση μιας ομαλής επιφάνειας S. Ανάλογα με την θεωρία καμπύλων (και το τρίεδρο Frenet) μπορούμε να ατιστοιχίσουμε σε κάθε σημείο $p=X(q)$ του $X(U)$ την θετικά προσανατολισμένη βάση $<X_u(q),X_\upsilon(q),\mathbf{N}(q)>$ του $\mathbf{R}^3$ όπου $\mathbf{N}(q)=\dfrac{X_u(q)\times X_\upsilon(q)}{\left|X_u(q)\times X_\upsilon(q)\right|}$. Η βάση αυτή εν γένει *δεν* είναι ορθοκανονική, ξέρουμε όμως ότι το $\mathbf{N}(q)$ θα είναι πάντα μοναδιαίο και κάθετο στα $X_u(q)$ και $X_\upsilon(q)$. Οι εξισώσεις που περιγράφουν την "κίνηση" του τριέδρου αυτού καθώς το q μεταβάλλεται πάνω στο U θα δίνουν άρα τις μερικές παραγώγους $(X_u)_u,(X_u)_\upsilon,(X_\upsilon)_u,(X_\upsilon)_\upsilon,\mathbf{N}_u,\mathbf{N}_\upsilon$ σαν φραμμικούς συνδιασμούς των $X_u,X_\upsilon,\mathbf{N}$ στο U. Ξέρουμε ότι $\mathbf{N}.\mathbf{N}_u=\mathbf{N}.\mathbf{N}_\upsilon=0$, $\mathbf{N}.X_{uu}=e$, $\mathbf{N}.X_{u\upsilon}=f$, $\mathbf{N}.X_{\upsilon\upsilon}=g$. Μπορούμε άρα να γράψουμε τις εξής εξισώσεις:

$$
\begin{aligned}
X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_\upsilon + e\mathbf{N}\\
X_{u\upsilon} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_\upsilon + f\mathbf{N}\\
X_{\upsilon u} &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_\upsilon + f\mathbf{N}\\
X_{\upsilon\upsilon} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_\upsilon + g\mathbf{N}\\
\mathbf{N}_u &= a_{11} X_u + a_{21} X_\upsilon\\
\mathbf{N}_\upsilon &= a_{12} X_u + a_{22} X_\upsilon
\end{aligned}
$$

που είναι οι θεμελιώδεις εξισώσεις της κίνησης του παραπάνω τριέδρου. Οι συναρτήσεις $e,f,g:U\to\mathbf{R}$ είναι προφανώς οι συνιστώσες της δεύτερης θεμελιώδους μορφής της S ως προς την παραμετρικοποίηση X.

Οι οκτώ συναρτήσεις $\Gamma_{ij}^k:U\to\mathbf{R}$ ονομάζονται σύμβολα Christoffel της S ως προς την παραμετρικοποίηση X. Για να τις υπολογίσουμε πολλαπλασιάζουμε την πρώτη σχέση με X_u και X_υ οπότε παίρνουμε

$$X_u\cdot X_{uu}=\Gamma_{11}^1 E+\Gamma_{11}^2 F \quad\text{και}\quad X_\upsilon\cdot X_{uu}=\Gamma_{11}^1 F+\Gamma_{11}^2 G.$$

Επίσης παρατηρούμε ότι

$X_u\cdot X_{uu}=\frac{1}{2}(X_u\cdot X_u)_u=\frac{1}{2}E_u$ και

$X_\upsilon\cdot X_{uu}=(X_\upsilon\cdot X_u)_u-X_u\cdot X_{u\upsilon}=F_u-\frac{1}{2}(X_u\cdot X_u)_\upsilon=F_u-\frac{1}{2}E_\upsilon$ απ' όπου μπορούμε να λύσουμε το παραπάνω σύστημα ως προς $\Gamma_{11}^1,\Gamma_{11}^2$. Κάνοντας το ίδιο και για τις άλλες εξισώσεις (και αφού $X_{u\upsilon}=X_{\upsilon u}$) βρίσκουμε τελικά τις σχέσεις:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u-2FF_u+FE_\upsilon}{2(EG-F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u-EE_\upsilon-FE_u}{2(EG-F^2)}\\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_\upsilon-FG_u}{2(EG-F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u-FE_\upsilon}{2(EG-F^2)},\\
\Gamma_{21}^1 &= \Gamma_{12}^1, & \Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{12}^2\\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_\upsilon-GG_u-FG_\upsilon}{2(EG-F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_\upsilon-2FF_\upsilon+FG_u}{2(EG-F^2)}.
\end{aligned}
$$

Οι σχέσεις αυτές μας επιτρέπουν να υπολογίζουμε τις συναρτήσεις Christoffel. Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις αυτές εξαρτώνται μόνο από τις συνιστώσες της πρώτης θεμελιώδους μορφής και τις παραγώγους των και άρα: "*Οι συναρτήσεις Christoffel είναι μετρικές αναλλοίωτοι της S*". Αντίθετα οι συνιστώσες της δεύτερης θεμελιώδους μορφής

e,f,g:$U\to\mathbf{R}$ *δεν* είναι μετρικές αναλλοίωτοι της S. Πράγματι το επίπεδο και ο κύλινδρος είναι τοπικά ισομετρικές επιφάνειες, έχουν δηλαδή ως προς κάποιες παραμετρικοποιήσεις τις ίδιες συνιστώσες της πρώτης θεμελιώδους μορφής, αλλά δεν υπάρχουν παραμετρικοποιήσεις ως προς τις οποίες να έχουν τις ίδιες συνιστώσες της δεύτερης θεμελιώδους μορφής αφού οι κύριες καμπυλότητες για το επίπεδο είναι και οι δύο μηδέν ενώ για τον κύλινδρο η μια από τις δύο δεν είναι μηδέν.

Για τις δύο τελευταίες από τις θεμελιώδεις εξισώσεις έχουμε βρεί ότι:

$$\mathbf{N}_u = \frac{fF-eG}{EG-F^2}X_u + \frac{eF-fE}{EG-F^2}X_u,$$
$$\mathbf{N}_\upsilon = \frac{gF-fG}{EG-F^2}X_u + \frac{fF-gE}{EG-F^2}X_u,$$

που είναι οι εξισώσεις Weingarten.

Παράδειγμα. *Επιφάνειες εκ περιστροφής*. Έχουμε δεί ότι ως προς την παραμετρικοποίηση $X(u,\upsilon)=(\varphi(\upsilon)\text{συν}u,\varphi(\upsilon)\text{ημ}u,\psi(\upsilon))$, $u\in(0,2\pi)$, $\upsilon\in(a,b)$ θα είναι $E(u,\upsilon)=\varphi(\upsilon)^2$, $F(u,\upsilon)=0$, $G(u,\upsilon)=\varphi'(\upsilon)^2+\psi'(\upsilon)^2$. Έχουμε συνεπώς $E_u=G_u=F_u=F_\upsilon=0$, $E_\upsilon=2\varphi\varphi'$, $G_\upsilon=2(\varphi'\varphi''+\psi'\psi'')$ και άρα:

$$\Gamma_{11}^1(u,\upsilon)=0, \Gamma_{11}^2(u,\upsilon)=-\frac{\varphi(\upsilon)\varphi'(\upsilon)}{\varphi'(\upsilon)^2+\psi'(\upsilon)^2},$$
$$\Gamma_{12}^1(u,\upsilon)=\frac{\varphi'(\upsilon)}{\varphi(\upsilon)}, \Gamma_{12}^2(u,\upsilon)=0,$$
$$\Gamma_{22}^1(u,\upsilon)=0, \Gamma_{22}^2(u,\upsilon)=\frac{\varphi'(\upsilon)\varphi''(\upsilon)+\psi'(\upsilon)\psi''(\upsilon)}{\varphi'(\upsilon)^2+\psi'(\upsilon)^2}.$$

Οι θεμελιώδεις εξισώσεις "κίνησης" του τριέδρου αντίθετα με την περίπτωση των καμπύλων *δεν* είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Πράγματι οι σχέσεις

$$(X_{uu})_\upsilon=(X_{u\upsilon})_u,\ (X_{\upsilon\upsilon})_u=(X_{u\upsilon})_\upsilon \text{ και } \mathbf{N}_{u\upsilon}=\mathbf{N}_{\upsilon u}$$

θα πρέπει να ικανοποιούνται. Η πρώτη δίνει:

$$\begin{aligned}&(\Gamma_{11}^1)_\upsilon X_u+\Gamma_{11}^1(\Gamma_{12}^1X_u+\Gamma_{12}^2X_\upsilon+f\mathbf{N})+(\Gamma_{11}^2)_\upsilon X_\upsilon+\Gamma_{11}^2(\Gamma_{22}^1X_u+\Gamma_{22}^2X_\upsilon+g\mathbf{N})+e_\upsilon\mathbf{N}+\\&+e(a_{12}X_u+a_{22}X_\upsilon)=(\Gamma_{12}^1)_uX_u+\Gamma_{12}^1(\Gamma_{11}^1X_u+\Gamma_{11}^2X_\upsilon+e\mathbf{N})+(\Gamma_{12}^2)_uX_\upsilon+\\&+\Gamma_{12}^2(\Gamma_{12}^1X_u+\Gamma_{12}^2X_\upsilon+f\mathbf{N})+f_u\mathbf{N}+f(a_{11}X_u+a_{21}X_\upsilon).\end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των X_υ και X_u και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Weingarten παίρνουμε τις σχέσεις:

$$EK=E\frac{eg-f^2}{EG-F^2}=(\Gamma_{11}^2)_\upsilon-(\Gamma_{12}^2)_u+\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2+\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2-\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2-\Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2,$$
$$FK=F\frac{eg-f^2}{EG-F^2}=(\Gamma_{12}^1)_u-(\Gamma_{11}^1)_\upsilon+\Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1-\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1.$$

Ομοίως από την δεύτερη παίρνουμε:

$$FK=F\frac{eg-f^2}{EG-F^2}=(\Gamma_{12}^2)_\upsilon-(\Gamma_{22}^2)_u+\Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1-\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1,$$
$$GK=G\frac{eg-f^2}{EG-F^2}=(\Gamma_{22}^1)_u-(\Gamma_{12}^1)_\upsilon+\Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^1+\Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1-\Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1-\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^1.$$

Αποδεικνύεται ότι οι παραπάνω τέσσερεις σχέσεις είναι ισοδύναμες με την:

$$K=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left(\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}E_{\upsilon\upsilon}+F_{u\upsilon}-\frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_\upsilon\\ F_\upsilon-\frac{1}{2}G_u & E & F\\ \frac{1}{2}G_\upsilon & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}E_\upsilon & \frac{1}{2}G_u\\ \frac{1}{2}E_\upsilon & E & F\\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{vmatrix}\right).$$

Οι παραπάνω εξισώσεις που ονομάζονται **εξισώσεις Gauss** συνεπάγονται ότι η καμπυλότητα Gauss, αν και για να οριστεί χρησιμοποιήθηκε η δεύτερη θεμελιώδης μορφή, μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει μόνο των συνιστωσών της *πρώτης* θεμελιώδους μορφής (και των παραγώγων των) είναι δηλαδή μια *μετρική αναλλοίωτος* της *S*. Συνεπώς έχουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα Egregium (Gauss) Η καμπυλότητα Gauss K μιας ομαλής επιφάνειας εξαρτάται μόνο από την μετρική δομή της επιφάνειας είναι δηλαδή αναλλοίωτος ως προς τοπικές ισομετρίες.

Στην ειδική περίπτωση που η παραμετρικοποίηση είναι ορθογώνια (δηλαδή F=0) η εξίσωση Gauss μπορεί να γραφεί στην εξής απλούστερη μορφή:

$$K=-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{E_\upsilon}{\sqrt{EG}}\right)_\upsilon+\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right].$$

Συγκρίνοντας τώρα τους συντελεστές του **N** στις σχέσεις $(X_{uu})_\upsilon=(X_{u\upsilon})_u$,$(X_{\upsilon\upsilon})_u=(X_{u\upsilon})_\upsilon$ παίρνουμε επίσης τις εξής εξισώσεις:

$$e_\upsilon-f_u=e\Gamma_{12}^1+f(\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^1)-g\Gamma_{11}^2,$$
$$f_\upsilon-g_u=e\Gamma_{22}^1+f(\Gamma_{22}^2-\Gamma_{12}^1)-g\Gamma_{12}^2.$$

Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται **εξισώσεις Mainardi-Codazzi** (αποδεικνύεται ότι η σχέση $\mathbf{N}_{u\upsilon}=\mathbf{N}_{\upsilon u}$ δεν μας δίνει καμιά νέα πληροφορία). Η σημασία τους φαίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεμελιώδες Θεώρημα της θεωρίας επιφανειών (Bonnet) Έστω $V\subseteq\mathbf{R}^2$ ανοικτό και *κυρτό* και $E,F,G,e,f,g:V\to\mathbf{R}$ διαφορίσιμες με $E,G,EG-F^2>0$ στο V και τέτοιες ώστε να ικανοποιούν τις εξισώσεις Gauss και Mainardi-Codazzi στο V. Τότε υπάρχει παραμετρική επιφάνεια $Y:V\to\mathbf{R}^3$ με συνιστώσες της πρώτης και δεύτερης θεμελιώδους μορφής τις συναρτήσεις E,F,G,e,f,g. Ειδικότερα για κάθε $q\in V$ υπάρχουν συνεκτική περιοχή $U\subseteq V$ του q και μια *ομαλή* παραμετρική επιφάνεια $X:U\to\mathbf{R}^3$ με συνιστώσες της πρώτης και δεύτερης θεμελιώδους μορφής τις συναρτήσεις E,F,G,e,f,g στο U. Επίσης αν $X:U\to\mathbf{R}^3$ είναι μια άλλη ομαλή παραμετρική επιφάνεια με συνιστώσες της πρώτης και δεύτερης θεμελιώδους μορφής τις συναρτήσεις E,F,G,e,f,g στο U τότε υπάρχει συνδιασμός στροφής και μεταφοράς $\tau:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ στο χώρο ώστε $X^*=\tau\circ X$ στο U.

Δηλαδή η γνώση των συνιστωσών της πρώτης και της δεύτερης θεμελιώδους μορφής καθορίζουν μονοσήμαντα (ως προς στροφές και μεταφορές στον χώρο) την επιφάνεια με την προυπόθεση όμως ότι αυτές ικανοποιούν τις βασικές εξισώσεις *συμβατότητας* δηλαδή την εξίσωση Gauss και τις εξισώσεις Mainardi-Codazzi.

Στην περίπτωση που η παραμετρικοποίηση μιας ομαλής επιφάνειας είναι τέτοια ώστε $F=f=0$ στο U οι εξισώσεις Mainardi-Codazzi μπορούν να γραφούν στην εξής απλούστερη μορφή:

$$e_\upsilon=\frac{1}{2}E_\upsilon\left(\frac{e}{E}+\frac{g}{G}\right),\ \ g_u=\frac{1}{2}G_u\left(\frac{e}{E}+\frac{g}{G}\right).$$

Ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τα σύμβολα Christoffel της επιφάνειας S που είναι το γράφημα μιας διαφορίσιμης συνάρτησης της μορφής $z=h(x,y)$.
2. Να δείξετε ότι αν η παραμετρικοποίηση $X:U\to S$ είναι ορθογώνια (δηλαδή F=0) η καμπυλότητα Gauss δίνεται από την σχέση: $K=-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{E_\upsilon}{\sqrt{EG}}\right)_\upsilon+\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right].$
3. Έστω $X:U\to S$ παραμετρικοποίηση μιας ομαλής επιφάνειας τέτοια ώστε $F=f=0$ στο U. Να δείξετε ότι οι εξισώσεις Mainardi-Codazzi έχουν την μορφή $e_\upsilon=\frac{1}{2}E_\upsilon(\frac{e}{E}+\frac{g}{G}),\ \ g_u=\frac{1}{2}G_u(\frac{e}{E}+\frac{g}{G})$.
4. Έστω $X:U\to S$ παραμετρικοποίηση μιας ομαλής επιφάνειας και $\Delta,\varphi:U\to\mathbf{R}$ οι συναρτήσεις με $\Delta=\sqrt{EG-F^2}$ και $\varphi(u_0,\upsilon_0)$="η γωνία ($0<\varphi<\pi$) υπό την οποία τέμνονται οι συντεταγμένες γραμμές

$u=u_0$ $\upsilon=\upsilon_0$ της S ". Να δείξετε ότι (i) $(\log\Delta)_u=\Gamma_{11}^1+\Gamma_{12}^2$, $(\log\Delta)_\upsilon=\Gamma_{12}^1+\Gamma_{22}^2$ και (ii) $\varphi_u=-\dfrac{\Delta}{E}\Gamma_{11}^2-\dfrac{\Delta}{G}\Gamma_{12}^1$, $\varphi_\upsilon=-\dfrac{\Delta}{E}\Gamma_{12}^2-\dfrac{\Delta}{G}\Gamma_{22}^1$.

5. Υπάρχει ομαλή επιφάνεια S με ομαλή παραμετρικοποίηση $X{:}U\to S$ τέτοια ώστε (i) $E=G=1$, $F=0$, $e=2$, $g=-3$, $f=1$, (ii) $E=1+u^2$, $F=0$, $G=1+u^2+\upsilon^2$, $e=f=0$, $g=u^2+\upsilon^2$, στο U; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
6. Έστω $X{:}\mathbf{R}^2\to S$ ομαλή παραμετρικοποίηση τέτοια ώστε $E=1$, $F=e=f=0$ στο $\mathbf{R}^2$. Να δείξετε ότι υπάρχει συνάρτηση $h{:}\mathbf{R}\to[0,+\infty)$ με $g(u,\upsilon)^2=h(\upsilon)G(u,\upsilon)$ για κάθε $(u,\upsilon)\in\mathbf{R}^2$.
7. Αν $X{:}U\to S$ είναι παραμετρικοποίηση μιας ομαλής επιφάνειας τέτοια ώστε για κάθε $q\in U$ τα αντίστοιχα σύμβολα Christoffel να είναι ίσα μεταξύ τους να δείξετε ότι η καμπυλότητα Gauss της S στο $X(U)$ είναι ίση με μηδέν.
8. Έστω $U\subseteq\mathbf{R}^2$ ανοικτό και συνεκτικό και $X{:}U\text{->}S$ ομαλή επιφάνεια με $E=G=1$ και $F=$συνθ στο U όπου $\theta{:}U\to(0,\pi)$ διαφορίσιμη. (i) Να υπολογίσετε τα σύμβολα Christoffel και να δείξετε ότι για την καμπυλότητα Gauss έχουμε: $K=-\dfrac{\theta_{u\upsilon}}{\text{ημ}\theta}$. (ii) Αν επιπλέον έχουμε $e=g=0$ στο U να δείξετε ότι υπάρχει σταθερά $C\geq 0$ τέτοια ώστε $\theta_{u\upsilon}=C\text{ημ}\theta$ στο U.
9. Έστω $X{:}U\to S$ παραμετρικοποίηση μιας ομαλής επιφάνειας με $E=1+\upsilon^2$, $F=0$, $G=1$και $e=0$ στο U. (i) Να υπολογίσετε τα σύμβολα Christoffel και την καμπυλότητα Gauss της S. (ii) Να βρείτε τις συνιστώσες f και g της δεύτερης θεμελιώδους μορφής. *(iii) Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες γραμμές $u=$σταθ. της S είναι ευθείες.
10. Να εξετάσετε αν η σφαίρα S^2 και το μονόχωνο υπερβολοειδές είναι τοπικά ισομετρικές επιφάνειες.

3.7 Καμπύλες πάνω σε επιφάνειες

Έστω S μια προσανατολίσιμη ομαλή επιφάνεια με απεικόνιση Gauss $\mathbf{N}{:}S\to S^2$. Θεωρούμε επίσης μια ομαλή καμπύλη παραμετρικοποιημένη ως προς ο μήκος τόξου $\gamma{:}I\to S\subseteq\mathbf{R}^3$ *πάνω στην επιφάνεια* S και τα διανύσματα $\mathbf{T}(s)=\gamma'(s),\mathbf{n}(s),\mathbf{b}(s)$ του τριέδρου Frenet της γ. Αναλύουμε τώρα (για κάθε s) το διάνυσμα της επιτάχυνσης $\gamma''(s)=\mathbf{T}'(s)=k(s)\mathbf{n}(s)$ σε δύο συνιστώσες:

α) την *κάθετη* στην S (στο $\gamma(s)$): $(\gamma''(s).\mathbf{N}(\gamma(s))\mathbf{N}(\gamma(s))=(k(s)\mathbf{n}(s).\mathbf{N}(\gamma(s))\mathbf{N}(\gamma(s))=k_n(s)\mathbf{N}(\gamma(s))$ όπου είναι η *κάθετη καμπυλότητα* της γ στο s, που μετράει την τάση που έχει η καμπύλη να βγεί από την επιφάνεια, και

β) την *εφαπτομενική* στην S (στο $\gamma(s)$): $\gamma''(s)-k_n(s)\mathbf{N}(\gamma(s))\in T_{\gamma(s)}S$, που είναι η *εσωτερική επιτάχυνση* της γ στην S, δηλαδή η επιτάχυνση που θα μείνει αν αναιρεθεί, με κάποιο τρόπο, η κάθετη τάση της γ να βγεί από την επιφάνεια. Το διάνυσμα $\gamma''(s)-k_n(s)\mathbf{N}(\gamma(s))$ ονομάζεται διάνυσμα **γεωδαισιακής καμπυλότητας** της γ στο s.

Θεωρούμε επίσης (για κάθε s) τα διανύσματα $\mathbf{V}(s)=\mathbf{N}(\gamma(s))$ και $\mathbf{U}(s)=\mathbf{V}(s)\times\mathbf{T}(s)$ του καθέτου επιπέδου της γ στο s τέτοια ώστε (α) τα $\mathbf{T}(s),\mathbf{U}(s)$ αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του εφαπτόμενου επιπέδου $T_{\gamma(s)}S$, (β) τα $\mathbf{T}(s),\mathbf{U}(s),\mathbf{V}(s)$ αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του $\mathbf{R}^3$. Το κινούμενο τρίεδρο $<\mathbf{T}(s),\mathbf{U}(s),\mathbf{V}(s)>$ ονομάζεται **τρίεδρο Darboux** της γ ως προς την S, και εξαρτάται τόσο από την καμπύλη γ όσο και από την S.

Δεδομένου τώρα ότι το διάνυσμα γεωδαισιακής καμπυλότητας $\gamma''(s)-k_n(s)\mathbf{N}(\gamma(s))$ είναι κάθετο στα $\mathbf{V}(s)=\mathbf{N}(\gamma(s))$ και $\mathbf{T}(s)$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $k_g(s)$ τέτοιος ώστε $\gamma''(s)-k_n(s)\mathbf{N}(\gamma(s))=k_g(s)\mathbf{U}(s)$. Το $k_g(s)$ ονομάζεται **γεωδαισιακή καμπυλότητα** της γ στο s. Έχουμε άρα την σχέση:

$$\mathbf{T}'(s)=k(s)\mathbf{n}(s)=k_g(s)\mathbf{U}(s)+k_n(s)\mathbf{V}(s)$$

που εκφράζει την ανάλυση της επιτάχυνσης της γ στις δύο παραπάνω συνιστώσες αλλά επίσης είναι και μια από τις εξισώσεις *κίνησης* του τριέδρου Darboux της γ ως προς την S. Για να βρούμε τις άλλες δύο παρατηρούμε ότι (όπως και στο τρίεδρο Frenet) η ορθοκανονικότητα συνεπάγεται ότι $\mathbf{U}'.\mathbf{U}=\mathbf{0}$, $\mathbf{U}'.\mathbf{T}=-\mathbf{U}.\mathbf{T}'=-k_g$, $\mathbf{V}'.\mathbf{V}=\mathbf{0}$, $\mathbf{V}'.\mathbf{T}=-\mathbf{V}.\mathbf{T}'=-k_n$, $\mathbf{V}'.\mathbf{U}=-\mathbf{U}'.\mathbf{V}$ και άρα υπάρχει συνάρτηση $\tau_g{:}I\to\mathbf{R}$ τέτοια ώστε οι εξισώσεις κίνησης του τριέδρου Darboux της γ ως προς την S να έχουν την μορφή:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = k_g\,\mathbf{U} + k_n\,\mathbf{V},$$
$$\frac{d\mathbf{U}}{ds} = -k_g\,\mathbf{T} + \tau_g\,\mathbf{V},$$
$$\frac{d\mathbf{V}}{ds} = -k_n\,\mathbf{T} - \tau_g\,\mathbf{U}.$$

Η συνάρτηση τ_g ονομάζεται **γεωδαισιακή στρέψη** της γ. Οι εξισώσεις αυτές περιέχουν πληροφορίες για την γεωμετρία της καμπύλης σε σχέση με την επιφάνεια.

Παρατηρούμε τα εξής:

α) Η κάθετη καμπυλότητα $k_n(s)$ της γ στο s εξαρτάται (όπως έχουμε δει) μόνο από την επιφάνεια και το $\mathbf{T}(s)=\gamma'(s)$, και όχι από το $\gamma''(s)$. Μάλιστα έχουμε $k_n(s)=\mathrm{II}_{\gamma(s)}(\gamma'(s))$.

β) Η γεωδαισιακή στρέψη $\tau_g(s)$ της γ στο s εξαρτάται μόνο από την επιφάνεια και το $\mathbf{T}(s)=\gamma'(s)$, και όχι από το $\gamma''(s)$. Πράγματι για ευκολία έστω ότι $0\in I$ και $p=\gamma(0)\in S$. Τότε το

$$\mathbf{V}'(0)=\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\mathbf{N}(\gamma(s))=(d\mathbf{N})_p(\gamma'(0))=(d\mathbf{N})_p(\mathbf{T}(0))$$

και άρα το $\tau_g(0)=-\mathbf{V}'(0).\mathbf{U}(0)=-(d\mathbf{N})_p(\mathbf{T}(0)).(\mathbf{N}(p)\times\mathbf{T}(0))$ εξαρτάται μόνο από το $\mathbf{T}(0)$. Μπορούμε λοιπόν όπως και για την κάθετη καμπυλότητα να γράψουμε $\tau_g(\mathbf{w})$ για κάθε *μοναδιαίο* $\mathbf{w}\in T_pS$. Για να το υπολογίσουμε έστω $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2$ μια ορθοκανονική βάση του T_pS αποτελούμενη από κύρια διανύσματα, με αντίστοιχες κύριες καμπυλότητες k_1 και k_2, και τέτοια ώστε $\mathbf{w}_1\times\mathbf{w}_2=\mathbf{N}(p)$ (δηλαδή τα $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{N}(p)$ αποτελούν μια *θετικά προσανατολισμένη ορθοκανονική βάση του* $\mathbf{R}^3$). Γράφουμε για $\mathbf{w}\in T_pS$ μοναδιαίο:

$$\mathbf{w}=(\text{συν}\theta)\mathbf{w}_1+(\text{ημ}\theta)\mathbf{w}_2$$

όπου θ είναι η *προσανατολισμένη* γωνία από το $\mathbf{w}_1$ στο $\mathbf{w}$ (ως προς τον προσανατολισμό που ορίζει στο T_pS το $\mathbf{N}(p)$). Τότε έχουμε (αφού $\mathbf{N}(p)\times\mathbf{w}_1=\mathbf{w}_2$ και $\mathbf{N}(p)\times\mathbf{w}_2=-\mathbf{w}_1$):

$$\tau_g(\mathbf{w})=-(d\mathbf{N})_p(\mathbf{w}).(\mathbf{N}(p)\times\mathbf{w})=(k_1(\text{συν}\theta)\mathbf{w}_1+k_2(\text{ημ}\theta)\mathbf{w}_2).((\text{συν}\theta)\mathbf{w}_2-(\text{ημ}\theta)\mathbf{w}_1)=(k_2-k_1)\text{ημ}\theta\text{συν}\theta.$$

Συνδιάζοντας το παραπάνω με τον τύπο του Euler έχουμε την ακόλουθη:

Πρόταση 3.7.1 Έστω $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\in T_pS$ κύριες διευθύνσεις τέτοιες ώστε τα $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{N}(p)$ να αποτελούν μια θετικά προσανατολισμένη ορθοκανονική βάση του $\mathbf{R}^3$ και k_1,k_2 οι αντίστοιχες κύριες καμπυλότητες. Τότε για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{w}\in T_pS$ θα έχουμε:

$$k_n(\mathbf{w})=k_1\text{συν}^2\theta+k_2\text{ημ}^2\theta \text{ και } \tau_g(\mathbf{w})=(k_2-k_1)\text{ημ}\theta\text{συν}\theta,$$

όπου θ είναι η προσανατολισμένη γωνία από το $\mathbf{w}_1$ στο $\mathbf{w}$.

Αν τώρα $\varphi=\varphi(s)$ είναι η προσανατολισμένη γωνία από το $\mathbf{n}(s)$ στο $\mathbf{V}(s)=\mathbf{N}(\gamma(s))$ (ως προς τον προσανατολισμό που ορίζει στο κάθετο επίπεδο της γ το $\mathbf{T}(s)$) για την καμπύλη γ (η $\varphi(s)$ ορίζεται μόνο αν η καμπυλότητα $k(s)\neq0$) τότε θα έχουμε:

$$\mathbf{n}=(\text{συν}\varphi)\mathbf{V}+(\text{ημ}\varphi)\mathbf{U},\ \mathbf{b}=(\text{ημ}\varphi)\mathbf{V}-(\text{συν}\varphi)\mathbf{U} \text{ και}$$
$$\mathbf{V}=(\text{συν}\varphi)\mathbf{n}+(\text{ημ}\varphi)\mathbf{b},\ \mathbf{U}=(\text{ημ}\varphi)\mathbf{n}-(\text{συν}\varphi)\mathbf{b}$$

και άρα χρησιμοποιώντας και τις εξισώσεις κίνησης του τριέδρου Frenet παίρνουμε:

$$k_g=\mathbf{T}'.\mathbf{U}=k\mathbf{n}.((\text{ημ}\varphi)\mathbf{n}-(\text{συν}\varphi)\mathbf{b})=k\text{ημ}\varphi,$$
$$k_n=\mathbf{T}'.\mathbf{V}=k\mathbf{n}.((\text{συν}\varphi)\mathbf{n}+(\text{ημ}\varphi)\mathbf{b})=k\text{συν}\varphi,$$
$$\tau_g=\mathbf{V}.\mathbf{U}'=((\text{συν}\varphi)\mathbf{n}+(\text{ημ}\varphi)\mathbf{b}).((\text{ημ}\varphi)\mathbf{n}-(\text{συν}\varphi)\mathbf{b})'=$$
$$=((\text{συν}\varphi)\mathbf{n}+(\text{ημ}\varphi)\mathbf{b}).((\varphi'\text{συν}\varphi)\mathbf{n}+(\text{ημ}\varphi)(-k\mathbf{T}+\tau\mathbf{b})-(-\varphi'\text{ημ}\varphi)\mathbf{b}+(\text{συν}\varphi)\tau\mathbf{n})=$$
$$=\tau+\varphi'.$$

Οι πρώτες δύο σχέσεις ισχύουν ακόμα και όταν $k(s)=0$ οπότε το $\varphi(s)$ δεν ορίζεται μια και $k_g(s)=k_n(s)=0$ στην περίπτωση αυτή. Έχουμε άρα την ακόλουθη:

Πρόταση 3.7.2 Αν $\varphi=\varphi(s)$ είναι η προσανατολισμένη γωνία από το $\mathbf{n}(s)$ στο $\mathbf{V}(s)$ για την παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου καμπύλη γ:I->S τότε:

$$k_g(s)=k(s)\text{ημ}\varphi(s),\ k_n(s)=k(s)\text{συν}\varphi(s) \text{ και}$$
$$\tau_g(s)=\tau(s)+\varphi'(s)$$

όταν ορίζεται το $\tau(s)$, δηλ. όταν $k(s)\neq0$.

Προφανώς θα έχουμε:

$$k=\sqrt{k_g^2+k_n^2}\ .$$

Ορίζουμε τώρα τις εξής ειδικές κατηγορίες καμπύλων πάνω στη επιφάνεια S:

Ορισμός 3.7.1 α) Η καμπύλη $\gamma:I\to S$ ονομάζεται **γεωδαισιακή** της επιφάνειας S αν $k_g(s)=0$ για κάθε $s\in I$.

β) Η καμπύλη $\gamma:I\to S$ ονομάζεται **ασυμπτωτική** της επιφάνειας S αν $k_n(s)=0$ για κάθε $s\in I$.

γ) Η καμπύλη $\gamma:I\to S$ ονομάζεται **γραμμή καμπυλότητας** της επιφάνειας S αν για κάθε $s\in I$ το διάνυσμα $\mathbf{T}(s)=\gamma'(s)\in T_{\gamma(s)}S$ είναι *κύριο* δηλαδή είναι ιδιοδιάνυσμα του αντίστοιχου τελεστή σχήματος $(d\mathbf{N})_{\gamma(s)}:T_{\gamma(s)}S\to T_{\gamma(s)}S$.

Για τις καμπύλες αυτές ισχύουν τα εξής:

α) Η $\gamma:I\text{->}S$ είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν το $\mathbf{n}$, όταν ορίζεται, είναι κάθετο στην S. Αυτό όμως σημαίνει ότι η φ είναι σταθερή και άρα $\tau_g(s)=\tau(s)$ όταν ορίζεται το $\tau(s)$, δηλ. όταν $k(s)\neq 0$. Δηλαδή η γεωδαισιακή στρέψη $\tau_g(\mathbf{w})$ για μοναδιαίο $\mathbf{w}\in T_pS$ είναι ίση με την *στρέψη* της γεωδαισιακής γ με $\gamma(0)=p$ και $\gamma'(0)=\mathbf{w}$ (θα δούμε στην συνέχεια ότι υπάρχει *μοναδική* γεωδαισιακή με αυτή την ιδιότητα). Προφανώς για κάθε γεωδαισιακή έχουμε $k_n(s)=\pm k(s)$.

β) Η $\gamma:I\to S$ είναι ασυμπτωτική αν και μόνο αν το $\mathbf{n}$, όταν ορίζεται, είναι εφαπτόμενο στην S δηλαδή αν και μόνο αν το εγγύτατο επίπεδο σε κάθε σημείο της συμπίπτει με το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο σημείο αυτό. Επίσης $k_g(s)=\pm k(s)$ και ομοίως με τις γεωδαισιακές η φ είναι σταθερή και άρα $\tau_g(s)=\tau(s)$ όταν ορίζεται το $\tau(s)$.

γ) Η $\gamma:I\to S$ είναι γραμμή καμπυλότητας αν και μόνο αν υπάρχει (διαφορίσιμη) συνάρτηση $\kappa:I\to\mathbf{R}$ με $(d\mathbf{N})_{\gamma(s)}(\gamma'(s))+\kappa(s)\gamma'(s)=\mathbf{0}$ για κάθε $s\in I$, δηλαδή αν και μόνο αν:

$$\frac{d\mathbf{V}}{ds}=-\kappa\mathbf{T}$$

στο I (*εξίσωση του Rodrigues*). Άρα από τις εξισώσεις του τριέδρου Darboux συμπεραίνουμε ότι η γ είναι γραμμή καμπυλότητας αν και μόνο αν $\tau_g(s)=0$ για κάθε $s\in I$.

Αν η γ λοιπόν είναι *ευθεία* τότε είναι και γεωδαισιακή και ασυμπτωτική. Οι γεωδαισιακές είναι οι καμπύλες που έχουν *εσωτερική* επιτάχυνση, ως προς την επιφάνεια, ίση με μηδέν. Μπορούν άρα να θεωρηθούν ανάλογες των ευθειών στις επίπεδες καμπύλες.

Έστω τώρα ότι $X:U\to S$ είναι μια ομαλή παραμετρικοποίηση της επιφάνειας με το $X_u\times X_\upsilon$ ομόρροπο του $\mathbf{N}$ και ότι η καμπύλη $\gamma:I\to S$ έχει την μορφή $\gamma(s)=X(u(s),\upsilon(s))$. Η συνθήκη η γ είναι παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου γράφεται:

$$E(u')^2+2Fu'\upsilon'+G(\upsilon')^2=1$$

στο I (όπου οι συνιστώσες E,F,G της πρώτης θεμελιώδους μορφής ως προς την παραμετρικοποίηση X υπολογίζονται στο $(u(s),\upsilon(s))\in U$). Έχουμε τώρα:

$$\mathbf{T}=\gamma'=X_u u'+X_\upsilon \upsilon',$$

$$\mathbf{T}'=\gamma''=X_{uu}(u')^2+2X_{u\upsilon}u'\upsilon'+X_{\upsilon\upsilon}(\upsilon')^2+X_u u''+X_\upsilon \upsilon''=$$

$$=[u''+\Gamma_{11}^1(u')^2+2\Gamma_{12}^1u'\upsilon'+\Gamma_{22}^1(\upsilon')^2]X_u+[\upsilon''+\Gamma_{11}^2(u')^2+2\Gamma_{12}^2u'\upsilon'+\Gamma_{22}^2(\upsilon')^2]X_\upsilon+$$

$$+[e(u')^2+2fu'\upsilon'+g(\upsilon')^2]\mathbf{V}$$

από όπου παίρνουμε $k_n=e(u')^2+2fu'\upsilon'+g(\upsilon')^2$ (ως γνωστόν).και για το διάνυσμα της γεωδαισιακής καμπυλότητας

$$k_g\mathbf{U}=[u''+\Gamma_{11}^1(u')^2+2\Gamma_{12}^1u'\upsilon'+\Gamma_{22}^1(\upsilon')^2]X_u+[\upsilon''+\Gamma_{11}^2(u')^2+2\Gamma_{12}^2u'\upsilon'+\Gamma_{22}^2(\upsilon')^2]X_\upsilon.$$

Συνεπώς η γ είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν ικανοποιεί το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$u''(s)+\Gamma_{11}^1(u(s),\upsilon(s))(u'(s))^2+2\Gamma_{12}^1(u(s),\upsilon(s))u'(s)\upsilon'(s)+\Gamma_{22}^1(u(s),\upsilon(s))(\upsilon'(s))^2=0,$$

$$\upsilon''(s)+\Gamma_{11}^2(u(s),\upsilon(s))(u'(s))^2+2\Gamma_{12}^2(u(s),\upsilon(s))u'(s)\upsilon'(s)+\Gamma_{22}^2(u(s),\upsilon(s))(\upsilon'(s))^2=0.$$

Από την θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων άρα συμπεραίνουμε το εξής:

Θεώρημα 3.7.1 Για κάθε $p\in S$ και $\mathbf{w}\in T_pS$ μοναδιαίο υπάρχει $\varepsilon>0$ και γεωδαισιακή $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$ με $\gamma(0)=p$ και $\gamma'(0)=\mathbf{w}$. Για κάθε άλλη γεωδαισιακή της S, $c:I\to S$ με $c(0)=p$ και $c'(0)=\mathbf{w}$ θα έχουμε $c=\gamma$ στο $I\cap(-\varepsilon,\varepsilon)$.

Γεωδαισιακές συνεπώς υπάρχουν από κάθε σημείο και προς οποιαδήποτε εφαπτόμενη κατεύθυνση αντίθετα με τις ασυμπτωτικές καμπύλες και τις γραμμές καμπυλότητητας που πρέπει να ξεκινάνε με ασυμπτωτική και κύρια αντίστοιχα κατεύθυνση. Αποδεικνύεται ότι αν η επιφάνεια S είναι *κλειστό* υποσύνολο του $\mathbf{R}^3$ (π.χ. η σφαίρα, το παραβολοειδές κλπ) τότε για κάθε $p\in S$ και $\mathbf{w}\in T_pS$ μοναδιαίο υπάρχει γεωδαισιακή $\gamma:\mathbf{R}\to S$ με $\gamma(0)=p$ και $\gamma'(0)=\mathbf{w}$ (δηλαδή με πεδίο ορισμού *όλο* το $\mathbf{R}$).

Για να υπολογίσουμε την γεωδαισιακή καμπυλότητα k_g παρατηρούμε ότι $k_g=\mathbf{T}'.\mathbf{U}=\mathbf{T}'.(\mathbf{N}\times\mathbf{T})=(\mathbf{T}\times\mathbf{T}').\mathbf{N}$ και άρα:

$$k_g=[(\upsilon''+\Gamma_{11}^2(u')^2+2\Gamma_{12}^2u'\upsilon'+\Gamma_{22}^2(\upsilon')^2)u'-(u''+\Gamma_{11}^1(u')^2+2\Gamma_{12}^1u'\upsilon'+\Gamma_{22}^1(\upsilon')^2)\upsilon'](X_u\times X_\upsilon).\mathbf{N}$$

και αφού $(X_u\times X_\upsilon).\mathbf{N}=|X_u\times X_\upsilon|=\sqrt{EG-F^2}$ θα έχουμε:

$$k_g=[u'\upsilon''-u''\upsilon'+\Gamma_{11}^2(u')^3+(2\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^1)(u')^2\upsilon'+(\Gamma_{22}^2-2\Gamma_{12}^1)u'(\upsilon')^2-\Gamma_{22}^1(\upsilon')^3]\sqrt{EG-F^2}$$

(αν η καμπύλη *δεν* είναι παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου θα πρέπει, όπως και στις επίπεδες καμπύλες, να διαιρέσουμε την παραπάνω σχέση με $|\gamma'|^3=(E(u')^2+2Fu'\upsilon'+G(\upsilon')^2)^{3/2}$). Συνεπώς η γεωδαισιακή καμπυλότητα εξαρτάται μόνο από την πρώτη θεμελιώδη μορφή, είναι άρα μια *μετρική αναλλοίωτος*. Αν π.χ. η S είναι το xy-επίπεδο τότε ως προς την συνήθη παραμετρικοποίηση έχουμε $E=G=1, F=0, \Gamma_{ij}^k=0$ άρα $k_g=u'\upsilon''-u''\upsilon'$.

Για την γεωδαισιακή στρέψη παρατηρούμε ότι $\mathbf{V}'\times\mathbf{T}=-k_n\mathbf{T}\times\mathbf{T}-\tau_g\mathbf{U}\times\mathbf{T}=\tau_g\mathbf{V}$ άρα $\tau_g=(\mathbf{V}'\times\mathbf{T}).\mathbf{V}=((d\mathbf{N})(\mathbf{T})\times\mathbf{T}).\mathbf{N}=((\mathbf{N}_uu'+\mathbf{N}_\upsilon\upsilon')\times(X_uu'+X_\upsilon\upsilon')).\mathbf{N}$ και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Weingarten έχουμε την σχέση:

$$\tau_g=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}(\upsilon')^2 & -u'\upsilon' & (u')^2\\ E & F & G\\ e & f & g\end{vmatrix}$$

(αν η καμπύλη *δεν* είναι παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου θα πρέπει να διαιρέσουμε την παραπάνω σχέση με $|\gamma'|^2=E(u')^2+2Fu'\upsilon'+G(\upsilon')^2$).

Η καμπύλη $\gamma:I\to S$ με $\gamma(t)=X(u(t),\upsilon(t))$ (όχι αναγκαστικά παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου) θα είναι γραμμή καμπυλότητος αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix}(\upsilon'(t))^2 & -u'(t)\upsilon'(t) & (u'(t))^2\\ E(u(t),\upsilon(t)) & F(u(t),\upsilon(t)) & G(u(t),\upsilon(t))\\ e(u(t),\upsilon(t)) & f(u(t),\upsilon(t)) & g(u(t),\upsilon(t))\end{vmatrix}=0$$

για κάθε $t\in I$. Για τις γραμμές καμπυλότητας ισχύει το εξής χρήσιμο:

Θεώρημα 3.7.2 Έστω S ομαλή επιφάνεια και $p\in S$ σημείο της που *δεν είναι ομφαλικό*. Τότε υπάρχει παραμετρικοποίηση της S γύρω από το p τέτοια ώστε οι συντεταγμένες γραμμές να είναι γραμμές καμπυλότητας.

Απόδειξη. Έστω $X:U\to S$ παραμετρικοποίηση της S γύρω από το p τέτοια ώστε για τις κύριες καμπυλότητες να έχουμε $k_1>k_2$ στο $X(U)$ και $q=X^{-1}(p)$. Τότε για κάθε $(u,\upsilon)\in U$ η εξίσωση $\begin{vmatrix}\mu^2 & -\lambda\mu & \lambda^2\\ E(u,\upsilon) & F(u,\upsilon) & G(u,\upsilon)\\ e(u,\upsilon) & f(u,\upsilon) & g(u,\upsilon)\end{vmatrix}=0$ ορίζει δύο γραμμικώς ανεξάρτητες διευθύνσεις (λ,μ) (που αντιστοιχούν στις κύριες διευθύνσεις) και άρα μπορεί να παραγοντοποιηθεί στην μορφή:

$$(a_1(u,\upsilon)\lambda+b_1(u,\upsilon)\mu)(a_2(u,\upsilon)\lambda+b_2(u,\upsilon)\mu)=0$$

όπου οι $a_1,a_2,b_1,b_2:U\to\mathbf{R}$ είναι διαφορίσιμες και $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$ στο U. Από την θεωρία των διαφορικών εξισώσεων έχουμε ότι οι γενικές λύσεις των διαφορικών εξισώσεων

$$a_1(u,\upsilon)du+b_1(u,\upsilon)d\upsilon=0,\ \ a_2(u,\upsilon)du+b_2(u,\upsilon)d\upsilon=0$$

θα είναι σε μια περιοχή του q, $\varphi_1(u,\upsilon)$=σταθ. και $\varphi_2(u,\upsilon)$=σταθ. αντίστοιχα όπου οι $\varphi_1,\varphi_2{:}U\to\mathbf{R}$ είναι διαφορίσιμες. Αφού $a_i\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial\upsilon}-b_i\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial u}=0$ (i=1,2) στο U και η ορίζουσα

$\begin{vmatrix} a_1(q) & b_1(q) \\ a_2(q) & b_2(q) \end{vmatrix}\neq 0$ συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2){:}U\to\mathbf{R}^2$ είναι μια τοπική αμφιδιαφόριση στο q. Συνεπώς η $Y{:}V\text{->}S$ με $Y(s,t)=X(\varphi^{-1}(s,t))$ όπου η V είναι μια κατάλληλη περιοχή του $\varphi(q)$ είναι μια ομαλή παραμετρικοποιήση της S γύρω από το p. Επίσης οι συντεταγμένες γραμμές της Y, s=σταθ. και t=σταθ. δίνονται παραμετρικά ως προς την X από τις $\varphi_1(u,\upsilon)$=σταθ. και $\varphi_2(u,\upsilon)$=σταθ. αντίστοιχα και άρα από τα παραπάνω είναι γραμμές καμπυλότητας της S.□

Για την παραμετρικοποίηση του θεωρήματος θα έχουμε φυσικά $F=f=0$ στο πεδίο ορισμού της.

Αντίστοιχα η καμπύλη $\gamma{:}I\to S$ με $\gamma(t)=X(u(t),\upsilon(t))$ (όχι αναγκαστικά παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου) θα είναι ασυμπτωτική αν και μόνο αν

$$e(u(t),\upsilon(t))(u'(t))^2+2f(u(t),\upsilon(t))u'(t)\upsilon'(t)+g(u(t),\upsilon(t))(\upsilon'(t))^2=0$$

για κάθε $t\in I$. Με παρόμοιο άρα τρόπο μπορεί να αποδειχθεί το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.7.3 Έστω S ομαλή επιφάνεια και $p\in S$ σημείο της με $K(p)<0$. Τότε υπάρχει παραμετρικοποίηση της S γύρω από το p τέτοια ώστε οι συντεταγμένες γραμμές να είναι ασυμπτωτικές καμπύλες.

Στην περίπτωση αυτή για την παραμετρικοποίηση του θεωρήματος θα έχουμε $e=g=0$ στο πεδίο ορισμού της.

Για τις ασυμπτωτικές καμπύλες ισχύει επίσης το εξής:

Θεώρημα 3.7.4 (Beltrami-Enneper) Έστω S επιφάνεια και $p\in S$ τέτοιο ώστε $K(p)<0$.Τότε αν γ είναι μια ασυμτωτική καμπύλη της S με $\gamma(0)=p$ με καμπυλότητα $k(0)>0$ και στρέψη *τα* τότε θα έχουμε:

$$|\tau(0)|=\sqrt{-K(p)}\,.$$

Απόδειξη. Έστω ότι η γ είναι παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου. Για κάθε s το $\mathbf{n}(s)$ θα ανήκει στο $T_{\gamma(s)}S$ και άρα $\mathbf{b}(s)=\mathbf{T}(s)\times\mathbf{n}(s)=\pm\mathbf{N}(\gamma(s))$ απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $-(d\mathbf{N})_p(\mathbf{T}(0))=\pm\mathbf{b}'(0)=\pm\tau(0)\mathbf{n}(0)$. Συνεπώς ο πίνακας του συμμετρικού τελεστή $-(d\mathbf{N})_p{:}T_pS\to T_pS$ ως προς την *ορθοκανονική* βάση $\mathbf{T}(0),\mathbf{n}(0)$ του T_pS θα πρέπει να είναι ο συμμετρικός πίνακας $\begin{pmatrix} 0 & \pm\tau(0) \\ \pm\tau(0) & 0 \end{pmatrix}$ και άρα $K(p)=\det(d\mathbf{N})_p=-\tau(0)^2$.□

Γεωμετρική σημασία των γεωδαισιακών. Έστω $\gamma{:}[\alpha,\beta]\to S\subseteq\mathbf{R}^3$ μια ομαλή καμπύλη παραμετρικοποιημένη ως προς ο μήκος τόξου *πάνω στην επιφάνεια* S με $\gamma(\alpha)=p$ και $\gamma(\beta)=q$. Θεωρούμε ε>0 και μια απεικόνιση $h{:}(-\varepsilon,\varepsilon)\times[\alpha,\beta]\to S$ τέτοια ώστε: $h(0,s)=\gamma(s)$ για κάθε $s\in[\alpha,\beta]$ και $h(r,\alpha)=p$, $h(r,\beta)=q$ για κάθε $r\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. Μια τέτοια απεικόνιση h ονομάζεται **μεταβολή** της γ (ή **ομοτοπία** με σταθερά τα άκρα). Θεωρούμε επίσης τις καμπύλες $\gamma_r(s)=h(r,s)$ για $s\in[\alpha,\beta]$ (άρα $\gamma_0=\gamma$) και συμβολίζουμε με $L_h(r)$ το μήκος της γ_r.

Αν τώρα η καμπύλη γ έχει το *ελάχιστο* μήκος από όλες τις (κατά τμήματα) λείες καμπύλες της S που συνδέουν τα p,q και η συνάρτηση $L_h{:}(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbf{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 θα έχουμε $L_h'(0)=0$. Έχουμε όμως

$$L_h(r)=\int_\alpha^\beta\left(\frac{\partial h}{\partial s}(r,s).\frac{\partial h}{\partial s}(r,s)\right)^{1/2}ds\,.$$

Αφού $\frac{\partial h}{\partial s}(0,s).\frac{\partial h}{\partial s}(0,s)=\gamma'(s).\gamma'(s)=1$ συμπεραίνουμε ότι η L_h είναι παραγωγίσιμη στο 0 και

$$L_h'(0)=\int_\alpha^\beta(\frac{\partial^2 h}{\partial r\partial s}(0,s).\frac{\partial h}{\partial s}(0,s))ds=\int_\alpha^\beta\{\frac{d}{ds}(\frac{\partial h}{\partial r}(0,s).\gamma'(s))-\frac{\partial h}{\partial r}(0,s).\gamma''(s)\}ds=$$

$$=[\frac{\partial h}{\partial r}(0,s).\gamma'(s)]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta\frac{\partial h}{\partial r}(0,s).\gamma''(s)ds=-\int_\alpha^\beta\frac{\partial h}{\partial r}(0,s).\gamma''(s)ds$$

αφού $h(r,\alpha)=p$=σταθ. και $h(r,\beta)=q$=σταθ..

Έχουμε $\gamma''(s)=\mathbf{T}'(s)=k_g(s)\mathbf{U}(s)+k_n(s)\mathbf{V}(s)$. Επίσης επειδή για κάθε s η καμπύλη $r\to h(r,s)$ βρίσκεται πάνω στην S και $h(r,s)=\gamma(s)$ το $\frac{\partial h}{\partial r}(0,s)\in T_{\gamma(s)}S$. Άρα αφού το $\mathbf{V}(s)$ είναι κάθετο στο $T_{\gamma(s)}S$ συμπεραίνουμε ότι:

$$L_h'(0)=-\int_\alpha^\beta k_g(s)\mathbf{U}(s)\cdot\frac{\partial h}{\partial r}(0,s)ds.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $X:U\to S$ είναι μια ομαλή παραμετρικοποίηση της επιφάνειας και ότι η καμπύλη $\gamma:I\to S$ έχει την μορφή $\gamma(s)=X(u(s),\upsilon(s))$. Μπορούμε να γράψουμε άρα

$$\mathbf{U}(s)=X_u(u(s),\upsilon(s))c_1(s)+X_\upsilon(u(s),\upsilon(s))c_2(s)$$

όπου οι $c_1,c_2:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}$ είναι διαφορίσιμες.

Αν η $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}$ είναι διαφορίσιμη με $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)=0$ θεωρούμε την εξής μεταβολή της γ:

$$h(r,s)=X(u(s)+r\varphi(s)c_1(s),\upsilon(s)+r\varphi(s)c_2(s))$$

(για $\varepsilon>0$ αρκετά μικρό ώστε η h να ορίζεται για $|r|<\varepsilon$) για την οποία ισχύει $\frac{\partial h}{\partial r}(0,s)=\varphi(s)\mathbf{U}(s)$ και έχουμε:

$$L_h'(0)=-\int_\alpha^\beta k_g(s)\varphi(s)ds.$$

Αν λοιπόν η γ έχει το ελάχιστο μήκος από όλες τις (κατά τμήματα) λείες καμπύλες της S που συνδέουν τα p,q τότε για κάθε $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}$ διαφορίσιμη με $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)=0$ θα έχουμε

$$\int_\alpha^\beta k_g(s)\varphi(s)ds=0.$$

Επιλέγοντας κατάλληλα την φ (π.χ. $\varphi=k_g\lambda$ όπου η $\lambda:[\alpha,\beta]\to[0,+\infty)$ είναι διαφορίσιμη με $\lambda(\alpha)=\lambda(\beta)=0$) συμπεραίνουμε ότι $k_g(s)=0$ για κάθε $s\in[\alpha,\beta]$ έχουμε δηλαδή το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.7.5 Αν η ομαλή καμπύλη $\gamma:[\alpha,\beta]\to S$ με $\gamma(\alpha)=p$ και $\gamma(\beta)=q$ έχει το ελάχιστο μήκος από όλες τις (κατά τμήματα) ομαλές καμπύλες της S που συνδέουν τα p,q τότε η γ είναι *γεωδαισιακή*.

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει υποθέτοντας απλώς ότι γ είναι κατά τμήματα ομαλή. Επίσης αποδεικνύεται ότι αντιστρόφως αν η $\gamma:(\alpha,\beta)\to S$ είναι γεωδαισιακή τότε για κάθε $t_0\in(\alpha,\beta)$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $t_1,t_2\in(t_0-\delta,t_0+\delta)\subseteq(\alpha,\beta)$ η γ περιορισμένη στο διάστημα των t_1,t_2 είναι η *μοναδική* καμπύλη της S που συνδέει τα σημεία $\gamma(t_1)$ και $\gamma(t_2)$ και έχει το ελάχιστο μήκος. Δηλαδή οι γεωδαισιακές είναι οι μοναδικές καμπύλες της S που (τοπικά τουλάχιστον) ελαχιστοποιούν το μήκος και άρα είναι για την *εσωτερική* γεωμετρία της επιφάνειας S ότι είναι οι ευθείες για την γεωμετρία του επιπέδου. Αντίθετα όμως με την γεωμετρία του επιπέδου τα τμήματα των γεωδαισιακών μιας τυχαίας επιφάνειας *δεν* ελαχιστοποιούν πάντα το μήκος. Παραδείγματος χάριν οι γεωδαισιακές της σφαίρας είναι οι μέγιστοι κύκλοι της αλλά μόνο τα τμήματά τους με μήκος μικρότερο του π ελαχιστοποιούν το μήκος.

Επίσης αν $p,q\in S$ *δεν* μπορεί να συμπεράνει κανείς ότι πάντα θα υπάρχει γεωδαισιακή ώστε να συνδέει τα σημεία αυτά και να έχει το *ελάχιστο* μήκος από όλες τις κατά τμήματα λείες καμπύλες της S που συνδέουν τα p,q. Παραδείγματος χάριν αν $S=\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ και $p=(1,0)$, $q=(-1,0)$ τέτοια καμπύλη δεν υπάρχει (γιατί θα έπρεπε να διέρχονταν από το (0,0) το οποίο όμως δεν ανήκει στην S). Αποδεικνύεται όμως ότι αν η S είναι *κλειστό* υποσύνολο του $\mathbf{R}^3$ τότε για οποιαδήποτε $p,q\in S$ τέτοια καμπύλη υπάρχει, χωρίς όμως αναγκαστικά να είναι μοναδική (π.χ. στην σφαίρα υπάρχουν άπειρες καμπύλες ελαχίστου μήκους που συνδέουν τους δύο πόλους).

Επιφάνειες εκ περιστροφής. Αφού ως προς την παραμετρικοποίηση $X(u,\upsilon)=$ $=(\varphi(\upsilon)\text{συν}u,\varphi(\upsilon)\text{ημ}u,\psi(\upsilon))$, $u\in(0,2\pi)$, $\upsilon\in(a,b)$ έχουμε $F=f=0$, οι συντεταγμένες γραμμές (μεσημβρινοί u=σταθ. και παράλληλοι υ=σταθ.) είναι γραμμές καμπυλότητας της επιφάνειας. Επίσης αφού

$$\Gamma_{11}^1=0,\Gamma_{12}^1=\frac{\varphi'}{\varphi},\Gamma_{22}^1=0,\Gamma_{11}^2=-\frac{\varphi\varphi'}{(\varphi')^2+(\psi')^2},\Gamma_{12}^2=0,\Gamma_{22}^2=\frac{\varphi'\varphi''+\psi'\psi''}{(\varphi')^2+(\psi')^2}$$

η καμπύλη $\gamma(s)=X(u(s),\upsilon(s))$ είναι γεωδαισιακή (παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου) αν $\varphi(\upsilon(s))^2(u'(s))^2+(\varphi'(\upsilon(s))^2+\psi'(\upsilon(s))^2)(\upsilon'(s))^2=1$ και

$$u''(s)+2\frac{\varphi'(\upsilon(s))}{\varphi(\upsilon(s))}u'(s)\upsilon'(s)=0,$$

$$\upsilon''(s)-\frac{\varphi(\upsilon(s))\varphi'(\upsilon(s))}{\varphi'(\upsilon(s))^2+\psi'(\upsilon(s))^2}(u'(s))^2+\frac{\varphi'(\upsilon(s))\varphi''(\upsilon(s))+\psi'(\upsilon(s))\psi''(\upsilon(s))}{\varphi'(\upsilon(s))^2+\psi'(\upsilon(s))^2}(\upsilon'(s))^2=0.$$

Κατρχήν η παράλληλος $\upsilon=\upsilon_0$ (δηλαδή η $\gamma(s)=X(u(s),\upsilon_0)$ για κατάλληλη $u(s)$) θα είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν $\varphi'(\upsilon_0)=0$ όπως φαίνεται από τος παραπάνω εξισώσεις (αρκεί να πάρουμε την $u(s)=\alpha s+\beta$ για κατάλληλα α,β) δηλαδή αν και μόνο αν η εφαπτομένη στο υ_0 της καμπύλης C που περιστρέφεται είναι παράλληλη του άξονα περιστροφής z. Σε αυτή βέβαια την περίπτωση το εγγύτατο επίπεδο της παραλλήλου θα είναι κάθετο στην επιφάνεια και άρα το $\mathbf{n}=\pm\mathbf{N}\circ\gamma$ που αποδεικνύει με γεωμετρικό τρόπο ότι η παράλληλος είναι γεωδαισιακή.
Αν τώρα για την γεωδαισιακή $\gamma(s)=X(u(s),\upsilon(s))$ υπάρχει s_0 και ακολουθία $s_n\to s_0$ με $s_n\neq s_0$ και $\upsilon'(s_n)=0$ τότε $\upsilon''(s_0)=0$ και η δεύτερη εξίσωση δίνει (αφού $\varphi>0$ και το $u'(s_0)\neq0$) $\varphi'(\upsilon(s_0))=0$ άρα η παράλληλος $\upsilon=\upsilon(s_0)$ είναι γεωδαισιακή και εφάπτεται της γ στο $\gamma(s_0)$. Από την μοναδικότητα των γεωδαισιακών (Θεώρημα 3.7.1) προκύπτει ότι η γ θα περιέχεται στην παράλληλο αυτή και άρα $\upsilon'(s)=0$ για κάθε s. Συνεπώς εκτός από τις παραλλήλους $\upsilon=\upsilon_0$ με $\varphi'(\upsilon_0)=0$ *όλες* οι άλλες γεωδαισιακές έχουν $\upsilon'(s)\neq0$ για κάθε s εκτός πιθανόν από κάποια *μεμονωμένα* $s_0\in I$. Παραγωγίζοντας τώρα την $\varphi(\upsilon(s))^2(u'(s))^2+(\varphi'(\upsilon(s))^2+\psi'(\upsilon(s))^2)(\upsilon'(s))^2=1$ και χρησιμοποιώντας την $u''(s)+2\frac{\varphi'(\upsilon(s))}{\varphi(\upsilon(s))}u'(s)\upsilon'(s)=0$ παίρνουμε αφού $\upsilon'(s)\neq0$ (εκτός ίσως από κάποια μεμονωμένα s) την δεύτερη εξίσωση που συνεπώς μπορεί να παραληφθεί.

Άρα εκτός από κάποιες παραλλήλους οι γεωδαισιακές χαρακτηρίζονται από τις εξισώσεις $\varphi(\upsilon(s))^2(u'(s))^2+(\varphi'(\upsilon(s))^2+\psi'(\upsilon(s))^2)(\upsilon'(s))^2=1$ και $u''(s)+2\frac{\varphi'(\upsilon(s))}{\varphi(\upsilon(s))}u'(s)\upsilon'(s)=0$.
Συνεπώς όλοι οι μεσημβρινοί u=σταθ. είναι γεωδαισιακές. Έτσι π.χ. αφού η σφαίρα μπορεί να θεωρηθεί ως επιφάνεια εκ περιστροφής γύρω από οποιοδήποτε άξονά της συμπεραίνουμε ότι όλοι οι μέγιστοι κύκλοι (τομές της σφαίρας με επίπεδα που διέρχονται από το (0,0,0)) είναι γεωδαισιακές της σφαίρας. Αφού τέτοιους κύκλους μπορούμε να βρούμε από κάθε σημείο και προς κάθε εφαπτόμενη κατεύθυνση συμπεραίνουμε ότι αυτές είναι *όλες* οι γεωδαισιακές της σφαίρας.

Η εξίσωση $u''(s)+2\frac{\varphi'(\upsilon(s))}{\varphi(\upsilon(s))}u'(s)\upsilon'(s)=0$ τώρα δίνει $\frac{d}{ds}(\varphi(\upsilon(s))^2u'(s))=0$ και άρα ότι $\varphi(\upsilon(s))^2u'(s)=c$ είναι σταθερό. Παρατηρώντας ότι αν $\theta=\theta(s)$ είναι η γωνία των $\gamma'(s)$ και $X_u(u(s),\upsilon(s))$, δηλαδή η γωνία με την οποία η καμπύλη τέμνει την αντίστοιχη παράλληλο από το $\gamma(s)$ ικανοποιεί την

$$\text{συν}\theta=\frac{\gamma'(s)\cdot X_u(u(s),\upsilon(s))}{|\gamma'(s)||X_u(u(s),\upsilon(s))|}=|X_u(u(s),\upsilon(s))|u'(s)=\varphi(u(s))u'(s)$$

και ότι το $\varphi(u(s))$ είναι η απόσταση $r(\gamma(s))$ του σημείου $\gamma(s)$ της καμπύλης από τον άξονα περιστροφής (δηλαδή τον άξονα των z) συμπεραίνουμε το εξής:

Θεώρημα 3.7.6 (Clairaut) Για κάθε γεωδαισιακή γ που δεν είναι παράλληλος της επιφάνειας εκ περιστροφής S ισχύει το εξής:

$$r(\gamma(s))\text{συν}\theta(\text{s})=c=\text{σταθερό}.$$

Από το θεώρημα αυτό μπορεί κανείς να συνάγει πληροφορίες για τις γεωδαισιακές μιας επιφάνειας εκ περιστροφής.

Αν στο παραπάνω θεώρημα c=0 η αντίστοιχη γεωδαισιακή είναι κάποιος μεσημβρινός. Αν $c\neq 0$ θα έχουμε $u'(s)\neq 0$ για κάθε s, και άρα μπορούμε να αντιστρέψουμε την u και να γράψουμε $s=s(u)$ και η γεωδαισιακή γ μπορεί γραφεί παραμετρικά στην μορφή $\upsilon=\upsilon(u)(=\upsilon(s(u)))$ (απαλείφοντας δηλαδή την παράμετρο s). Από τις εξισώσεις $\varphi(\upsilon(s))^2(u'(s))^2+(\varphi'(\upsilon(s))^2+\psi'(\upsilon(s))^2)(\upsilon'(s))^2=1$ και $\varphi(\upsilon(s))^2\,u'(s)=c$ παίρνουμε την διαφορική εξίσωση $(\varphi'(\upsilon)^2+\psi'(\upsilon)^2)(\frac{d\upsilon}{du})^2+\varphi(\upsilon)^2=\frac{\varphi(\upsilon)^4}{c^2}$ η οποία δίνει

$$u=c\int\frac{1}{\varphi(\upsilon)}\sqrt{\frac{\varphi'(\upsilon)^2+\psi'(\upsilon)^2}{\varphi(\upsilon)^2-c^2}}d\upsilon+A$$

όπου A είναι μια σταθερά.

Ασκήσεις

1. Να βρείτε ομαλή παραμετρικοποίηση της επιφάνειας S που είναι το γράφημα της συνάρτησης $z=xy$ γύρω από το σημείο της $p=(0,0,0)$ ως προς την οποία οι συντεταγμένες γραμμές να είναι γραμμές καμπυλότητας.
2. Έστω S ομαλή επιφάνεια. (i) Να δείξετε ότι αν μια καμπύλη $\gamma:I\to S$ είναι και γεωδαισιακή και γραμμή καμπυλότητος τότε η γ είναι επίπεδη. (ii) Να δείξετε ότι μια επίπεδη γεωδαισιακή γ της S με καμπυλότητα $k>0$ είναι και γραμμή καμπυλότητας.
3. Έστω S ομαλή επιφάνεια. Να δείξετε ότι μια καμπύλη $\gamma:I\to S$ είναι και γεωδαισιακή και ασυμπτωτική αν και μόνο αν είναι τμήμα ευθείας.
4. Να δείξετε ότι αν όλες οι γεωδαισιακές μιας συνεκτικής ομαλής επιφάνειας S είναι επίπεδες καμπύλες τότε η S περιέχεται σε ένα επίπεδο ή σε μια σφαίρα.
5. Έστω $X:U\to S$ ομαλή *ορθογώνια* παραμετρικοποίηση (δηλαδή F=0) της επιφάνειας S με το $X_u\times X_\upsilon$ ομόρροπο του $\mathbf{N}$ και $\gamma:I\text{->}S$ καμπύλη παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου με $\gamma(s)=X(u(s),\upsilon(s))$. (i) Αν $\theta=\theta(s)$ είναι η *προσανατολισμένη* γωνία από το $X_u(u(s),\upsilon(s))$ στο $\gamma'(s)$ (ως προς τον προσανατολισμό που ορίζει στο $T_{\gamma(s)}S$ το $\mathbf{N}(\gamma(s))$) να δείξετε ότι για την γεωδαισιακή καμπυλότητα της γ έχουμε $k_g=\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(G_u\frac{d\upsilon}{ds}-E_\upsilon\frac{du}{ds}\right)+\frac{d\theta}{ds}$. (ii) Να υπολογίσετε τις γεωδαισιακές καμπυλότητες $(k_g)_1$ και $(k_g)_2$ των συντεταγμένων γραμμών υ=σταθ. και u=σταθ. αντίστοιχα. (iii) Να δείξετε ότι $k_g=(k_g)_1\,\text{συν}\theta+(k_g)_2\,\text{ημ}\theta+\frac{d\theta}{ds}$ (τύπος του Liouville).
6. Να δείξετε ότι για κάθε ομαλή καμπύλη παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου $\gamma:I\text{->}S^2$ έχουμε $k(s)=\sqrt{k_g^2(s)+1},\ \tau=\frac{k_g'(s)}{k_g^2(s)+1}$.
7. Να βρείτε τις ασυμπτωτικές καμπύλες της επιφάνειας που προκύπτει από την περιστροφή της καμπύλης $x=\cosh z$ γύρω από τον άξονα των z.
8. Έστω $\mathbf{w}\in T_pS$ μοναδιαίο και τέτοιο ώστε η γεωδαισιακή γ με $\gamma(0)=p$ και $\gamma'(0)=\mathbf{w}$ να έχει καμπυλότητα $k(0)=0$. Να δείξετε ότι $\left|\tau_g(\mathbf{w})\right|=\sqrt{-K(p)}$.
9. Έστω $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}^3$ μια *απλή* ομαλή καμπύλη παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου με καμπυλότητα $k>0$. Να δείξετε ότι για $\varepsilon>0$ αρκετά μικρό η $X(u,\upsilon)=\gamma(u)+\upsilon\mathbf{b}(u)$, $\alpha<u<\beta$, $-\varepsilon<\upsilon<\varepsilon$ είναι μια ομαλή παραμετρική επιφάνεια που έχει την καμπύλη γ ως γεωδαισιακή.
10. Θεωρούμε την γεωδαισιακή του μονόχωνου υπερβολοειδούς εκ περιστροφής $x^2+y^2-z^2=1$ που διέρχεται από το σημείο του $p=(1,1,-1)$ και σχηματίζει γωνία $\pi/4$ με την παράλληλο από το p. Να δείξετε ότι κατά την κατεύθυνση του άξονα των z η γεωδαισιακή αυτή τείνει ασυμπτωτικά στην παράλληλο $x^2+y^2=1$, $z=0$.
11. Θεωρούμε την επιφάνεια της σπείρας η οποία προκύπτει από την περιστροφή γύρω από τον άξονα των z του κύκλου του xz-επιπέδου με εξίσωση $(x-a)^2+z^2=r^2$ (όπου $0<r<a$). Οι κύκλοι που

περιγράφονται από την περιστροφή των σημείων $(a+r,0,0)$ και $(a-r,0,0)$ ονομάζονται *εξωτερικός και εσωτερικός παράλληλος* αντίστοιχα. (i) Να δείξετε ότι οι δύο αυτοί παράλληλοι είναι οι μόνοι παράλληλοι που είναι και γεωδαισιακές. (ii) Να δείξετε ότι κάθε γεωδαισιακή εκτός από τον εσωτερικό παράλληλο τέμνει τον εξωτερικό παράλληλο. (iii) Να δείξετε ότι μια γεωδαισιακή που ξεκινάει από τον εξωτερικό παράλληλο και σχηματίζει γωνία θ με αυτόν θα τέμνει, τείνει ασυμπτωτικά και δεν τέμνει τον εσωτερικό παράλληλο αν αντίστοιχα το συνθ είναι μικρότερο ίσο ή μεγαλύτερο από $\frac{a-r}{a+r}$.

12. Αφού βρείτε τις γεωδαισιακές του κυλίνδρου να εξετάσετε ποια τμήματά τους είναι ελαχίστου μήκους.
13. Έστω S_1,S_2 ομαλές επιφάνειες που τέμνονται κατά μήκος της ομαλής καμπύλης γ η οποία είναι γραμμή καμπυλότητας για την S_1. Να δείξετε ότι η γ είναι γραμμή καμπυλότητας και για την S_2 αν και μόνο αν οι επιφάνειες S_1,S_2 τέμνονται υπό σταθερή γωνία κατά μήκος της γ.
14. Έστω $X:U\to S$ ομαλή παραμετρικοποίηση της S τέτοια ώστε για κάθε ευθύγραμμο τμήμα $\beta:I\to U$ η καμπύλη $X\circ\beta$ είναι γεωδαισιακή της S (όχι αναγκαστικά παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου). Να δείξετε ότι για τα σύμβολα Christoffel της S ως προς την παραμετρικοποίηση X έχουμε $\Gamma_{22}^1=\Gamma_{11}^2=0, \Gamma_{11}^1=2\Gamma_{12}^2, \Gamma_{22}^2=2\Gamma_{12}^1$.
15. Έστω S ομαλή επιφάνεια και $\gamma:I\to S$ καμπύλη πάνω στην S (παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου). Θεωρούμε την παραμετρική επιφάνεια $X:I\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbf{R}^3$ με $X(s,\upsilon)=\gamma(s)+\upsilon\mathbf{V}(s)$, όπου το $\mathbf{V}(s)=\mathbf{N}(\gamma(s))$. Να δείξετε ότι η καμπύλη γ είναι γραμμή καμπυλότητας της S αν και μόνο αν η επιφάνεια X έχει καμπυλότητα Gauss παντού ίση με μηδέν.
16. *Έστω S ομαλή επιφάνεια και $p\in S$ *μη ομφαλικό* σημείο της. Αν $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$ καμπύλη παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου με $\gamma(0)=p$, να δείξετε ότι η ποσότητα $k_n'(0)-2\tau_g(0)k_g(0)$ εξαρτάται μόνο από το $\gamma'(0)\in T_pS$ (και όχι από το $\gamma''(0)$).