ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

(Θεωρία Καμπυλών και Επιφανειών)

Ιωάννης Π. Ζώης
E-mail: i.zois@exeter.oxon.org

12 Ιανουαρίου 2007

Περιεχόμενα

1 Πρόλογος **10**

2 Γραμμές και Καμπύλες **14**
- 2.1 Γραμμές του επιπέδου ως γραφικές παραστάσεις πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής 14
- 2.2 Γραμμές του επιπέδου ως συναρτήσεις δύο μεταβλητών 17
- 2.3 Καμπύλες στον Χώρο και Μοναδιαίο Εφαπτόμενο Διάνυσμα . . 19

3 Ισοδυναμία Καμπυλών και Παραδείγματα **25**
- 3.1 Κλάσεις Ισοδυναμίας Καμπυλών 25
- 3.2 Παραδείγματα Καμπυλών 26

4 Μήκος Καμπύλης και Φυσική Παράμετρος **28**
- 4.1 Βασικοί Ορισμοί 28
- 4.2 Παραδείγματα 32

5 Εγγύτατο Επίπεδο μιας Καμπύλης **37**

6 Καμπυλότητα μιας Καμπύλης **39**
- 6.1 Τοπικές και Ολικές Ιδιότητες μιας Καμπύλης 39
- 6.2 Γεωμετρική Ερμηνεία της Καμπυλότητας 39
- 6.3 Πρωτοκάθετο Μοναδιαίο Διάνυσμα και Καμπυλότητα 40
- 6.4 Χρήσιμες Εκφράσεις για την Καμπυλότητα 42
- 6.5 Εφαρμογή 44

7 Κινούμενο Τρίεδρο μιας Καμπύλης **46**
- 7.1 Δικάθετο Μοναδιαίο Διάνυσμα και Τρίεδρο Frenet 46
- 7.2 Χαρακτηριστικές Ευθείες και Επίπεδα μιας Καμπύλης 47

8 Στρέψη μιας Καμπύλης **49**
- 8.1 Ορισμός και Γεωμετρική Ερμηνεία της Στρέψης 49
- 8.2 Χρήσιμες Εκφράσεις για τη Στρέψη 50
- 8.3 Εφαρμογή 55

9 Εξισώσεις Frenet-Seret **57**
- 9.1 Βασική Θεωρία 57
- 9.2 Σφαιρικές Δείκτριες μιας Καμπύλης 59

10 Θεμελιώδες Θεώρημα Θεωρίας Καμπυλών στον $\mathbb{R}^3$ **62**

11 Καμπύλες στο χώρο $\mathbb{R}^n$ **68**

12 Γενικά περί Επιφανειών **70**

13 Ορισμός Επιφάνειας και Παραδείγματα **73**
13.1 Μερικοί Χρήσιμοι Ορισμοί 73
13.2 Παραδείγματα Επιφανειών 75

14 Αφηρημένες Επιφάνειες **82**
14.1 Το Τόρους και η Φιάλη Klein ως Χώροι Πηλίκο 82
14.2 Το (Πραγματικό) Προβολικό Επίπεδο 85
14.3 Επιφάνειες Riemann 88

15 Μελέτη Αφηρημένων Επιφανειών **91**
15.1 Χάρτες και Άτλαντες 91
15.2 Προσανατολισμός Επιφανειών 93
15.3 Απεικονίσεις Μετάβασης και Λείες Επιφάνειες 94
15.4 Προσανατολισμός Λείων Επιφανειών 94
15.5 Ορισμός Επιφανειών με χρήση Άτλαντα 95

16 Τοπολογική Κατηγοριοποίηση Επιφανειών **97**

17 Τοπολογικές Υποδιαιρέσεις και Χαρακτηριστική Euler **103**

18 Η Μιγαδική Καμπύλη $x^n + y^n = 1$ **110**
18.1 Γενικά 110
18.2 Ορισμός Τοπολογίας μέσω ενός Άτλαντα 110
18.3 Ο Υπολογισμός της Χαρακτηριστικής Euler 112

19 Επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$ **114**
19.1 Ορισμοί και Παραδείγματα 114
19.2 Η Απεικόνιση Gauss 118

20 Η Πρώτη Θεμελιώδης Μορφή **120**
20.1 Βασικός Ορισμός 120
20.2 Αλλαγή Συντεταγμένων 121
20.3 Παραδείγματα 122
20.4 Μετρική Ρήμαν 124
20.5 Γωνίες και Εμβαδά 126
20.6 Ισομετρίες 128
20.7 Το Ερώτημα της Πραγματοποίησης 130

21 Καμπυλότητα μιας Επιφάνειας **132**
21.1 Η δεύτερη θεμελιώδης μορφή 132
21.2 Εναλλακτική παρουσίαση της β′ θεμελιώδους μορφής και παραδείγματα 134
21.3 Γεωδαισιακή και Κάθετη Καμπυλότητα 137
21.4 Γεωμετρική ερμηνεία της καμπυλότητας Gauss 141
21.5 Μέση Καμπυλότητα και Ελάχιστες Επιφάνειες 145

22 Το ”Theorema Egregium” του Gauss **150**
22.1 Διατύπωση και Σχόλια 150
22.2 Πρώτη Απόδειξη 151
22.3 Δεύτερη Απόδειξη 153

23 Το Θεώρημα ”Gauss-Bonnet” **156**
23.1 Γενικά 156
23.2 Απλή Μορφή του Θεωρήματος 156
23.3 Γενικότερες Μορφές του Θεωρήματος 161
23.4 Ροές Διανυσματικών Πεδίων 163
23.5 Κριτικά Σημεία 165

24 Γεωδαισιακές Καμπύλες μιας Επιφάνειας **169**
24.1 Γενικός Χαρακτηρισμός Γεωδαισιακών 169
24.2 Εξισώσεις Γεωδαισιακών 169
24.3 Γεωδαισιακές Συντεταγμένες 175

25 Τύποι Weingarten-Gauss **179**
25.1 Το Κίνητρο 179
25.2 Η εξαγωγή των τύπων 179
25.3 Τύποι Mainardi-Codazzi 184

26 Το Υπερβολικό Επίπεδο **188**
26.1 Ισομετρίες του Υπερβολικού Επιπέδου 189
26.2 Γεωδαισιακές του Υπερβολικού Επιπέδου 192
26.3 Γωνίες και Αποστάσεις 194
26.4 Υπερβολικά Τρίγωνα 196
26.5 Εμβαδά στο Υπερβολικό Επίπεδο 199
26.6 Μη-Ευκλείδεια Γεωμετρία 200
26.7 Μιγαδική Ανάλυση και Υπερβολικό Επίπεδο 206

27 Παράρτημα **211**
27.1 Γενική Τοπολογία 211
27.2 Ανάλυση 220
27.3 Τανυστική Άλγεβρα 222
27.4 Παραμετρικές Παραστάσεις Αφηρημένων Επιφανειών 224

Σύντομο βιογραφικό σημείωμα του συγγραφέα:

Ο Ιωάννης Παναγιώτου Ζώης γεννήθηκε το 1968 στη Βέροια. Μετά το πέρας των προπτυχιακών του σπουδών στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών, απ' όπου αποφοίτησε με Άριστα, συνέχισε τις μεταπτυχιακές του σπουδές στην Αγγλία: Μάστερ (Part III of the Mathematical Tripos) στο Πανεπιστήμιο του Κέιμπριτζ (Κολλέγιο Εμμανουήλ) και Διδακτορικό στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης (Κολλέγιο Έξετερ). Η τριμελής επιτροπή της διδακτορικής του διατριβής απαρτιζόταν από τους καθηγητές Simon K. Donaldson FRS (Fields Medal 1986, Crafoord Prize 1996), Roger Penrose FRS και Sheung-Tsoun Tsou. Ήταν υπότροφος, μεταξύ άλλων, της Ευρωπαϊκής Ένωσης, της Βρεττανικής Κυβέρνησης, του ΙΚΥ (Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών), του Κοινωφελούς Ιδρύματος *Α.Σ. Ωνάσης* και του Κοινωφελούς Ιδρύματος *Α.Γ. Λεβέντης*. Έχει εργασθεί στο παρελθόν ως ερευνητής και πανεπιστημιακός δάσκαλος στα Πανεπιστήμια της Οξφόρδης και του Κέιμπριτζ της Αγγλίας, στο Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES) (ως μέλος της ερευνητικής ομάδας του καθηγητή Alain Connes–Fields Medal 1982, Crafoord Prize 2002–) και στην École Normale Superieure (ENS) στο Παρίσι της Γαλλίας και αλλού. Τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα εμπίπτουν στα γνωστικά αντικείμενα της Μη-μεταθετικής Γεωμετρίας, της Τοπολογίας και Γεωμετρίας των Πολλαπλοτήτων (ειδικότερα των Πολλαπλοτήτων Χαμηλών Διαστάσεων) και εφαρμογές αυτών στη Θεωρητική Φυσική (Κοσμολογία, Θεωρίες Ενοποίησης, Θεωρία Χορδών/Μεμβρανών). Έχει δημοσιεύσει μέχρι στιγμής περίπου είκοσι άρθρα σε διεθνή ερευνητικά επιστημονικά περιοδικά (σε ηλεκτρονική και έντυπη μορφή).

♦ *Στη μνήμη του αδερφού μου Δημήτρη.*

Εισαγωγή:

Ο βασικός κορμός των διδακτικών αυτών σημειώσεων προήλθε από τις παραδόσεις του μαθήματος του 3ου εξαμήνου (2ου έτους) *Διαφορική Γεωμετρία (Θεωρία Καμπυλών και Επιφανειών)* που ο συγγραφέας δίδαξε κατά το ακαδημαϊκό έτος 2005-2006 στην Ανώτατη Σχολή Τοπογραφίας της Γεωγραφικής Υπηρεσίας Στρατού (ΓΥΣ), σχολή στην οποία φοιτούν αξιωματικοί απόφοιτοι της Στρατιωτικής Σχολής Ευελπίδων και οι οποίοι εισάγονται στην εν λόγω σχολή της ΓΥΣ κατόπιν γραπτών εξετάσεων. Το πρόγραμμα σπουδών της σχολής ακολουθεί περίπου το πρόγραμμα σπουδών της σχολής Τοπογράφων Μηχανικών του ΕΜΠ αλλά σε κάπως υψηλώτερο επίπεδο μιας και οι φοιτητές είναι ήδη απόφοιτοι μιας ανώτατης σχολής της λεγόμενης *θετικής κατεύθυνσης*.

Η ύλη του μαθήματος βασίστηκε εν πολλοίς στο μάθημα του 4ου τριμήνου του δευτέρου έτους *Γεωμετρία Επιφανειών* το οποίο ο συγγραφέας είχε διδάξει στο παρελθόν στους προπτυχιακούς φοιτητές των Μαθηματικών Τμημάτων των Πανεπιστημίων της Οξφόρδης και του Κέιμπριτζ της Αγγλίας.

Οι σημειώσεις αυτές βασίστηκαν κυρίως στις εξαιρετικές διδακτικές σημειώσεις των καθηγητών Nigel J. Hitchin FRS του Πανεπιστημίου της Οξφόρδης και Graeme B. Segal FRS του Πανεπιστημίου του Κέιμπριτζ της Αγγλίας. Χρησιμοποιήθηκαν βέβαια και διάφορα βιβλία τα οποία παρατίθενται στην βιβλιογραφία.

Οι παρούσες σημειώσεις δεν αποτελούν απλά μετάφραση των προαναφερθέντων αγγλικών σημειώσεων. Έγινε προσπάθεια να αναλυθούν περισσότερο πολλά σημεία, αλλά ταυτόχρονα εμπλουτίσθηκε η ύλη με αρκετά επιπλέον κεφάλαια και διάφορες εφαρμογές. Ταυτόχρονα συμπεριελήφθησαν πολλοί ορισμοί από άλλους κλάδους των μαθηματικών (κυρίως από την Τοπολογία, την Ανάλυση, την Άλγεβρα κ.ά.) ώστε να γίνουν οι σημειώσεις αυτές κατά το δυνατόν αυτοδύναμες στην μελέτη τους. Η πρόθεση του συγγραφέα ήταν τριπλή:

• *Αρχικά να προσφερθεί ένα μάθημα υψηλού προπτυχιακού επιπέδου σύμφωνα με τα σύγχρονα διεθνή πρότυπα.*

• *Δεύτερον, να καλυφθεί ένα κενό που υπάρχει στην ελληνική βιβλιογραφία, καθότι η σύγχρονη αντιμετώπιση της γεωμετρίας δεν περιλαμβάνει μόνο την λεγόμενη μετρική γεωμετρία, αλλά εμπεριέχει και πολλά στοιχεία (γενικής και αλγεβρικής) τοπολογίας, ολικής ανάλυσης αλλά και μιγαδικής ανάλυσης (επιφάνειες Ρήμαν).*

• *Τέλος κατεβλήθη προσπάθεια η ύλη να είναι προσιτή και σε ένα ακροατήριο με τεχνολογική κατεύθυνση.*

Θερμές ευχαριστίες εκφράζονται πρωτίστως προς τους καθηγητές Nigel J. Hitchin και Graeme B. Segal για την σημαντική συμβολή τους στο όλο εγχείρημα. Επίσης πολλές ευχαριστίες εκφράζονται στους φοιτητές για τον ενθουσιασμό, τη διάθεση για μελέτη, την ενθάρρυνση, τις παρατηρήσεις και τα σχόλιά τους.
Αθήνα, Αύγουστος 2006,
Ι.Π.Ζ.

1 Πρόλογος

Είναι γνωστό πως τόσο η *γεωμετρία* όσο και η *θεωρία αριθμών* αποτελούν, χωρίς αμφιβολία, δύο από τους πιο ερευνητικά ενεργούς κλάδους των μαθηματικών, από την εποχή των αρχαίων Ελλήνων μέχρι και σήμερα. Οι αρχαίοι Έλληνες πίστευαν πως μαθηματικά είναι η μελέτη *σχημάτων (γεωμετρία)* και *αριθμών (θεωρία αριθμών)*. Όνειρο των μαθηματικών είναι η ενοποίηση των δύο παραπάνω κλάδων μέσω του λεγομένου *προγράμματος Atiyah-Langlands* (όπως και στην φυσική με τις θεωρίες ενοποίησης, έτσι και στα μαθηματικά έχουν επικρατήσει Πλατωνικές απόψεις). Κομβικό ρόλο στο πρόγραμμα Atiyah-Langlands παίζει η περίφημη *εικασία Riemann*, που κατά γενική ομολογία είναι το σημαντικότερο ανοιχτό μαθηματικό πρόβλημα σήμερα. Πηγή (ή καλύτερα γενίκευση) της εικασίας Riemann αποτελεί ένα εκπληκτικό θεώρημα που απέδειξε ο ίδιος ο Riemann στα μέσα περίπου του 19ου αιώνα που δείχνει με εντυπωσιακό τρόπο την βαθιά σχέση γεωμετρίας και θεωρίας αριθμών. Περιγράφουμε σύντομα το θεώρημα Riemann:

Έστω η σειρά (άθροισμα)

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Ως γνωστόν, αυτή η (δυναμο)σειρά *συγκλίνει* (η εν λόγω σειρά συγκλίνει για κάθε πραγματικό εκθέτη αυστηρά μεγαλύτερο της μονάδος και αποκλίνει-απειρίζεται- για εκθέτες μικρότερους ή ίσους της μονάδος). Θεωρούμε στη συνέχεια το άπειρο γινόμενο παραγόντων της μορφής

$$B = \frac{1}{(1-\frac{1}{2^2})\cdot(1-\frac{1}{3^2})\cdot(1-\frac{1}{5^2})\cdot(1-\frac{1}{7^2})\cdots}$$

όπου στο άπειρο γινόμενο παίρνουμε *μόνο τους πρώτους αριθμούς* (πρώτοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν μοναδικούς διαιρέτες τον εαυτό τους και την μονάδα, προφανώς είναι όλοι περιττοί). Το θεώρημα του Riemann λέει πως

$$A = B = \frac{\pi^2}{6}.$$

Δηλαδή υπάρχει μια βαθιά σχέση μεταξύ γεωμετρίας (το γνωστό $\pi = 3,14159\cdots$ που εμφανίζεται στους γνωστούς τύπους για το μήκος περιφέρειας και εμβαδόν του κύκλου) και του βασικού προβλήματος της θεωρίας αριθμών που είναι η *κατανομή των πρώτων αριθμών* μέσα στο σύνολο των φυσικών αριθμών.

Η σύγχρονη γεωμετρία χωρίζεται σε δύο μεγάλους κλάδους: την *διαφορική γεωμετρία* και την *αλγεβρική γεωμετρία*. Το αντικείμενο μελέτης της διαφορικής γεωμετρίας είναι η *πολλαπλότητα (manifold)* ενώ της αλγεβρικής γεωμετρίας είναι η *ποικιλία (variety)*. Η πρώτη σχετίζεται με διαφορικές εξισώσεις, η δεύτερη με αλγεβρικές εξισώσεις.

Στο μάθημα της διαφορικής γεωμετρίας αυτού του εξαμήνου θα μελετήσουμε *καμπύλες* (που αποτελούν παραδείγματα πολλαπλοτήτων διάστασης 1) και *επιφάνειες* (που αποτελούν παραδείγματα πολλαπλοτήτων διάστασης 2). Το μόνο που θα πούμε για τη γενική έννοια της πολλαπλότητας είναι ότι πολλαπλότητα είναι ένας χώρος που μόνο *τοπικά (locally)* μοιάζει με Ευκλείδειο χώρο αλλά *ολικά (globally)* δεν είναι Ευκλείδειος χώρος. Για παράδειγμα η γη που είναι πολλαπλότητα διάστασης 3, περίπου μια 3-διάστατη σφαίρα, τοπικά μοιάζει με Ευκλείδειο χώρο (κοιτάζοντας στον ορίζοντα νομίζουμε πως η γη είναι επίπεδη, αλλά δεν είναι)! Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να αναφέρουμε πως η διαφορική γεωμετρία ως κλάδος των μαθηματικών αλλά και η έννοια της πολλαπλότητας, προέκυψαν και από την πρακτική ανάγκη που είχαν οι θαλασσοπόροι (τουλάχιστον από την εποχή του Μαγγελάνου και μετά όταν δεν υπήρχε πλέον καμία αμφιβολία για το σφαιρικό σχήμα της γης), να προσδιορίζουν την θέση τους πάνω στην υδρόγειο. Άλλο βασικό παράδειγμα πολλαπλότητας είναι το ίδιο το σύμπαν: Η *Γενική Θεωρία Σχετικότητας (A. Einstein, 1915)* λέει πως και το σύμπαν αποτελεί πολλαπλότητα-όχι αναγκαστικά σφαίρα- διάστασης τέσσερα.

Είναι προφανής η χρησιμότητα της θεωρίας επιφανειών στους φοιτητές των διάφορων πολυτεχνικών σχολών. Οι τοπογράφοι λόγου χάριν που ασχολούνται με την χαρτογραφία έχουν ανάγκη την θεωρία επιφανειών διότι πολύ απλά η γη δεν είναι επίπεδη αλλά σφαιρική, οπότε η Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν είναι επαρκής. Πέρα όμως από τους φοιτητές του πολυτεχνείου, οι σημειώσεις αυτές απευθύνονται και σε φοιτητές μαθηματικών σχολών με ενδιαφέρον στην γεωμετρία, μιας και η θεωρία επιφανειών αποτελεί το κύριο μοντέλο για την μελέτη πολλαπλοτήτων διάστασης μεγαλύτερης από 2. Ταυτόχρονα όμως απευθύνονται και σε φοιτητές των φυσικών επιστημών: Ως πρώτο παράδειγμα αναφέρουμε ότι η θεωρία επιφανειών παίζει σημαντικότατο ρόλο σε μια ομαλή εισαγωγή στις βασικές έννοιες της Ρημάνειας Γεωμετρίας που χρησιμοποιούνται στην Γενική Θεωρία της Σετικότητας του A. Einstein που περιγράφει τις βαρυτικές δυνάμεις. Επιπλέον η θεωρία επιφανειών είναι πολύ σημαντική στην θεωρία υπερχορδών (αλλα και σε άλλες σύγχρονες θεωρίες ενοποίησης της φυσικής όπως οι θεωρίες μεμβρανών, η λεγόμενη M-Θεωρία κλπ), διότι οι υπερχορδες, ως γεωμετρικά αντικείμενα διάστασης 1, καθώς κινούναι στο χρόνο, διαγράφουν αυτό που λέμε *κοσμικό φύλλο (world sheet)* της υπερχορδής, κάτι που αποτελεί επιφάνεια (πολλαπλότητα διάστασης 2). (Το κοσμικό φύλλο χονδρικά αποτελεί το αντίστοιχο της τροχιάς (ή της λεγόμενης κοσμικής γραμμής) που διαγράφει ένα σημειακό σωμάτιο καθώς κινείται στην μεταβολή του χρόνου. Οι τροχιές των σημειακών σωματιδίων είναι φυσικά καμπύλες, δηλαδή πολλαπλότητες διάστασης 1).

Όσον αφορά την οργάνωση της ύλης, τα πρώτα 11 κεφάλαια αφορούν την θεωρία καμπυλών και τα υπόλοιπα 15 αφορούν την θεωρία επιφανειών. Δώσαμε ιδιαίτερη έμφαση στην τοπολογική κατηγοριοποίηση των επιφανειών (κεφάλαια 16 και 17) αλλά και στο Θεώρημα Gauss-Bonnet (κεφάλαιο 23), διότι η σημασία του στην Αλγεβρική Τοπολογία και στη Ολική Ανάλυση είναι κεφαλαιώδης. Αυτό οδήγησε και στο περίφημο *Θεώρημα Δείκτη (Θεώρημα Atiyah-Singer)* στα τέλη της δεκαετίας του 1960, που αναμφίβολα αποτελεί το πιο κομβικό θεώρημα των μαθηματικων στο δεύτερο μισό του 20ου αιώνα και που έχει αναρίθμητες εφαρμογές τόσο στα μαθηματικά αλλά και στην θεωρητική φυσική (για παράδειγμα στην διαγραφή των ανωμαλιών στις κβαντικές θεωρίες πεδίων). Για τον λόγο αυτό στο Θεώρημα Gauss-Bonnet αναφέρονται και οι τρεις γνωστές προσεγγίσεις υπολογισμού της χαρακτηριστικής Euler: μέσω του βασικού ορισμού με χρήση των τοπολογικών υποδιαιρέσεων, μέσω ροών διανυσματικών πεδίων αλλά και μέσω ροών διανυσματικών πεδίων που προκύπτουν ως βαθμίδα μιας βαθμωτής συνάρτησης (συνάρτηση Morse). Η τελευταία προσέγγιση είναι πολύ χρήσιμη για μια πιθανή μελλοντική μελέτη των φοιτητών σε πιο προχωρημένα θέματα της σύγχρονης γεωμετρίας, αναφέρουμε για παράδειγμα μια πιθανή εισαγωγή στην κλασική Θεωρία Morse της ολικής ανάλυσης αλλά και σε μελέτη *θεμάτων αιχμής* ερευνητικού επιπέδου τόσο των μαθηματικών, όπως της Θεωρίας *Donaldson-Floer* (που αποτελεί το μόνο γνωστό παράδειγμα επιτυχούς θεωρίας Morse σε πολλαπλότητες Banach άπειρης διάστασης στην γεωμετρία), όσο και της θεωρητικής φυσικής, όπως στις λεγόμενες *τοπολογικές κβαντικές θεωρίες πεδίων* των Witten, Kontsevich, Gromov. Καλύπτονται βέβαια και κλασικά θέματα που αφορούν την μετρική γεωμετρία των επιφανειών αλλά και των επιφανειών που είναι εμφυτευμένες στον χώρο $\mathbb{R}^3$. Υπάρχει επίσης και μια αναφορά σε βασικά θέματα της θεωρίας των μιγαδικών καμπυλών (επιφάνειες Ρήμαν, δηλαδή επιφάνειες εφοδιασμένες με μιγαδική δομή, θέμα ιδιαίτερα χρήσιμο τόσο στην μιγαδική ανάλυση αλλά και στην αλγεβρική γεωμετρία). Τέλος αναφέρουμε και τα βασικά στοιχεία της υπερβολικής γεωμετρίας. Στο Παράρτημα συγκεντρώσαμε διάφορους χρήσιμους ορισμούς που θα διευκολύνουν πιστεύουμε τους αναγνώστες στην μελέτη τους. Θα θέλαμε τέλος να επισημάνουμε πως οι παρούσες σημειώσεις καλύπτουν την βασική θεωρία των πολλαπλοτήτων διάστασης 1 και 2. Ενσωματώσαμε κάποιες εφαρμογές και παραδείγματα αλλά δεν υπάρχει μια εκτεταμένη λίστα λυμένων και άλυτων ασκήσεων. Αυτές ίσως εμφανιστούν στο μέλλον σε ένα ξεχωριστό τόμο.

Σημείωση 1: Υπάρχει και ένας τρίτος κλάδος της γεωμετρίας που ονομάζεται *μη-μεταθετική γεωμετρία* και που εμφανίστηκε πριν περίπου 10 χρόνια. Βασικός θεμελιωτής της είναι ο κορυφαίος Γάλλος μαθηματικός Alain Connes και ουσιαστικά γενικεύει και ενοποιεί τις άλλες δύο. Βασικό κίνητρο για την δημιουργία της μη-μεταθετικής γεωμετρίας είναι η κβαντική μηχανική της φυσικής.

2 Γραμμές και Καμπύλες

Υπάρχουν διάφορες προσεγγίσεις της έννοιας της *γραμμής* (line), (όχι κατ΄ ανάγκη της *ευθείας γραμμής*, μια γραμμή διαισθητικά μπορεί να είναι ευθεία, τεθλασμένη ή και καμπύλη), οι οποίες στις περισσότερες και πιο συνηθισμένες περιπτώσεις δίδουν το ίδιο περίπου αποτέλεσμα.

Ξεκινάμε με την έννοια της *γραμμής στο επίπεδο.*

2.1 Γραμμές του επιπέδου ως γραφικές παραστάσεις πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής

Συμβολίζουμε με $\mathbf{E}$ το σύνολο των σημείων του γεωμετρικού επιπέδου. Αν το εφοδιάσουμε με ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων Oxy, (όπου O η αρχή των συντεταγμένων, $x'x$ ο άξονας των τετμημένων και $y'y$ ο άξονας των τεταγμένων), τότε μπορούμε να *ταυτίσουμε* το σύνολο $\mathbf{E}$ με τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ (διάστασης 2), των *ελεύθερων διανυσμάτων του επιπέδου, ταυτίζοντας κάθε σημείο του γεωμετρικού επιπέδου με το διάνυσμα θέσης του εν λόγω σημείου* (υπενθυμίζουμε πως το *διάνυσμα θέσης* ενός σημείου ορίζεται ως το ελεύθερο διάνυσμα με αρχή το σημείο O της αρχής των αξόνων και πέρας το εν λόγω σημείο). Τα μοναδιαία διανύσματα στον άξονα των τετμημένων και στον άξονα των τεταγμένων αντίστοιχα, έχουν κατά τα γνωστά, καρτεσιανές συντεταγμένες $\hat{\imath} = (1,0)$ και $\hat{\jmath} = (0,1)$ και αποτελούν την λεγόμενη *συνήθη βάση* του $\mathbb{R}^2$. Εάν επιπρόσθετα ο πραγματικός δισδιάστατος διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^2$ είναι εφοδιασμένος με το γνωστό *Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο*,

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2,$$

όπου $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ με καρτεσιανές συντεταγμένες $\vec{x} = (x_1, x_2)$ και $\vec{y} = (y_1, y_2)$, τότε θα λέγεται *Ευκλείδειος χώρος* (διάστασης 2) και θα τον συμβολίζουμε με $\mathbb{E}^2$. Με την χρήση του εσωτερικού γινομένου μπορούμε να μιλάμε για *μήκη* διανυσμάτων (ή ισοδύναμα για *αποστάσεις* σημείων),

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

καθώς και για *γωνίες* μεταξύ διανυσμάτων,

$$\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}.$$

Προφανώς ως *σημειοσύνολα*, το σύνολο των σημείων του γεωμετρικού επιπέδου $\mathbf{E}$, ο πραγματικός διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^2$ και ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{E}^2$ *ταυτίζονται*. Συνήθως δεν θα είμαστε αυστηροί στην διάκριση αυτών των χώρων μεταξύ τους ούτε και στην διάκριση γενικότερα μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathbb{R}^n$ και των Ευκλείδειων χώρων $\mathbb{E}^n$. (Ψπενθυμίζουμε πως $\mathbb{E}^n$ είναι ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με το *Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο*).

Ορισμός 1. Ένα σύνολο Γ στο επίπεδο, (προφανώς ως σύνολα $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$), ονομάζεται *γράφημα* εάν υπάρχει μια διαφορίσιμη (ή και απλά συνεχής) συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού ένα κλειστό (ή ημι-ανοικτό ή ανοικτό) διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ που παίρνει πραγματικές τιμές, έτσι ώστε ένα σημείο του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y) να ανήκει στο σύνολο Γ εάν και μόνον εάν ισχύει ότι $x \in I$ και $y = f(x)$.

Διαισθητικά, όλα τα γραφήματα είναι γραμμές αλλά όχι κατ' ανάγκη ευθείες γραμμές, μπορεί να είναι τεθλασμένες ή και καμπύλες.

Ορισμός 2. Έστω $C \subset \mathbb{R}^2$ κάποιο τυχαίο υποσύνολο του επιπέδου. Ένα σημείο $p \in C$ λέγεται *απλό σημείο* εάν υπάρχει ανοικτός δίσκος $D(p, \epsilon)$ με κέντρο το σημείο p και ακτίνα ϵ, όπου ϵ κάποιος θετικός πραγματικός αριθμός, έτσι ώστε η τομή $D(p, \epsilon) \cap C$ να αποτελεί γράφημα. Προφανώς ο ανοικτός δίσκος $D(p, \epsilon)$ ορίζεται ως εξής: αν $p = (p_1, p_2)$ είναι οι συντεταγμένες του σημείου p, τότε $D(p, \epsilon) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - p_1)^2 + (y - p_2)^2 < \epsilon^2\}$.

Ορισμός 3. Το σύνολο C λέγεται *συνεκτικό* εάν δεν μπορεί να χωρισθεί σε δύο σύνολα με την ιδιότητα κάθε τελικό (ή οριακό) σημείο (βλέπε παράρτημα για τον ορισμό του οριακού σημείου στην Τοπολογία) του ενός να μην ανήκει στο άλλο. Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι το σύνολο C αποτελείται από ένα κομμάτι.

Ορισμός 4. Το σύνολο C του επιπέδου λέγεται *απλή γραμμή* εάν είναι συνεκτικό και αποτελείται μόνο από απλά σημεία.

Σημείωση 1: Αποδεικνύεται πως κάθε γράφημα είναι απλή γραμμή.

Σχόλιο 1: Είναι φανερό πως ο ορισμός του γραφήματος προέρχεται από την έννοια του γραφήματος (γραφική παράσταση) μιας συνάρτησης $y = f(x)$ στο επίπεδο που γνωρίζουμε από το γυμνάσιο. Οι διάφοροι ορισμοί που υπάρχουν στην βιβλιογραφία περί γραμμών διαφέρουν στο κατά πόσον μπορεί να περιέχουν και μη απλά σημεία. Θα ασχοληθούμε μόνο με απλές γραμμές στο παρόν μάθημα.

Μια απλή γραμμή μπορεί να έχει το πολύ μέχρι δύο *τελικά σημεία*.

($\star$) Μια απλή γραμμή με δύο τελικά σημεία έχει το σχήμα ενός (πιθανόν καμπυλωμένου) κλειστού διαστήματος $[a, b] \subset \mathbb{R}$ της πραγματικής ευθείας και θα λέγεται *(γεωμετρικά) κλειστή*.

($\star$) Μια απλή γραμμή με ένα τελικό σημείο έχει το σχήμα ενός (πιθανόν καμπυλωμένου) ημι-ανοικτού (ή ημι-κλειστού) διαστήματος της μορφής $(a, b] \subset \mathbb{R}$ ή $[a, b) \subset \mathbb{R}$ της πραγματικής ευθείας και θα λέγεται *(γεωμετρικά) ημι-κλειστή* (ή *(γεωμετρικά) ημι-ανοικτή*).

($\star$) Μια απλή γραμμή χωρίς τελικό σημείο έχει το σχήμα είτε ενός (πιθανόν καμπυλωμένου) ανοικτού διαστήματος της μορφής $(a, b) \subset \mathbb{R}$ της πραγματικής ευθείας οπότε και θα λέγεται *(γεωμετρικά) ανοικτή* είτε την μορφή ενός κύκλου οπότε θα λέγεται *(γεωμετρικά) κλειστή*.

Σχόλιο 2: Δυστυχώς η χρήση του όρου γεωμετρικά κλειστή απλή γραμμή σε δύο διαφορετικές περιπτώσεις αποτελεί ιστορικό κατάλοιπο της διεθνούς γεωμετρικής βιβλιογραφίας και απαιτείται προσοχή. Επίσης επισημαίνουμε πως η χρήση του όρου (γεωμετρικά) κλειστή και (γεωμετρικά) ανοικτή απλή γραμμή δεν ταυτίζεται κατ΄ ανάγκη με την έννοια (τοπολογικά) κλειστό και (τοπολογικά) ανοικτό σύνολο που εμφανίζεται στην τοπολογία (συγκεκριμένα στην συνήθη τοπολογία του επιπέδου που αναπτύσσουμε στο παράρτημα). Απαιτείται λοιπόν προσοχή και σε αυτό το σημείο. Η σχέση των εννοιών αυτών είναι η εξής: όλες οι απλές (γεωμετρικά) κλειστές γραμμές του επιπέδου, (και οι δύο περιπτώσεις), είναι (τοπολογικά) κλειστά σύνολα ως προς τη συνήθη τοπολογία του *επιπέδου*. Αντίθετα, καμία απλή γραμμή δεν είναι (τοπολογικά) ανοικτό σύνολο ως προς τη συνήθη τοπολογία του *επιπέδου* (όχι της ευθείας), (ούτε καν οι (γεωμετρικά) ανοικτές απλές γραμμές). Τέλος αποδεικνύεται ότι καμία απλή γραμμή δεν μπορεί να περιέχει ένα και μοναδικό εσωτερικό σημείο.

Σημείωση 2: Η παράσταση μιας γραμμής στο επίπεδο ως γραφική παράσταση μιας συνάρτησης της μορφής $y = f(x)$ λέγεται *Καρτεσιανή αναπαράσταση* της γραμμής.

2.2 Γραμμές του επιπέδου ως συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Ίσως ο πιο συνηθισμένος τρόπος για να ορίσουμε γραμμές στο επίπεδο είναι μέσω εξισώσεων της μορφής

$$F(x, y) = 0$$

όπου (x, y) καρτεσιανές συντεταγμένες του επιπέδου και F κάποια συνάρτηση των x, y. Η δήλωση ότι ένα σύνολο $L \subset \mathbb{R}^2$ ορίζεται μέσω της εξίσωσης $F(x, y) = 0$ σημαίνει ότι ένα σημείο $p \in \mathbb{R}^2$ με συνταταγμένες $p = (p_x, p_y) \in L \Leftrightarrow F(p_x, p_y) = 0$. Για να αποκτήσουμε εκπεφρασμένα γραμμές στο επίπεδο θα πρέπει φυσικά να επιβάλουμε περιορισμούς στην συνάρτηση F. Μια λογική απαίτηση είναι η F να είναι *συνεχής*. *Αποδεικνύεται πως εάν η F είναι συνεχής, τότε και μόνον τότε η εξίσωση $F(x, y) = 0$ ορίζει γραμμές που είναι (τοπολογικά) κλειστά σύνολα ως προς την συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}^2$.* (Η πρόταση αυτή ισχύει γενικότερα και για οποιαδήποτε τοπολογία του επιπέδου που προέρχεται από μια μετρική). Εάν η F δεν είναι συνεχής, τότε η εξίσωση $F(x, y) = 0$ ορίζει ένα οποιοδήποτε σύνολο του επιπέδου, για παράδειγμα εάν A ένα τυχαίο υποσύνολο του επιπέδου, θέτουμε $F := 1 - \chi$, όπου χ η χαρακτηριστική συνάρτηση του A, δηλαδή η συνάρτηση που παίρνει την τιμή 1 στα σημεία του επιπέδου που ανήκουν στο A και 0 στα υπόλοιπα.

Ορισμός 1. Ένα σημείο σε ένα υποσύνολο L του επιπέδου που ορίζεται μέσω μιας εξίσωσης της μορφής $F(x, y) = 0$ με F συνεχή, θα λέγεται *μη-εκφυλισμένο* εάν σε αυτό το σημείο υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι

$$F_x := \frac{\partial F}{\partial x}$$

και

$$F_y := \frac{\partial F}{\partial y}$$

της F, οι F_x και F_y είναι συνεχείς και τουλάχιστον μια εξ αυτών είναι μη-μηδενική. Τα σημεία που δεν είναι μη-εκφυλισμένα λέγονται εκφυλισμένα (singular).

Από το Θεώρημα της Υπονοούμενης Συνάρτησης της Ανάλυσης (implicit function theorem) προκύπτει ότι στη γειτονιά κάθε μη-εκφυλισμένου σημείου κάθε σύνολο της παραπάνω μορφής αποτελεί γράφημα, δηλαδή *κάθε μη-εκφυλισμένο σημείο είναι απλό σημείο.* (Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει).

Έπεται από τα παραπάνω πως το σύνολο των μη-εκφυλισμένων σημείων κάθε συνόλου που ορίζεται από μια εξίσωση της μορφής $F(x, y) = 0$ όπου

F συνεχής, είναι μια ένωση απλών γραμμών (οι οποίες γενικά ενώνονται σε εκφυλισμένα σημεία). Εάν λοιπόν το σύνολο των μη-εκφυλισμένων σημείων είναι πεπερασμένο, τότε το παραπάνω σύνολο ανταποκρίνεται αρκετά καλά στην διαισθητική εικόνα μιας γραμμής. Εάν όμως το πλήθος των μη εκφυλισμένων σημείων είναι άπειρο, τότε η κατάσταση είναι αρκετά διαφορετική, όπως μας λέει το παρακάτω γενικό θεώρημα (που το δίδουμε χωρίς απόδειξη, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να κοιτάξει στην βιβλιογραφία, για παράδειγμα [20] σελίδα 20):

Θεώρημα 1. (Θεώρημα Whitney). Για κάθε (τοπολογικά) *κλειστό* υποσύνολο $C \subset \mathbb{R}^n$ του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$ (ως προς την συνήθη τοπολογία), υπάρχει *λεία* συνάρτηση F τέτοια ώστε $p \in C \Leftrightarrow F(p) = 0$.

Σημείωση 1: Η παράσταση μιας γραμμής στο επίπεδο με τη μορφή μιας εξίσωσης της μορφής $F(x, y) = 0$ λέγεται *αναλυτική αναπαράσταση* της γραμμής.

Παρατήρηση 1: Είναι σαφές πως κάθε γράφημα $y = f(x)$ μιας γραμμής στο επίπεδο δίδει πάντοτε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών της μορφής $F(x, y) = 0$ εάν απλά θέσουμε $F(x, y) := f(x) - y = 0$. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα και απαιτεί την χρήση *θεωρίας πεπλεγμένων συναρτήσεων*. Ειδικότερα, θα λέμε ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ με πεδίο ορισμού κάποιο $A \subset \mathbb{R}$ *βρίσκεται υπό πεπλεγμένη μορφή στην (αναλυτική) εξίσωση* $F(x, y) = 0$, όπου $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, εάν $(x, f(x)) \in D$ και επιπρόσθετα εάν ισχύει ότι $F(x, f(x)) = 0, \forall x \in A$.

Για την ύπαρξη πεπλεγμένων συναρτήσεων ισχύει το παρακάτω Θεώρημα από την ανάλυση (για την απόδειξη παραπέμπουμε σε ένα καλό βιβλίο ανάλυσης):

Θεώρημα 2. (Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων). Έστω $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνάρτηση τάξης τουλάχιστον C^1 (δηλαδή υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της F και είναι συνεχείς) και έστω ότι σε κάποιο σημείο $(x_0, y_0) \in D$ ισχύουν οι σχέσεις $F(x_0, y_0) = 0$ και $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Τότε υπάρχει ανοικτό διάστημα $J = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset \mathbb{R}$, όπου ϵ κάποιος θετικός πραγματικός αριθμός, καθώς και *μοναδική συνάρτηση* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ επίσης τάξης C^1 στο A, η οποία βρίσκεται υπό πεπλεγμένη μορφή στην εξίσωση $F(x, f(x)) = 0, \forall x \in J$, με $y_0 = f(x_0)$ και της οποίας η πρώτη παράγωγος δίδεται από τη σχέση

$$f'(x) = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}|_{(x, f(x))}.$$

Επιλύοντας την παραπάνω διαφορική εξίσωση βρίσκουμε την ζητούμενη συνάρτηση $f(x)$.

Σημείωση 2: Τόσο η καρτεσιανή όσο και η αναλυτική αναπαράσταση γραμμών γενικεύονται κατάλληλα για γραμμές στον τρισδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$ αλλά και γενικά για γραμμές στον χώρο διάστασης n που είναι ο $\mathbb{R}^n$. Δεν θα επεκταθούμε περισσότερο στους δύο αυτούς τρόπους αναπαράστασης γραμμών διότι αυτοί είθισται να μελετώνται στα πλαίσια ενός μαθήματος διανυσματικής ανάλυσης ή/και αναλυτικής γεωμετρίας. Στο συγκεκριμένο μάθημα θα ασχοληθούμε κυρίως με έναν τρίτο τρόπο αναπαράστασης γραμμών που είναι η λεγόμενη *παραμετρική αναπαράσταση*, τρόπο που προσφέρει αρκετά πλεονεκτήματα σε σχέση με τους άλλους δύο που είδαμε παραπάνω (την καρτεσιανή και αναλυτική αναπαράσταση γραμμών).

2.3 Καμπύλες στον Χώρο και Μοναδιαίο Εφαπτόμενο Διάνυσμα

Μια τρίτη προσέγγιση στην έννοια της γραμμής είναι αυτή του Γάλλου μαθηματικού Marie Ennemond Camille JORDAN (1838-1922) που γεννήθηκε στην πόλη Λυών της Γαλλίας. Η προσέγγιση αυτή βασίζεται στη φυσική, σύμφωνα με την οποία μια γραμμή είναι η *τροχιά* ενός κινούμενου σημείου στο επίπεδο ή στον χώρο. Οι γραμμές με την έννοια του Jordan θα λέγονται *καμπύλες* (curves). Αυτή η προσέγγιση θα μας απασχολήσει κυρίως σε αυτό το μάθημα.

Ορισμός 1. Μια *καμπύλη* στον χώρο δίδεται μέσω μιας συνεχούς διανυσματικής συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής

$$\vec{r}(t) : I \to \mathbb{R}^3$$

με $t \in I$, όπου $I \subset \mathbb{R}$ κάποιο κλειστό (ή ανοικτό ή ημι-ανοικτό) διάστημα της πραγματικής ευθείας.

Παρατήρηση 1: Εξ ορισμού, κάθε καμπύλη διαθέτει μια *φορά διαγραφής*, η οποία προκύπτει από την φυσική διάταξη του διαστήματος I που αποτελεί το πεδίο ορισμού μιας καμπύλης. Είναι η φορά του $\vec{r}(t)$ καθώς το t αυξάνει.

Παρατήρηση 2: Ο παραπάνω ορισμός γενικεύεται άμεσα και μπορούμε να ορίσουμε καμπύλες στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ θεωρώντας συνεχείς απεικονίσεις μιας πραγματικής μεταβλητής της μορφής

$$\vec{r}(t) : I \to \mathbb{R}^n$$

με $t \in I$, όπου $I \subset \mathbb{R}$ κάποιο κλειστό (ή ανοικτό ή ημι-ανοικτό) διάστημα της πραγματικής ευθείας.

Εάν ο χώρος $\mathbb{R}^3$ είναι εφοδιασμένος με ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $Oxyz$, τότε η καμπύλη θα δίδεται από τις συνεχείς συναρτήσεις

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

οι οποίες λέγονται *παραμετρικές εξισώσεις* της καμπύλης. Οι παραμετρικές εξισώσεις θα γράφονται και με την μορφή $\vec{r}(t) = x^i(t)$, με $i = 1, 2, 3$, όπου φυσικά x^i είναι οι συντεταγμένες της συνάρτησης $\vec{r}$. Η μεταβλητή t λέγεται *παράμετρος* της καμπύλης.

Παρατήρηση 3: *Σημειώνουμε με έμφαση πως οι καμπύλες δεν είναι απλά σημειοσύνολα* (όπως οι γραμμές που ορίσαμε πιο πάνω) *αλλά απεικονίσεις.*

Στην πράξη βέβαια συχνά βολεύει να θεωρούμε και τις καμπύλες σαν να είναι απλά σύνολα, *ουσιαστικά δηλαδή τις ταυτίζουμε με το πεδίο τιμών τους*, που προφανώς, εξ ορισμού, είναι κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$. Για παράδειγμα $\forall t \in I$, ένα σημείο $p = \vec{r}(t) = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ θα λέγεται ένα σημείο της καμπύλης που αντιστοιχεί στην τιμή της παραμέτρου t ή ισοδύναμα θα λέμε πως για την τιμή t της παραμέτρου η καμπύλη διέρχεται από το σημείο p. Εάν το διάστημα $I = [a, b]$ είναι κλειστό, τότε τα σημεία $\vec{r}(a)$ και $\vec{r}(b)$ θα λέγονται *τελικά σημεία* της καμπύλης. Ισοδύναμα θα λέμε πως η καμπύλη ενώνει το σημείο $\vec{r}(a)$ με το σημείο $\vec{r}(b)$.

Εάν $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ τότε η καμπύλη μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνεχής απεικόνιση ενός κύκλου και θα λέγεται *κλειστή*. Σε όποια περίπτωση χρειαστεί να τονίσουμε τη διαφορά μεταξύ μιας καμπύλης και του σημειοσυνόλου που αυτή ορίζει, θα χρησιμοποιούμε τους όρους καμπύλη και *υποστήριγμα* (support) μιας καμπύλης. *Προφανώς το υποστήριγμα μιας καμπύλης είναι το πεδίο τιμών της καμπύλης*. Γενικά το υποστήριγμα μιας καμπύλης μπορεί να διαφέρει αρκετά από τη διαισθητική εικόνα που έχουμε για τις γραμμές, για παράδειγμα οι καμπύλες Peano που γεμίζουν το επίπεδο.

Ορισμός 2. Μια καμπύλη ονομάζεται *απλή* εάν η απεικόνιση

$$\vec{r}(t) : I \to \mathbb{R}^3$$

όπου $t \in I$, είναι 1-1 και μονομορφική. Υπενθυμίζουμε πως μια απεικόνιση όπως η $\vec{r}$ παραπάνω λέγεται μονομορφική εάν για μια ακολουθία σημείων $\{t_m\}$ στο διάστημα I, υπάρχει ένα σημείο $\tau \in I$ τέτοιο ώστε $\lim \vec{r}(t_m) = \vec{r}(\tau)$, τότε έπεται ότι και $\lim t_m = \tau$. Μια κλειστή καμπύλη ονομάζεται απλή εάν $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$ για $t_1 < t_2$ εάν και μόνον εάν $t_1 = a$ και $t_2 = b$, όπου $I = [a, b]$.

Παράδειγμα 1: Τυπικό παράδειγμα μιας καμπύλης που είναι 1-1 αλλά δεν είναι μονομορφική είναι το *κομμένο φύλλο Descartes* στο επίπεδο, με παραμετρική αναπαράσταση

$$\vec{r}(t) = (\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}),$$

όπου $t \in (-1, +\infty)$. Αποδεικνύεται ότι εάν το πεδίο ορισμού μιας καμπύλης είναι ένα κλειστό διάστημα της μορφής $I = [a, b]$, τότε κάθε απεικόνιση $\vec{r}(t) : I \to \mathbb{R}^3$ που είναι 1-1 είναι και μονομορφική.

Ορισμός 3. Τα υποστηρίγματα απλών καμπυλών ονομάζονται *απλά τόξα*.

Αποδεικνύεται ότι τα απλά τόξα δεν έχουν εσωτερικά σημεία. Η απόδειξη είναι δύσκολη και προκύπτει από την αναλλοιότητα της (τοπολογικής) διάστασης κάτω από ομοιομορφισμούς (ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να δει την αναφορά [20]).

Ορισμός 4. Έστω μια συνεχής απεικόνιση $\vec{r}(t) : I \to \mathbb{R}^3$ που ορίζει μια καμπύλη στο χώρο. Εάν υπάρχουν σημεία $t_1, t_2 \in I$, με $t_1 \neq t_2$ τέτοια ώστε $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$, τότε το σημείο αυτό της καμπύλης λέγεται *πολλαπλό σημείο* της καμπύλης. Φανερά αυτά είναι σημεία που η απεικόνιση $\vec{r}$ δεν είναι 1-1. Τα απλά τόξα (ή οι απλές καμπύλες) δεν έχουν πολλαπλά σημεία εξ ορισμού. Με κατάλληλο περιορισμό του πεδίου ορισμού βέβαια (σε γειτονιές των σημείων $t_1, t_2 \in I$), η απεικόνιση $\vec{r}(t)$ γίνεται τοπικά 1-1.

Ορισμός 5. Μια καμπύλη ονομάζεται *τάξης* C^k, όπου k κάποιος μημηδενικός φυσικός αριθμός, εάν η απεικόνιση $\vec{r}(t) : I \to \mathbb{R}^3$ είναι τάξης C^k, δηλαδή εάν η απεικόνιση $\vec{r}(t) : I \to \mathbb{R}^3$ έχει συνεχείς παραγώγους τάξης $\leq k$. Εάν $k = \infty$, τότε η καμπύλη λέγεται *λεία*.

Ορισμός 6. Οι παράγωγοι

$$x^i(t)' := \frac{dx^i(t)}{dt}$$

(όπου $i = 1, 2, 3$), είναι οι συντεταγμένες της διανυσματικής συνάρτησης

$$\vec{r'}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$$

η οποία λέγεται *εφαπτομένη της καμπύλης* στο t.

Ορισμός 7. Ορίζουμε το *μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα* της καμπύλης $\vec{r}(t) : I \to \mathbb{R}^3$ στο σημείο t, το οποίο θα συμβολίζουμε με $\vec{t}$, ως εξής:

$$\vec{t} := \frac{\vec{r'}(t)}{|\vec{r'}(t)|}$$

Προφανώς το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα μιας καμπύλης μπορεί να μεταβάλλεται σε κάθε σημείο της, για την ακρίβεια αυτό που μπορεί να μεταβάλλεται είναι η *διεύθυνσή του* διότι το μέτρο του είναι πάντα εξ ορισμού ίσο με την μονάδα.

Ορισμός 8. Ονομάζουμε *εφαπτόμενη ευθεία* της καμπύλης $\vec{r}(t) : I \to \mathbb{R}^3$ στο σημείο $t \in I$ τον φορέα του εφαπτόμενου διανύσματος της καμπύλης στο σημείο t. Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο t είναι

$$\vec{R}(t) = \vec{r}(t) + \lambda \vec{r'}(t),$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 9. Ονομάζουμε *κάθετο επίπεδο* της καμπύλης $\vec{r}(t) : I \to \mathbb{R}^3$ στο σημείο $t \in I$, το επίπεδο στο οποίο το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{t}$ (ή ισοδύναμα το εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{r'}(t)$) της καμπύλης είναι κάθετα. Η εξίσωση του κάθετου επιπέδου στο σημείο t της καμπύλης είναι

$$[\vec{R}(t) - \vec{r}(t)] \cdot \vec{r'}(t) = 0.$$

Πρόταση 1. Μια καμπύλη είναι ευθεία εάν και μόνον εάν το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα έχει σταθερή διεύθυνση.

Απόδειξη: Προφανής. Μια χρήσιμη μορφή της παραπάνω πρότασης είναι η εξής: μια καμπύλη $\vec{r}(t)$ είναι ευθεία εάν και μόνον εάν ισχύει ότι $\vec{r'}(t) = \phi(t)\vec{a}$, όπου $\phi(t)$ κάποια βαθμωτή (όχι διανυσματική) συνάρτηση του t και $\vec{a}$ κάποιο σταθερό διάνυσμα. Δηλαδή το εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{r'}(t)$ της καμπύλης έχει σταθερή διεύθυνση (είναι πάντα συγγραμμικό με κάποιο σταθερό διάνυσμα $\vec{a}$).

Παρατήρηση 4: Συνήθως θα θεωρούμε λείες καμπύλες. Ακόμη όμως και αν η καμπύλη δεν είναι λεία, δεν θα αναφερόμαστε συγκεκριμένα στην τάξη διαφορισιμότητας αυτής την οποία πάντα θα την θεωρούμε *αρκούντως μεγάλη*.

Παρατήρηση 5 (α): Εάν το πεδίο ορισμού I έχει τελικά σημεία, τότε μια καμπύλη θα λέγεται λεία εάν αποτελεί το σύνορο μιας λείας καμπύλης με πεδίο ορισμού κάποιο ανοικτό διάστημα $I' \supset I$.
Παρατήρηση 5 (β): Μια κλειστή καμπύλη θα λέγεται λεία εάν επιπρόσθετα οι μονόπλευρες παράγωγοι στα σημεία $t = a$ και $t = b$ ταυτίζονται.

Παρατήρηση 6: Από το Θεώρημα Sard προκύπτει ότι το υποστήριγμα μιας λείας καμπύλης δεν έχει εσωτερικά σημεία (βλέπε [20], σελίδα 260).

Παράδειγμα 2: Μια λεία καμπύλη μπορεί να έχει σπασμένα κομμάτια, για παράδειγμα η καμπύλη του επιπέδου με παραμετρική παράσταση

$$\vec{r}(t) = (\alpha(t), \alpha(-t)),$$

με $t \in (-\infty, +\infty)$, και όπου

$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & \text{εάν} \quad t > 0, \\ 0, & \text{εάν} \quad t \leq 0. \end{cases}$$

Η παραπάνω συνάρτηση έχει υποστήριγμα που απαρτίζεται από τους δύο θετικούς ημιάξονες των Καρτεσιανών Συντεταγμένων του επιπέδου, τον ημιάξονα $x = 0, y \geq 0$ (ημιάξονας Oy) και τον ημιάξονα $x \geq 0, y = 0$ (ημιάξονα Ox).

Ορισμός 10. Μια καμπύλη λέγεται *κανονική (regular)* στο σημείο t_0, εάν υπάρχει η εφαπτομένη στο εν λόγω σημείο και είναι μη-μηδενική, δηλαδή εάν $\vec{r'}(t_0) \neq 0$. Αυτό σημαίνει πως είναι μη-μηδενική τουλάχιστον μια από τις παραγώγους

$$x^i(t_0)' := \frac{dx^i(t)}{dt}|_{(t=t_0)},$$

όπου $i = 1, 2, 3$ και $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x^i(t)$, με $i = 1, 2, 3$, η παραμετρική παράσταση της καμπύλης (θεωρώντας Καρτεσιανές Συντεταγμένες). Το σημείο t_0 λέγεται *κανονικό* σημείο της καμπύλης. Στην αντίθετη περίπτωση λέγεται *ανώμαλο ή ιδιάζον* σημείο. Μια καμπύλη λέγεται *κανονική* εάν είναι κανονική σε όλα τα σημεία της.

Παράδειγμα 3: Η καμπύλη του Παραδείγματος 2 δεν είναι κανονική στο σημείο που σπάζει (που είναι το σημείο O, η αρχή των αξόνων).

Σημείωση 1: Είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε πως γίνεται η μετάβαση από έναν τρόπο αναπαράστασης μιας γραμμής σ΄ έναν άλλο. Στην Παρατήρηση

2.2.1 περιγράψαμε πώς γίνεται η μετάβαση απο την αναλυτική στην καρτεσιανή αναπαράσταση. Εδώ θα περιγράψουμε σύντομα πώς γίνεται η μετάβαση για παράδειγμα από την καρτεσιανή στην παραμετρική αναπαράσταση. Μια γραμμή του επιπέδου με καρτεσιανή αναπαράσταση $y = f(x)$ έχει παραμετρική αναπαράσταση $\vec{r}(t) = (t, f(t), 0)$. Για να πάμε από την παραμετρική αναπαράσταση στην καρτεσιανή πρέπει να απαλείψουμε τη μεταβλητή t μεταξύ των παραμετρικών εξισώσεων, μια διαδικασία που μπορεί να είναι αρκετά περίπλοκη.

3 Ισοδυναμία Καμπυλών και Παραδείγματα

3.1 Κλάσεις Ισοδυναμίας Καμπυλών

Ορισμός 1. Δύο καμπύλες $\vec{r_1}(t) : I_1 \to \mathbb{R}^3$ και $\vec{r_2}(t) : I_2 \to \mathbb{R}^3$, όπου τα διαστήματα $I_1 \subset \mathbb{R}$ και $I_2 \subset \mathbb{R}$ είναι το ιδίου τύπου (δηλαδή και τα δύο είναι ανοικτά ή και τα δύο είναι ημιανοικτά ή και τα δύο είναι κλειστά), ονομάζονται *ισοδύναμες* εάν υπάρχει συνάρτηση

$$\phi : I_2 \to I_1$$

με τις εξής ιδιότητες:
$*$ η ϕ είναι λεία
$*$ η ϕ είναι επί
$*$ η παράγωγος της ϕ είναι παντού μη-μηδενική
$*$ ισχύει $\vec{r_2} = \vec{r_1} \circ \phi$, δηλαδή $\vec{r_2}(t_2) = \vec{r_1}(\phi(t_2)), \forall t_2 \in I_2$. Ισοδύναμα λέμε ότι η συνάρτηση ϕ επιφέρει μια *αλλαγή παραμέτρου* στην καμπύλη $\vec{r_1}$.

Σημείωση 1: Ο παραπάνω ορισμός χωρίζει το σύνολο των καμπυλών του χώρου σε *κλάσεις ισοδυναμίας*. Κάθε κλάση ισοδυναμίας λέγεται *απαραμέτρητη καμπύλη*. Συχνά για να τονίσουμε τη διαφορά μεταξύ καμπυλών και απαραμέτρητων καμπυλών (οι οποίες είναι κλάσεις ισοδυναμίας καμπυλών), οι πρώτες λέγονται *παραμετρημένες καμπύλες*. Προφανώς μια απαραμέτρητη καμπύλη αποτελείται από όλες τις καμπύλες που είναι ισοδύναμες με μια δοσμένη παραμετρημένη καμπύλη.

Ορισμός 2. Μια απαραμέτρητη καμπύλη λέγεται *λεία, απλή ή κανονική* εάν είναι η κλάση ισοδυναμίας μιας λείας, απλής ή κανονικής καμπύλης αντίστοιχα. Ο παραπάνω ορισμός είναι σωστός διότι αποδεικνύεται εύκολα πως μια καμπύλη που είναι ισοδύναμη με μια λεία, απλή ή κανονική καμπύλη, τότε είναι και αυτή επίσης λεία, απλή ή κανονική καμπύλη αντίστοιχα.

Παρατήρηση 1: Ισοδύναμες καμπύλες έχουν το ίδιο υποστήριγμα, που λέγεται *υποστήριγμα της απαραμέτρητης καμπύλης*, δηλαδή ισοδύναμες μεταξύ τους καμπύλες ταυτίζονται ως σημειοσύνολα, (που είναι προφανώς υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$). *Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει.* Ισχύει όμως το παρακάτω:

Πρόταση 1. *Δύο καμπύλες που είναι και οι δύο απλές και κανονικές, έχουν το ίδιο υποστήριγμα εάν και μόνον εάν είναι ισοδύναμες.*

Απόδειξη : Η απόδειξη στηρίζεται στο Θεώρημα της Αντίστροφης Συνάρτησης της διανυσματικής ανάλυσης. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο [20], σελίδα 31.

Η Πρόταση 1 σημαίνει πως οι απλές κανονικές καμπύλες ορίζονται μονοσήμαντα (ακριβέστερα η κλάση ισοδυναμίας τους ορίζεται μονοσήμαντα) από τα υποστηρίγματά τους, οπότε και μπορούν να ταυτισθούν με αυτά. Αυτά τα υποστηρίγματα λέγονται *κανονικά απλά τόξα*. Μια κανονική απλή καμπύλη της οποίας το υποστήριγμα είναι ένα κανονικό απλό τόξο A, θα λέγεται *μια παραμέτρηση του* A. Θα ταυτίζουμε συνήθως τα κανονικά απλά τόξα με τις παραμετρήσεις τους (ακριβέστερα με τις κλάσεις ισοδυναμίας των παραμετρήσεών τους).

3.2 Παραδείγματα Καμπυλών

Σε αυτή την παράγραφο θα αναφέρουμε ορισμένα παραδείγματα γνωστών καμπυλών.

1. Τρεις ισοδύναμες παραμετρικές παραστάσεις του *ευθύγραμμου τμήματος* OA του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένου με ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων Oxy, όπου το σημείο A έχει συντεταγμένες $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, είναι οι εξής:
(α). $\vec{r}(t) = (t, t)$, με $t \in [0, 1]$.
(β). $\vec{r}(t) = (\sin t, \sin t)$, με $t \in [0, \pi/2]$.
(γ). $\vec{r}(t) = (1 - t, 1 - t)$, με $t \in [0, 1]$.

2. Η παραμετρική παράσταση ενός *κύκλου* του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένου με ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων Oxy, με κέντρο την αρχή των αξόνων O και ακτίνα a, είναι η εξής:

$$\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t),$$

όπου $t \in [0, 2\pi]$.

3. Η παραμετρική παράσταση της *κυκλοειδούς έλικας* με ακτίνα a και βήμα $2\pi b$ του χώρου $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένου με ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $Oxyz$, είναι η εξής:

$$\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt),$$

όπου $t \in [0, 2\pi]$. Η κυκλοειδής έλικα είναι *δεξιόστροφη* εάν $b > 0$ και *αριστερόστροφη* εάν $b < 0$.

Τα τρία παραδείγματα παραπάνω αφορούν κανονικές καμπύλες.

4. Μια επίπεδη καμπύλη με Καρτεσιανή αναπαράσταση $y = f(x)$, έχει παραμετρική αναπαράσταση στο χώρο $\mathbb{R}^3$ (εφοδιασμένο με ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $Oxyz$), $\vec{r}(t) = (t, f(t), 0)$. Για παράδειγμα η παραβολή $y = ax^2$ έχει παραμετρική αναπαράσταση στο χώρο $\vec{r}(t) = (t, at^2, 0)$.

5. Η γνωστή μας *έλλειψη* του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένου με ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων Oxy και με Καρτεσιανή αναπαράσταση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

έχει παραμετρική παράσταση στο χώρο $\mathbb{R}^3$ (εφοδιασμένο με ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $Oxyz$)

$$\vec{r}(t) = (a\cos t, b\sin t, 0),$$

όπου $t \in [0, 2\pi]$.

6. Η γνωστή μας *υπερβολή* του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένου με ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων Oxy και με Καρτεσιανή αναπαράσταση

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

έχει παραμετρική παράσταση στο χώρο $\mathbb{R}^3$ (εφοδιασμένο με ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $Oxyz$)

$$\vec{r}(t) = (\pm\frac{a}{\cos t}, \pm\frac{b}{\tan t}, 0),$$

όπου $t \in [0, \pi/2]$. (Τα πρόσημα αφορούν τους 4 κλάδους της υπερβολής).

4 Μήκος Καμπύλης και Φυσική Παράμετρος

4.1 Βασικοί Ορισμοί

Ταυτίζουμε τα σημεία του χώρου με τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{E}^3$ διάστασης 3.

Ορισμός 1. Για κάθε λεία καμπύλη του χώρου

$$\vec{r}(t) : I \to \mathbb{E}^3$$

ορίζουμε τη συνάρτηση

$$t \mapsto |\vec{r'}(t)| = |\frac{d\vec{r}(t)}{dt}|$$

με $t \in I$. Η συνάρτηση αυτή δίδει *το μήκος του εφαπτόμενου διανύσματος* σε κάθε σημείο της καμπύλης και είναι προφανές από τον ορισμό ότι η συνάρτηση αυτή είναι *συνεχής*, οπότε εάν υποθέσουμε ότι $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, τότε μπορούμε να ορίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$s := \int_a^b |\vec{r'}(t)| dt.$$

Όπως προκύπτει απο την ανάλυση, το παραπάνω ολοκλήρωμα δίδει το όριο του μήκους των τεθλασμένων γραμμών που αποτελούν προσέγγιση της καμπύλης, ή με άλλα λόγια το παραπάνω ολοκλήρωμα δίδει το *μήκος της καμπύλης*.

Ορισμός 2. Έστω $I \subset \mathbb{R}$ κάποιο τυχαίο διάστημα και έστω $t_0 \in I$. Τότε η σχέση

$$s(t) := \int_{t_0}^t |\vec{r'}(t)| dt,$$

όπου $t \in I$, ορίζει μια λεία συνάρτηση από το διάστημα I σε κάποιο διάστημα J του s-άξονα το οποίο περιέχει το σημείο 0. Αυτή η συνάρτηση $s(t)$ λέγεται *μήκος τόξου* της καμπύλης. Παρατηρήστε πώς με τον παραπάνω ορισμό το μήκος τόξου μπορεί να λάβει και αρνητικές τιμές όχι επειδή το εφαπτόμενο διάνυσμα έχει αρνητικό μήκος αλλά λόγω της φοράς διαγραφής του διαστήματος I.

Στη συνέχεια θα δούμε γιατί η παραπάνω έκφραση δίδει το μήκος μιας καμπύλης. Έστω λοιπόν $\vec{r}(t) : I \to \mathbb{E}^3$ μια καμπύλη στο χώρο με $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Συμβολίζουμε με $C \subset \mathbb{E}^3$ το υποστήριγμα της καμπύλης αυτής. Θεωρούμε μια διαμέριση $\Delta_1 : a < t_0 < t_1 < ... < t_n < b$ του κλειστού διαστήματος $I = [a, b]$. Η διαμέριση αυτή ορίζει μια ακολουθία σημείων του $\mathbb{R}^3$ με διανύσματα θέσης:

$$\vec{r_0} = \vec{r}(t_0), \vec{r_1} = \vec{r}(t_1), \vec{r_2} = \vec{r}(t_2), ..., \vec{r_n} = \vec{r}(t_n)$$

Εάν ενώσουμε αυτά τα σημεία παίρνουμε ένα προσεγγιστικό πολυγωνικό τόξο P_1 της C. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων $\vec{r_{i-1}}$ και $\vec{r_i}$, όπου $i = 0, 1, 2, ..., n$, είναι

$$|\vec{r_i} - \vec{r_{i-1}}| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2},$$

όπου $\vec{r_i} = (x_i, y_i, z_i)$ οι Καρτεσιανές Συντεταγμένες του σημείου με διάνυσμα θέσης $\vec{r_i}$. Συνεπώς το μήκος της προσεγγιστικής πολυγωνικής P_1 της C θα είναι

$$s(P_1) = \sum_{i=1}^{n} |\vec{r_i} - \vec{r_{i-1}}|$$

Παίρνοντας μια λεπτότερη διαμέριση Δ_2 του διαστήματος I, με τον ίδιο τρόπο θα καταλήξουμε σε μια πολυγωνική γραμμή P_2 που θα έχει μήκος $s(P_2) > s(P_1)$ (αυτή είναι μια χαρακτηριστική ιδιότητα των Ευκλείδειων χώρων που απορρέει από την χρήση του Ευκλείδειου εσωτερικού γινομένου: Κάθε κυρτή πολυγωνική γραμμή έχει μικρότερο μήκος από κάθε άλλη που την περιβάλλει, για παράδειγμα αναφέρουμε τη γνωστή μας τριγωνική ανισότητα, το μήκος μιας πλευράς ενός τριγώνου είναι μικρότερο από το άθροισμα των άλλων δύο).

Παίρνοντας συνεχώς λεπτότερες διαμερίσεις του διαστήματος I, το μήκος τόξου της C προκύπτει από το ελάχιστο άνω φράγμα (supremum) των μηκών των αντίστοιχων με τις διαμερίσεις προσεγγιστικών πολυγωνικών γραμμών. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει το σύνολο των μηκών των προσεγγιστικών πολυγωνικών γραμμών να είναι *άνω φραγμένο*. Στην περίπτωση αυτή η καμπύλη (ή το τόξο) θα λέγεται *υπολογίσιμο*.

[**Υπενθύμιση:** Ένα σύνολο S πραγματικών αριθμών (προφανώς $S \subset \mathbb{R}$) λέγεται *άνω φραγμένο* εάν $\exists m \in \mathbb{R} | x \leq m, \forall x \in S$. Το m λέγεται *άνω φράγμα* του συνόλου S. Εάν m είναι ένα άνω φράγμα του S, τότε προφανώς και κάθε $\mathbb{R} \ni l \geq m$ θα είναι επίσης ένα άνω φράγμα του S. Βασική ιδιότητα των πραγματικών αριθμών είναι το γεγονός ότι εάν το σύνολο $S \subset \mathbb{R}$ έχει άνω φράγμα, έστω m, τότε θα έχει και *ελάχιστο άνω φράγμα (supremum)*].

Χωρίς να αναφέρουμε όλες τις λεπτομέρειες της ανάλυσης και της θεωρίας μέτρου, καταλαβαίνει κανείς πως η βέλτιστη προσέγγιση επιτυγχάνεται στο όριο όταν $n \to \infty$, δηλαδή εάν πάρουμε άπειρο πλήθος ενδιαμέσων σημείων στο διάστημα I. Αυτή η περίπτωση δίδει οριακά τη λεπτότερη διαμέριση του διαστήματος I. Τότε δύο διαδοχικά σημεία θα απέχουν *απειροστή απόσταση* ds, οπότε θα πάρουμε

$$ds = \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2} = \sqrt{\vec{r'}(t)\vec{r'}(t)} = |\vec{r'}(t)|.$$

Οπότε για να πάρουμε το μήκος τόξου της C απλά ολοκληρώνουμε

$$s(C) = \int_a^b |\vec{r'}(t)|dt.$$

Υπενθυμίζουμε επίσης από την ανάλυση πως το μήκος τόξου της C σαν συνάρτηση της παραμέτρου t δίδεται από τη σχέση

$$s(t) = \int_a^t = \sqrt{\vec{r'}(t) \cdot \vec{r'}(t)}dt = \int_a^t |\vec{r'}(t)|dt.$$

Ορισμός 3. Εάν $s(t) = t - t_0$, τότε η παράμετρος t λέγεται *φυσική παράμετρος* της καμπύλης. Θα λέμε (αν και αυτό είναι κάπως ασαφές, αλλά διατηρείται για ιστορικούς λόγους), ότι μια παράμετρος είναι φυσική εάν είναι το μήκος τόξου.

Η ιδιότητα μιας παραμέτρου να είναι φυσική παράμετρος (δηλαδή το μήκος τόξου), είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη

$$s'(t) = 1.$$

Επειδή εξ ορισμού του μήκους τόξου ισχύει ότι $s'(t) = |\vec{r'}(t)|$, βλέπουμε άμεσα πως η παράμετρος t μιας καμπύλης $\vec{r}(t) : I \to \mathbb{E}^3$ είναι φυσική παράμετρος εάν και μόνον εάν

$$|\vec{r'}(t)| = 1, \forall t \in I.$$

Παρατήρηση 1: Από το παραπάνω προκύπτει άμεσα πως *ως προς τη φυσική παράμετρο, το εφαπτόμενο διάνυσμα μιας καμπύλης είναι αυτομάτως και μοναδιαίο*, δηλαδή έχει μέτρο ίσο με τη μονάδα.

Παρατήρηση 2: Κάθε καμπύλη ως προς τη φυσική της παράμετρο είναι τετριμμένα κανονική.

Πρόταση 1. *Κάθε κανονική καμπύλη είναι ισοδύναμη με μια καμπύλη με χρήση της φυσικής της παραμέτρου.*

Απόδειξη: Από την Παρατήρηση 2 κάθε καμπύλη είναι κανονική ως προς τη φυσική της παράμετρο.

Αντίστροφα, έστω ότι η καμπύλη

$$\vec{r}(t) : I \to \mathbb{E}^3$$

είναι κανονική. Τότε $|\vec{r'}(t)| > 0, \forall t \in I$, οπότε η συνάρτηση

$$s(t) := \int_{t_0}^{t} |\vec{r'}(t)| dt,$$

είναι μονότονη και συνεπώς μπορεί να ορισθεί μια αντίστροφη συνάρτηση

$$\phi : J \to I.$$

Η καμπύλη

$$\vec{r_1} = \vec{r} \circ \phi : J \to \mathbb{E}^3$$

είναι ισοδύναμη με την καμπύλη $\vec{r}$ οπότε εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας για την παράγωγο σύνθετης συνάρτησης παίρνουμε:

$$\vec{r_1}'(s) = \vec{r'}(t) \frac{d\phi}{ds}(s) = \vec{r'}(t) \frac{1}{s'(t)},$$

όπου $t = \phi(s)$. Όμως $s'(t) = |\vec{r'}(t)|$, οπότε έπεται πως

$$|\vec{r'}(s)| = 1, \forall s \in I,$$

δηλαδή η παράμετρος s στην καμπύλη $\vec{r_1}$ είναι φυσική παράμετρος. $\Box$

Από την Πρόταση 1, έπεται πως αφού θα μελετήσουμε μόνο (απλές) κανονικές καμπύλες, δεν υπάρχει βλάβη της γενικότητας αν χρησιμοποιούμε τη φυσική παράμετρο των καμπυλών. Αξίζει να έχουμε κατά νου όμως πως για μια απλή κανονική καμπύλη, η φυσική παράμετρος ορίζεται με μια αβεβαιότητα ενός μετασχηματισμού της μορφής

$$s \mapsto s + s_0,$$

δηλαδή η εκλογή του σημείου έναρξης για να μετρήσουμε την καμπύλη επιλέγεται αυθαίρετα.

Σημείωση 1: Θα συμβολίζουμε τη φυσική παράμετρο με s και τις παραγώγους ως προς τη μεταβλητή s θα τις συμβολίζουμε με τελείες. Τις μη-φυσικές παραμέτρους θα τις συμβολίζουμε με t και τις παραγώγους αυτών με τόνους. Ο συμβολισμός προέρχεται από τη φυσική (ως μια μη-φυσική παράμετρο θεωρούμε συνήθως το χρόνο (time) για να παραστήσουμε μια καμπύλη η οποία περιγράφει την κίνηση κάποιου υλικού σημείου στο χώρο).

Θα μας είναι χρήσιμες για τη μελέτη των καμπυλών το παρακάτω Λήμμα και ένα Πόρισμα αυτού:

Λήμμα 1. Έστω $\vec{u} = \vec{u}(s)$ μια λεία διανυσματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής τέτοια ώστε $|\vec{u}(s)| = 1, \forall s$. Τότε ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\vec{u}(s)\dot{\vec{u}}(s) = 0, \forall s.$$

Απόδειξη: Η εξίσωση $|\vec{u}(s)| = 1$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\vec{u}(s)^2 = 1$. Όμως γνωρίζουμε ότι ισχύει ο κανόνας του Leibnitz για την παράγωγο γινομένου συναρτήσεων και για το εσωτερικό γινόμενο διανυσματικών συναρτήσεων (όπως και για το βαθμωτό γινόμενο αλλά και για το εξωτερικό γινόμενο), οπότε παίρνουμε

$$\dot{\vec{u}^2} = \dot{\vec{u}}\vec{u} + \vec{u}\dot{\vec{u}} = 2\vec{u}\dot{\vec{u}}.$$

Συνεπώς εάν $\vec{u}^2 = 1$, τότε $\vec{u}\dot{\vec{u}} = 0$. $\square$

Πόρισμα 1. Για κάθε καμπύλη $\vec{r} = \vec{r}(s)$ ως προς τη φυσική της παράμετρο s, ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\dot{\vec{r}}(s)\ddot{\vec{r}}(s) = 0, \forall s.$$

Σημείωση 2: Υπάρχουν φυσικά καμπύλες που δεν έχουν μήκος, η ακριβέστερα το μήκος τους απειρίζεται (μη-υπολογίσιμες καμπύλες). Για παράδειγμα η καμπύλη του επιπέδου $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, με $t \in [0, 1]$ και αναλυτικό τύπο $x(t) = t$ για $t \in [0, 1]$ και

$$y(t) = \begin{cases} t\cos\frac{1}{t}, & \text{εάν} \quad t \in (0, 1], \\ 0, & \text{εάν} \quad t = 0. \end{cases}$$

Σημείωση 3: Το μήκος μιας καμπύλης είναι ανεξάρτητο από την επιλογή παραμέτρου, δηλαδή είναι μια χαρακτηριστική ποσότητα της απαραμέτρητης καμπύλης. Ο βαθύτερος λόγος που συμβαίνει αυτό είναι διότι στους Ευκλείδειους χώρους, τα μήκη (ισοδύναμα το εσωτερικό γινόμενο), είναι αναλλοίωτα στις μετατοπίσεις.

4.2 Παραδείγματα

1. Θα δούμε τη φυσική παράσταση της κυκλοειδούς έλικας η οποία έχει παραμετρική παράσταση $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, όπου $t \in [0, 2\pi]$.

Αρχικά υπολογίζουμε το μήκος της κυκλοειδούς έλικας. Για να γίνει αυτό θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τις εξής ποσότητες:

$$\vec{r'}(t) = (-a\sin t, a\cos t, b),$$

ενώ

$$|\vec{r'}(t)|^2 = \vec{r'}(t)\cdot\vec{r'}(t) = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2 = a^2 + b^2.$$

Συνεπώς

$$s(t) = \int_0^t |\vec{r'}(t)|dt = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2} = [t\sqrt{a^2+b^2}]_0^t = t\sqrt{a^2+b^2}$$

από την οποία, εάν επιλύσουμε ως προς t, παίρνουμε

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Άρα η φυσική παραμετρική παράσταση της κυκλοειδούς έλικας είναι η εξής:

$$\vec{r}(s) = (a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}).$$

2. Θα δούμε τώρα μια καμπύλη που *δεν έχει μήκος*. Έστω η καμπύλη του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ με παραμετρική παράσταση $\vec{r}(t) = (t, y(t))$, όπου $t \in [0,1]$ και

$$y(t) = \begin{cases} t\cos\frac{1}{t}, & \text{εάν} \quad t \in (0,1], \\ 0, & \text{εάν} \quad t = 0. \end{cases}$$

Θεωρούμε ότι το επίπεδο είναι εφοδιασμένο με ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων Oxy και έστω $\hat{i}$ και $\hat{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

Εργαζόμαστε ως εξής: επιλέγουμε κάποιο $N \in \mathbb{N}^*$ και θεωρούμε την παρακάτω διαμέριση του διαστήματος $[0,1]$:

$$0, \frac{1}{(N-1)\pi}, \frac{1}{(N-2)\pi}, \frac{1}{(N-3)\pi}, ..., \frac{1}{(N-i)\pi}, ..., \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}, 1$$

όπου ο δείκτης $1 \leq i \leq N-1$ καθορίζει τα εσωτερικά σημεία της διαμέρισης (εκτός των άκρων 0 και 1). Δηλαδή $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{(N-1)\pi}$, $t_2 = \frac{1}{(N-2)\pi}$, $t_3 = \frac{1}{(N-3)\pi}$,..., $t_i = \frac{1}{(N-i)\pi}$,..., $t_{N-2} = \frac{1}{2\pi}$, $t_{N-1} = \frac{1}{\pi}$ και $t_N = 1$.

Θεωρούμε στη συνέχεια την προσεγγιστική πολυγωνική γραμμή P που προκύπτει από την ένωση των σημείων t_i της διαμέρισης. Για το μήκος αυτής $s(P)$ θα έχουμε:

$$s(P) = \sum_{i=0}^{N-1} |\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)| = \sum_{i=0}^{N-1} |[x(t_{n+1}) - x(t_n)]\hat{i} + [y(t_{n+1}) - y(t_n)]\hat{j}| =$$

$$= |[\frac{1}{(N-1)\pi} - 0]\hat{i} + [\frac{1}{(N-1)\pi}\cos(N-1)\pi - 0]\hat{j}| +$$

(όρος $n=0$)

$$+|[\frac{1}{(N-2)\pi}-\frac{1}{(N-1)\pi}]\hat{i}+[\frac{1}{(N-2)\pi}\cos(N-2)\pi-\frac{1}{(N-1)\pi}\cos(N-1)\pi]\hat{j}|+$$

(όρος $n=1$)

$$+\cdots+$$

$$+|[\frac{1}{(N-(n+1))\pi}-\frac{1}{(N-n)\pi}]\hat{i}+$$

$$[\frac{1}{(N-(n+1))\pi}\cos(N-(n+1))\pi-\frac{1}{(N-n)\pi}\cos(N-n)\pi]\hat{j}|+$$

(τυχαίος όρος n)

$$+\cdots+$$

$$+|(\frac{1}{2\pi}-\frac{1}{3\pi})\hat{i}+(\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi-\frac{1}{3\pi}\cos 3\pi)\hat{j}|+$$

(όρος $n=N-3$)

$$+|(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2\pi})\hat{i}+(\frac{1}{\pi}\cos\pi-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi)\hat{j}|+$$

(όρος $n=N-2$)

$$+|(1-\frac{1}{\pi})\hat{i}+(\cos 1-\frac{1}{\pi}\cos\pi)\hat{j}|$$

(όρος $n=N-1$).

Στη συνέχεια, από το παραπάνω άθροισμα, αγνοούμε τον πρώτο ($n=0$) και τον τελευταίο ($n=N-1$) όρο, συνεπώς θα έχουμε $n=1,...,N-2$, δηλαδή ένα νέο άθροισμα με $N-2$ συνολικά όρους (ενώ το αρχικό είχε N συνολικά όρους). Το νέο άθροισμα που προκύπτει από το αρχικό με την παράλειψη των δύο όρων θα είναι μικρότερο ή ίσο από το αρχικό (αφού παραλείπουμε δύο όρους που είναι θετικές ποσότητες). Γράφοντας το νέο άθροισμα αντίστροφα, δηλαδή αρχίζοντας από τον τελευταίο όρο και χρησιμοποιώντας ως δείκτη το γράμμα i αντί του n, θα πάρουμε:

$$s(P)\geq|(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2\pi})\hat{i}+(\frac{1}{\pi}\cos\pi-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi)\hat{j}|+$$

(όρος $i=1$)

$$+|(\frac{1}{2\pi}-\frac{1}{3\pi})\hat{i}+(\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi-\frac{1}{3\pi}\cos 3\pi)\hat{j}|+$$

(όρος $i = 2$)

$$+\cdots+$$

$$+|[\frac{1}{i\pi} - \frac{1}{(i+1)\pi}]\hat{i} + [\frac{1}{i\pi}\cos i\pi - \frac{1}{(i+1)\pi}\cos(i+1)\pi]\hat{j}|+$$

(τυχαίος όρος i)

$$+\cdots+$$

$$+|[\frac{1}{(N-2)\pi} - \frac{1}{(N-1)\pi}]\hat{i} + [\frac{1}{(N-2)\pi}\cos(N-2)\pi - \frac{1}{(N-1)\pi}\cos(N-1)\pi]\hat{j}| =$$

(τελευταίος όρος $i = N-2$)

$$= \sum_{i=1}^{N-2} |[\frac{1}{i\pi} - \frac{1}{(i+1)\pi}]\hat{i} + [\frac{1}{i\pi}\cos i\pi - \frac{1}{(i+1)\pi}\cos(i+1)\pi]\hat{j}| \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{N-2} |[\frac{1}{i\pi}\cos i\pi - \frac{1}{(i+1)\pi}\cos(i+1)\pi]\hat{j}|.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι για ένα τυχαίο διάνυσμα του επιπέδου με συντεταγμένες $\vec{a} = x\hat{i} + y\hat{j}$, ισχύει ότι $|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2} \geq |y\hat{j}| = |y|$.

Όμως

$$\sum_{i=1}^{N-2} |[\frac{1}{i\pi}\cos i\pi - \frac{1}{(i+1)\pi}\cos(i+1)\pi]\hat{j}| = \sum_{i=1}^{N-2} |(-1)^i\frac{1}{i\pi} - (-1)^{i+1}\frac{1}{(i+1)\pi}| =$$

διότι αγνοούμε το $\hat{j}$ που έχει μέτρο $|\hat{j}| = 1$ ενώ $\cos i\pi = \begin{cases} +1, & \text{εάν} \quad i = 2k, \\ -1, & \text{εάν} \quad i = 2k+1. \end{cases}$

$$= \sum_{i=1}^{N-2} |\frac{1}{i\pi} + \frac{1}{(i+1)\pi}|,$$

διότι:

(α). εάν $i = 2k$ άρτιος, τότε $i+1$ περιττός, οπότε

$$(-1)^i\frac{1}{i\pi} - (-1)^{i+1}\frac{1}{(i+1)\pi} = \frac{1}{i\pi} + \frac{1}{(i+1)\pi},$$

ποσότητα που ως θετική είναι ίση με την απόλυτη τιμή της, ενώ

(β). εάν $i = 2k+1$ περιττός, τότε $i+1$ άρτιος, οπότε

$$(-1)^i \frac{1}{i\pi} - (-1)^{i+1} \frac{1}{(i+1)\pi} = -\frac{1}{i\pi} - \frac{1}{(i+1)\pi},$$

ποσότητα που κατ' απόλυτη τιμή είναι ίση με την απόλυτη τιμή της ποσότητας της περίπτωσης **(α)**.

Επίσης

$$\sum_{i=1}^{N-2} |\frac{1}{i\pi} + \frac{1}{(i+1)\pi}| \geq \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{N-2} \frac{1}{i+1},$$

διότι

$$\frac{1}{i\pi} + \frac{1}{(i+1)\pi} = \frac{(i+1)+i}{i(i+1)\pi} = \frac{2i+1}{i(i+1)\pi} \geq \frac{2i}{i(i+1)\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{i+1},$$

και το $\frac{2}{\pi}$ βγαίνει κοινός παράγοντας από όλους τους όρους, άρα έξω από το άθροισμα.

Όμως η σειρά

$$\sum_{i=1}^{N-2} \frac{1}{i+1} \to \infty,$$

αποκλίνει (για διαμέριση απείρως λεπτή, δηλαδή για $N \to \infty$), οπότε το $s(P)$ ως μεγαλύτερο, αποκλίνει επίσης, συνεπώς η καμπύλη *δεν έχει πεπερασμένο μήκος*.

5 Εγγύτατο Επίπεδο μιας Καμπύλης

Έστω $\vec{r}(t) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ η παραμετρική παράσταση μιας καμπύλης C στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{E}^3$ (δηλαδή $C \subset \mathbb{E}^3$ είναι το υποστήριγμα της καμπύλης). Έστω P και P_1 δύο σημεία της C που ορίζουν την ευθεία PP_1. Όταν το σημείο P_1 τείνει στο σημείο P, δηλαδή $P_1 \to P$, τότε η ευθεία PP_1 τείνει στην εφαπτομένη της C στο σημείο P. Ζητάμε την οριακή θέση ενός επιπέδου E που ορίζεται από τρία μη-συνευθειακά σημεία P_1, P και P_2, όταν τα σημεία P_1 και P_2 τείνουν στο σημείο P.

Έστω O η αρχή ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων και έστω $\overrightarrow{OP} = \vec{r}(t)$, $\overrightarrow{OP_1} = \vec{r}(t+h_1)$ και $\overrightarrow{OP_2} = \vec{r}(t+h_2)$. Οι χορδές PP_1 και PP_2 της C δίδονται από τα διανύσματα $\vec{a}_1 = \vec{r}(t+h_1) - \vec{r}(t)$ και $\vec{a}_2 = \vec{r}(t+h_2) - \vec{r}(t)$.

Αν τα διανύσματα $\vec{a}_1$ και $\vec{a}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε παράγουν το επίπεδο E.

Από τον τύπο του Taylor για την διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}(t)$ παίρνουμε:

$$\vec{r}(t+h_i) = \vec{r}(t) + h_i \vec{r'}(t) + \frac{h_i^2}{2!}\vec{r''}(t) + o(h_i^2),$$

με $i = 1, 2$. Συνεπώς η ποσότητα

$$\vec{a}_i = h_i \vec{r'}(t) + \frac{h_i^2}{2!}\vec{r''}(t) + o(h_i^2),$$

με $i = 1, 2$, είναι συνάρτηση των $\vec{r'}(t)$ και $\vec{r''}(t)$.

Ορισμός 1. Το επίπεδο E που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{r'}(t)$ και $\vec{r''}(t)$ λέγεται *εγγύτατο επίπεδο (osculating plane)* της καμπύλης C στο σημείο P.

Ισοδύναμα, το εγγύτατο επίπεδο E της καμπύλης C στο σημείο P παράγεται από το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο σημείο P και από ένα σημείο P_1 της C όταν $P_1 \to P$.

Έστω $\Delta \in E$ κάποιο σημείο του εγγύτατου επιπέδου E της καμπύλης C στο σημείο P της καμπύλης, με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_\Delta$ και έστω $\vec{r}_P = \overrightarrow{OP}$ το διάνυσμα θέσης του σημείου P της C. Το διάνυσμα $\vec{r}_\Delta - \vec{r}_P$ βρίσκεται στο επίπεδο E (αφού $P, \Delta \in E$), οπότε τα τρία διανύσματα $\vec{r'_P}$, $\vec{r''_P}$ και $\vec{r}_\Delta - \vec{r}_P$ του επιπέδου E είναι αναγκαστικά *γραμμικά εξαρτημένα*, οπότε η ορίζουσα των συντεταγμένων τους μηδενίζεται, ή ισοδύναμα

$$|(\vec{r}_\Delta - \vec{r}_P)\vec{r'_P}\vec{r''_P}| = 0$$

Η παραπάνω έκφραση συμβολίζει το *μικτό γινόμενο*

$$|(\vec{r}_\Delta - \vec{r}_P)\vec{r'_P}\vec{r''_P}| := (\vec{r}_\Delta - \vec{r}_P) \cdot (\vec{r'_P} \times \vec{r''_P}).$$

Η παραπάνω σχέση δίδει την εξίσωση του εγγύτατου επιπέδου.

Ισοδύναμα, η παραμετρική αναπαράσταση του εγγύτατου επιπέδου μιας καμπύλης C με παραμετρική παράσταση $\vec{r}(t)$ είναι η εξής:

$$\vec{E}(t) = \vec{r}(t) + \alpha\vec{r'}(t) + \beta\vec{r''}(t), \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Ορισμός 2. Η τομή του εγγύτατου επιπέδου στο σημείο P μιας καμπύλης C με το κάθετο επίπεδο στο ίδιο σημείο P της καμπύλης, ορίζει μια ευθεία που λέγεται *πρωτεύουσα κάθετος* της καμπύλης στο εν λόγω σημείο P αυτής.

Στην συνέχεια θα αναφέρουμε τρεις προτάσεις, οι αποδείξεις των οποίων είναι περίπου προφανείς:

Πρόταση 1. Μια καμπύλη είναι επίπεδη εάν και μόνον εάν το επίπεδο της καμπύλης αποτελεί το μοναδικό εγγύτατο επίπεδο αυτής.

Πρόταση 2. Μια καμπύλη C στο χώρο με παραμετρική παράσταση $\vec{r}(t) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ είναι ευθεία, εάν και μόνον εάν ισχύει ότι

$$\vec{r''}(t) = 0, \forall t \in I.$$

Πρόταση 3. Μια καμπύλη C στο χώρο με παραμετρική παράσταση $\vec{r}(t) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ είναι ευθεία, εάν και μόνον εάν τα διανύσματα $\vec{r'}(t)$ και $\vec{r''}(t)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα $\forall t \in I$.

Παρατήρηση 1: Όπως είδαμε παραπάνω, για να ορισθεί το εγγύτατο επίπεδο μιας καμπύλης C του χώρου σε κάποιο σημείο P με διάνυσμα θέσης $\vec{r_P} = \vec{r}(t)$ αυτής, θα πρέπει τα διανύσματα $\vec{r'}(t)$ και $\vec{r''}(t)$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επειδή το μηδενικό διάνυσμα είναι γραμμικά εξαρτημένο με οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα, η παραπάνω συνθήκη προϋποθέτει πως $\vec{r'}(t) \neq 0$ αλλά και $\vec{r''}(t) \neq 0$. Η πρώτη συνθήκη ικανοποιείται συμβατικά διότι υποθέτουμε πως όλες οι καμπύλες που μελετάμε είναι (απλές και) *κανονικές*. Συνεπώς για να υπάρχει το εγγύτατο επίπεδο, μπορούμε ισοδύναμα να απαιτήσουμε πως $\vec{r''}(t) \neq 0$.

6 Καμπυλότητα μιας Καμπύλης

6.1 Τοπικές και Ολικές Ιδιότητες μιας Καμπύλης

Γενικά οι γεωμετρικές ιδιότητες των καμπυλών (που αποτελούν πολλαπλότητες διάστασης 1) ή των επιφανειών (που αποτελούν πολλαπλότητες διάστασης 2) ή γενικότερα των πολλαπλοτήτων οποιασδήποτε διάστασης, είναι δύο ειδών: αυτές οι οποίες εξαρτώνται μόνο από τα γειτονικά σημεία ενός δοθέντος σημείου και θα λέγονται *τοπικές (local) ιδιότητες* και αυτές που αφορούν ολόκληρη την καμπύλη (ή την επιφάνεια ή γενικότερα την πολλαπλότητα) και λέγονται *ολικές (global) ιδιότητες*.

Όσον αφορά τις καμπύλες στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{E}^3$ που μελετάμε εδώ, οι σημαντικότερες τοπικές ιδιότητες μιας καμπύλης είναι δύο: *η καμπυλότητα* και *η στρέψη*. Όπως θα δούμε, οι δύο αυτές ιδιότητες χαρακτηρίζουν μια (απαραμέτρητη) καμπύλη με μοναδικό τρόπο (χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη στροφές και μετατοπίσεις στο χώρο).

Παραδείγματα ολικών ιδιοτήτων μιας καμπύλης είναι οι λεγόμενες *τοπολογικές* ιδιότητες αυτής όπως το αν μια καμπύλη έχει πεπερασμένο μήκος ή όχι (συμπάγεια), το αν αποτελείται από ένα ή πολλά κομμάτια (συνεκτικότητα) καθώς και το αν είναι ανοικτή ή κλειστή (απλή ή πολλαπλή συνεκτικότητα).

6.2 Γεωμετρική Ερμηνεία της Καμπυλότητας

Πριν περάσουμε στην αυστηρή περιγραφή της καμπυλότητας, θα δώσουμε ένα παράδειγμα για να έχουμε μια διαισθητική εικόνα της έννοιας αυτής αλλά και για να δώσουμε κίνητρα για την μελέτη αυτής.

Για ευκολία και χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε μια καμπύλη C στο επίπεδο. Έστω Q, R δύο σημεία της καμπύλης C, γειτονικά ενός τρίτου σημείου P της C και έστω C_{QR} η περιφέρεια κύκλου που διέρχεται από τα τρία σημεία P, Q και R της καμπύλης C (θυμίζουμε από την Ευκλείδεια Γεωμετρία πως υπάρχει πάντα μοναδικός κύκλος που διέρχεται από τρία δοσμένα μη-συνευθειακά σημεία P, Q και R του επιπέδου, το κέντρο του βρίσκεται στην τομή των μεσοκαθέτων των χορδών QP και PR).

Θεωρούμε το όριο των περιφερειών των κύκλων C_{QR} καθώς τα σημεία Q και R τείνουν στο σημείο P. Το όριο είναι μια περιφέρεια κύκλου C_P, εφαπτόμενου στην καμπύλη C στο σημείο P. Η ακτίνα r_P του κύκλου C_P ονομάζεται *ακτίνα* *καμπυλότητας* της καμπύλης C στο σημείο P ενώ η αντίστροφη ποσότητα

$$k_P = \frac{1}{r_P}$$

ονομάζεται *καμπυλότητα* της καμπύλης C στο σημείο P. Από την παραπάνω περιγραφή φαίνεται καθαρά πως η καμπυλότητα k_P της καμπύλης είναι μια *τοπική ιδιότητα*, δηλαδή εξαρτάται μόνο από τα γειτονικά του P σημεία της καμπύλης.

6.3 Πρωτοκάθετο Μοναδιαίο Διάνυσμα και Καμπυλότητα

Περνάμε τώρα στην αυστηρή περιγραφή της έννοιας της καμπυλότητας.

Έστω μια καμπύλη (απλή και κανονική) C στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{E}^3$ με φυσική παραμετρική παράσταση $\vec{r}(s) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$, όπου s η φυσική παράμετρος (μήκος τόξου) της καμπύλης. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\vec{t}(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds}$$

είναι το *μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα* της καμπύλης C.

Επειδή το $\vec{t}(s)$ είναι μοναδιαίο, έχουμε ότι

$$\vec{t}(s) \cdot \vec{t}(s) = 1.$$

Διαφορίζουμε την παραπάνω σχέση ως προς s και παίρνουμε

$$\vec{t}(s) \cdot \dot{\vec{t}}(s) = 0,$$

οπότε εάν το $\dot{\vec{t}}(s) = \ddot{\vec{r}}(s) \neq 0$, θα είναι ορθογώνιο προς το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{t}(s)$, δηλαδή

$$\vec{t}(s) \perp \dot{\vec{t}}(s),$$

άρα το διάνυσμα $\dot{\vec{t}}(s)$ θα βρίσκεται στο *κάθετο επίπεδο* της καμπύλης C στο εν λόγω σημείο. Το διάνυσμα $\dot{\vec{t}}(s) = \ddot{\vec{r}}(s)$ επίσης βρίσκεται και στο *εγγύτατο επίπεδο* της καμπύλης C στο εν λόγω σημείο.

Ορισμός 1. Το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\vec{p}(s) := \frac{\dot{\vec{t}}(s)}{|\dot{\vec{t}}(s)|}$$

το οποίο έχει την διεύθυνση και τη φορά του διανύσματος $\vec{\dot{t}}(s)$, λέγεται *μοναδιαίο πρωτοκάθετο διάνυσμα* της καμπύλης C στο σημείο $\vec{r}(s)$. Ο φορέας του διανύσματος $\vec{p}(s)$ λέγεται *πρωτοκάθετος* της καμπύλης στο σημείο αυτό.

Επειδή το διάνυσμα $\vec{\dot{t}}(s)$ βρίσκεται και στο κάθετο αλλά και στο εγγύτατο επίπεδο της καμπύλης C, θα βρίσκεται και στην τομή τους.

Ορισμός 2. Η απόλυτη τιμή (το μέτρο) του διανύσματος $\vec{\dot{t}}(s)$ λέγεται *καμπυλότητα* της καμπύλης C στο σημείο $\vec{r}(s)$ και συμβολίζεται με k:

$$k(s) := |\vec{\dot{t}}(s)| = \sqrt{\vec{\ddot{r}}(s) \cdot \vec{\ddot{r}}(s)},$$

ενώ το αντίστροφο της καμπυλότητας

$$\rho(s) := \frac{1}{k(s)}$$

λέγεται *ακτίνα καμπυλότητας* της καμπύλης C στο σημείο $\vec{r}(s)$.

Το διάνυσμα

$$\vec{k}(s) := \vec{\dot{t}}(s)$$

λέγεται και *διανυσματική καμπυλότητα* της καμπύλης C στο σημείο $\vec{r}(s)$.

Ορισμός 3. Το σημείο M της θετικής ακτίνας της πρωτοκάθετης ευθείας (δηλαδή συμβατικά προς το κοίλο μέρος της καμπύλης) σε απόσταση $\rho(s)$ από το αντίστοιχο σημείο, έστω $P = \vec{r}(s)$, της καμπύλης C, λέγεται *κέντρο καμπυλότητας*.

Ορισμός 4. Ο κύκλος στο αντίστοιχο εγγύτατο επίπεδο της καμπύλης C, με ακτίνα ίση με $\rho(s)$ (δηλαδή ίση με την ακτίνα καμπυλότητας) και κέντρο το σημείο M (δηλαδή το κέντρο καμπυλότητας), λέγεται *εγγύτατος κύκλος* ή *κύκλος καμπυλότητας* της καμπύλης C στο σημείο $P = \vec{r}(s)$.

Σημείωση 1: Προφανώς οι εφαπτομένες της καμπύλης C και του εγγύτατου κύκλου στο σημείο $P = \vec{r}(s)$ συμπίπτουν.

Πρόταση 1. Η καμπυλότητα της ευθείας είναι μηδέν.

Απόδειξη: Προφανής.

6.4 Χρήσιμες Εκφράσεις για την Καμπυλότητα

Πρόταση 1. Η καμπυλότητα μιας καμπύλης C του χώρου με παραμετρική παράσταση $\vec{r}(s) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ δίδεται από τη σχέση

$$k(s) = |\dot{\vec{r}}(s) \times \ddot{\vec{r}}(s)|.$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό του μοναδιαίου πρωτοκάθετου διανύσματος (Ορισμός 6.3.1) και της καμπυλότητας (Ορισμός 6.3.2), προκύπτει ότι

$$\vec{p}(s) = \frac{\dot{\vec{t}}(s)}{k(s)} \Leftrightarrow \dot{\vec{t}}(s) = k(s)\vec{p}(s).$$

Θεωρούμε στη συνέχεια το εξωτερικό γινόμενο

$$\vec{t}(s) \times \dot{\vec{t}}(s) = \dot{\vec{r}}(s) \times \ddot{\vec{r}}(s)$$

το οποίο λόγω της προηγούμενης σχέσης γράφεται

$$\vec{t}(s) \times \dot{\vec{t}}(s) = \dot{\vec{r}}(s) \times \ddot{\vec{r}}(s) = \vec{t}(s) \times k(s)\vec{p}(s) = k(s)[\vec{t}(s) \times \vec{p}(s)].$$

Όμως τα διανύσματα $\vec{t}(s)$ και $\vec{p}(s)$ είναι κάθετα και μοναδιαία, άρα το εξωτερικό τους γινόμενο ισούται με μονάδα, οπότε παίρνουμε

$$\vec{t}(s) \times \dot{\vec{t}}(s) = k(s)[\vec{t}(s) \times \vec{p}(s)] = k(s).$$

Δηλαδή καταλήξαμε στην σχέση για την καμπυλότητα

$$k(s) = \vec{t}(s) \times \dot{\vec{t}}(s) = \dot{\vec{r}}(s) \times \ddot{\vec{r}}(s).$$

Η σχέση λοιπόν που μας δίδει την καμπυλότητα μιας καμπύλης με παραμετρική παράσταση ως προς τη φυσική παράμετρο s (μήκος τόξου) είναι η εξής:

$$k(s) = |\dot{\vec{r}}(s) \times \ddot{\vec{r}}(s)|.$$

(η απόλυτη τιμή χρησιμοποιείται για να είναι πάντα θετική η καμπυλότητα αφού την ορίσαμε ως $k(s) = |\dot{\vec{t}}(s)|$). $\square$

Θέλουμε όμως και μια έκφραση για την καμπυλότητα όταν χρησιμοποιούμε παραμετρικές παραστάσεις ως προς άλλες παραμέτρους, *εκτός της φυσικής παραμέτρου* των καμπυλών.

Πρόταση 2. Η καμπυλότητα μιας καμπύλης C του χώρου με παραμετρική παράσταση $\vec{r}(t) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ δίδεται από τη σχέση

$$k(t) = \frac{|\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t)|}{|\vec{r'}(t)|^3}.$$

Απόδειξη: Έστω λοιπόν ότι η καμπύλη περιγράφεται από μια παραμετρική παράσταση της μορφής $\vec{r}(t)$. Τότε χρησιμοποιώντας το γνωστό κανόνα της αλυσίδας από την ανάλυση παίρνουμε:

$$\vec{r'}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{r}}{ds} = s'\dot{\vec{r}}.$$

Για τη δεύτερη παράγωγο παίρνουμε:

$$\vec{r''}(t) = \frac{d}{dt}(s'\dot{\vec{r}}) = \frac{ds'}{dt}\dot{\vec{r}} + s'\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = s''\dot{\vec{r}} + (s')^2\ddot{\vec{r}}$$

διότι ο όρος

$$s'\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt}$$

δίδει, (εφαρμόζοντας και πάλι τον κανόνα της αλυσίδας):

$$s'\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = s'\frac{ds}{dt}\frac{d\dot{\vec{r}}}{ds} = (s')^2\ddot{\vec{r}}.$$

Συνεπώς έχουμε:

$$\vec{r'} \times \vec{r''} = s'\dot{\vec{r}} \times [s''\dot{\vec{r}} + (s')^2\ddot{\vec{r}}]$$

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα του εξωτερικού γινομένου ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων:

$$\vec{r'} \times \vec{r''} = s'\dot{\vec{r}} \times [s''\dot{\vec{r}} + (s')^2\ddot{\vec{r}}] = (s's'')\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + s'(s')^2\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}.$$

Όμως ο όρος

$$(s's'')\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = 0$$

διότι τα διανύσματα $\dot{\vec{r}}$ και $\dot{\vec{r}}$ είναι παράλληλα, οπότε παίρνουμε

$$\vec{r'} \times \vec{r''} = (s')^3(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) = |\vec{r'}|^3(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}),$$

διότι από τον ορισμό του μήκους μιας καμπύλης έπεται ότι

$$s = \int_{t_0}^{t} |\vec{r'}(t)|dt \Rightarrow s' = \frac{ds}{dt} = |\vec{r'}(t)|$$

οπότε και
$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\vec{r'}(t)|}.$$
Άρα λοιπόν καταλήξαμε στην σχέση
$$\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t) = |\vec{r'}|^3(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) = |\vec{r'}|^3 k(s) \Leftrightarrow k(t) = \frac{|\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t)|}{|\vec{r'}(t)|^3}.$$
Άρα λοιπόν η ζητούμενη έκφραση για την καμπυλότητα μιας καμπύλης με χρήση τυχαίας παραμέτρου, όχι της φυσικής παραμέτρου, είναι:
$$k(t) = \frac{|\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t)|}{|\vec{r'}(t)|^3}.$$
□

Σημείωση 1: Από τον ορισμό της καμπυλότητας μέσω της σχέσης
$$k(s) := |\dot{\vec{t}}(s)|$$
φαίνεται πως η καμπυλότητα ουσιαστικά δίδει το μέτρο της μεταβολής της διεύθυνσης ανά μονάδα μήκους της καμπύλης του μοναδιαίου εφαπτόμενου διανύσματος (αφού είναι μοναδιαίο, το μέτρο του είναι σταθερό και ίσο με την μονάδα, άρα μόνο η διεύθυνση μεταβάλλεται).

Εάν θεωρήσουμε πως η καμπύλη αποτελεί την τροχιά στο χώρο ενός υλικού σωματίου (οπότε η παράμετρος της καμπύλης είναι ο χρόνος), τότε η καμπυλότητα σχετίζεται άμεσα με την *κεντρομόλο επιτάχυνση*. Τα σημεία στα οποία η καμπυλότητα μηδενίζεται, λέγονται *σημεία καμπής* της καμπύλης.

6.5 Εφαρμογή

Θα υπολογίσουμε, ως μια απλή εφαρμογή, την καμπυλότητα της *κυκλοειδούς έλικας* με παραμετρική παράσταση
$$\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt),$$
όπου $t \in [0, 2\pi]$.

Επειδή η παραμετρική παράσταση δεν έχει ως παράμετρο τη φυσική παράμετρο (μήκος τόξου) της κυκλοειδούς έλικας, θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση
$$k(t) = \frac{|\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t)|}{|\vec{r'}(t)|^3}.$$

Υπολογίζουμε λοιπόν τις εξής ποσότητες:

$$\vec{r'}(t) = (-a\sin t, a\cos t, b),$$

ενώ

$$|\vec{r'}(t)| = \sqrt{\vec{r'}(t)\cdot\vec{r'}(t)} = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Επίσης

$$\vec{r''}(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$$

ενώ

$$\vec{r'}(t)\times\vec{r''}(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t)\hat{k} - b(-a\sin t\hat{i} + a\cos t\hat{j}) + 0 = a^2\hat{k} + ab\sin t\hat{i} - ab\cos t\hat{j}.$$

Άρα

$$|\vec{r'}(t)\times\vec{r''}(t)| = \sqrt{a^4 + a^2b^2\sin^2 t + a^2b^2\cos^2 t} = \sqrt{a^4+a^2b^2} = a\sqrt{a^2+b^2}.$$

Συνεπώς, αν αντικαταστήσουμε τις ποσότητες που υπολογίσαμε στον τύπο της καμπυλότητας, προκύπτει:

$$k = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Παρατηρούμε ότι η καμπυλότητα της κυκλοειδούς έλικας είναι *σταθερή*.

7 Κινούμενο Τρίεδρο μιας Καμπύλης

7.1 Δικάθετο Μοναδιαίο Διάνυσμα και Τρίεδρο Frenet

Έστω C μια καμπύλη του χώρου με παραμετρική παράσταση $\vec{r}(s) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με παράμετρο το μήκος τόξου της καμπύλης. Ορίσαμε σε προηγούμενη παράγραφο το *μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα*

$$\vec{t}(s) = \dot{\vec{r}}(s)$$

και το *μοναδιαίο πρωτοκάθετο διάνυσμα*

$$\vec{p}(s) = \frac{\dot{\vec{t}}(s)}{|\dot{\vec{t}}(s)|},$$

με

$$\dot{\vec{t}}(s) = k(s)\vec{p}(s)$$

όπου $k(s) = |\dot{\vec{t}}(s)|$ η *καμπυλότητα* της καμπύλης.

Ορισμός 1. Ορίζουμε το *μοναδιαίο δικάθετο διάνυσμα* της καμπύλης, που θα το συμβολίζουμε $\vec{b}(s)$, ως εξής:

$$\vec{b}(s) := \vec{t}(s) \times \vec{p}(s).$$

Εξ ορισμού το δικάθετο διάνυσμα $\vec{b}(s)$ είναι μοναδιαίο και κάθετο στα $\vec{t}(s)$ και $\vec{p}(s)$. Η φορά του επιλέγεται κατάλληλα έτσι ώστε το ορθοκανονικό σύστημα μοναδιαίων διανυσμάτων $\{\vec{t}, \vec{p}, \vec{b}\}$ να είναι *δεξιόστροφο* σε κάθε σημείο της καμπύλης.

Ορισμός 2. Ο φορέας του μοναδιαίου δικάθετου διανύσματος $\vec{b}(s)$ λέγεται *δεύτερη κάθετος* της καμπύλης.

Ορισμός 3. Η τριάδα των μοναδιαίων ορθοκανονικών διανυσμάτων που ορίσαμε παραπάνω $\{\vec{t}(s), \vec{p}(s), \vec{b}(s)\}$ ονομάζεται *κινητό τρίεδρο* μιας καμπύλης ή *τρίεδρο Frenet*.

Σημείωση 1: Προφανώς εν γένει, μεταξύ δύο διαφορετικών σημείων μιας καμπύλης, τα διανύσματα του τριέδρου Frenet μεταβάλλονται αλλά με τέτοιον τρόπο ώστε πάντα, σε κάθε σημείο της καμπύλης, να δίδουν ένα ορθοκανονικό, δεξιόστροφο σύστημα μοναδιαίων διανυσμάτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$. Για αυτό το λόγο λέγονται κινητό τρίεδρο, ουσιαστικά αποτελούν μια κινούμενη (κατά μήκος της καμπύλης) βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$.

7.2 Χαρακτηριστικές Ευθείες και Επίπεδα μιας Καμπύλης

Δοθείσης μιας καμπύλης C του χώρου με παραμετρική παράσταση (με χρήση της φυσικής παραμέτρου) $\vec{r}(s) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, ορίζουμε τα παρακάτω στοιχεία αυτής (στα παρακάτω, υποθέτουμε ότι $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$):

- *μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα*

$$\vec{t}(s) = \dot{\vec{r}}(s)$$

εξίσωση εφαπτόμενης ευθείας (παραμετρική αναπαράσταση)

$$\vec{R}_t(s) = \vec{r}(s) + \lambda \vec{t}(s)$$

(για να μην υπάρχει σύγχυση, σημειώνουμε πως η εξίσωση αυτή είναι η ίδια που αναφέραμε στον Ορισμό 2.3.8 διότι τα διανύσματα $\vec{r}'(t)$ και $\vec{t}(s)$–που εξ ορισμού είναι συγγραμμικό με το $\dot{\vec{r}}(s)$–είναι επίσης συγγραμμικά διότι διαφέρουν κατά βαθμωτή συνάρτηση όπως μας λέει η σχέση $\vec{r}'(t) = s'\dot{\vec{r}}(s)$ της παραγράφου 6.4.)

- *μοναδιαίο πρωτοκάθετο διάνυσμα*

$$\vec{p}(s) = \frac{\dot{\vec{t}}(s)}{|\dot{\vec{t}}(s)|} = \frac{1}{k(s)}\dot{\vec{t}}(s)$$

εξίσωση πρωτοκάθετης ευθείας (παραμετρική αναπαράσταση)

$$\vec{R}_p(s) = \vec{r}(s) + \lambda \vec{p}(s)$$

- *μοναδιαίο δικάθετο διάνυσμα*

$$\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{p}(s).$$

εξίσωση δεύτερης κάθετης ευθείας (παραμετρική αναπαράσταση)

$$\vec{R}_b(s) = \vec{r}(s) + \lambda \vec{b}(s)$$

♦ Τα διανύσματα $\vec{t}(s)$ και $\vec{p}(s)$ παράγουν το *εγγύτατο επίπεδο* της καμπύλης με εξίσωση

$$(\vec{x} - \vec{r}) \cdot \vec{b} = 0$$

ή ισοδύναμα (παραμετρική αναπαράσταση)

$$\vec{P}_o(s) = \vec{r}(s) + \lambda \vec{t}(s) + \mu \vec{p}(s)$$

(για να μην υπάρχει σύγχυση, σημειώνουμε πως η εξίσωση αυτή είναι η ίδια που αναφέραμε στην Παράγραφο 5 διότι τα διανύσματα $\vec{r}(t)$ και $\vec{r}(s)$ είναι συγγραμμικά όπως επίσης και τα διανύσματα $\vec{t}$, $\vec{r'}(t)$ και $\dot{\vec{r}}(s)$ είναι συγγραμμικά και όπως τέλος και τα διανύσματα $\vec{p}$, $\vec{r''}(t)$ και $\ddot{\vec{r}}(s)$ είναι συγγραμμικά. Αυτό προκύπτει από τους ορισμούς και από τις σχέσεις μεταξύ των δεύτερων παραγώγων των διανυσματικών παραμετρικών συναρτήσεων της καμπύλης ως προς τη φυσική και ως προς τυχαία παράμετρο που είδαμε στην παράγραφο 6.4).

♦ Τα διανύσματα $\vec{p}(s)$ και $\vec{b}(s)$ παράγουν το *κάθετο επίπεδο* της καμπύλης με εξίσωση

$$(\vec{x} - \vec{r}) \cdot \vec{t} = 0$$

ή ισοδύναμα (παραμετρική αναπαράσταση)

$$\vec{P}_v(s) = \vec{r}(s) + \lambda \vec{p}(s) + \mu \vec{b}(s)$$

♦ Τα διανύσματα $\vec{t}(s)$ και $\vec{b}(s)$ παράγουν το *ευθειοποιούν επίπεδο* της καμπύλης με εξίσωση

$$(\vec{x} - \vec{r}) \cdot \vec{p} = 0$$

ή ισοδύναμα (παραμετρική αναπαράσταση)

$$\vec{P}_l(s) = \vec{r}(s) + \lambda \vec{t}(s) + \mu \vec{b}(s).$$

8 Στρέψη μιας Καμπύλης

8.1 Ορισμός και Γεωμετρική Ερμηνεία της Στρέψης

Έστω $\vec{r}(s) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ η παραμετρική παράσταση μιας (απλής, κανονικής και λείας) καμπύλης C του χώρου με παράμετρο το μήκος τόξου της καμπύλης. Εκτός από την καμπυλότητα που είδαμε, η δεύτερη χαρακτηριστική ποσότητα μιας καμπύλης είναι η *στρέψη* η οποία *μετρά το ρυθμό απόκλισης μιας καμπύλης από το εγγύτατο επίπεδο.*

Όπως είδαμε, το εγγύτατο επίπεδο παράγεται από το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{t}$ και από το μοναδιαίο πρωτοκάθετο διάνυσμα $\vec{p}$, συνεπώς το μοναδιαίο δικάθετο διάνυσμα $\vec{b}$ θα είναι κάθετο στο εγγύτατο επίπεδο και άρα και στα διανύσματα $\vec{t}$ και $\vec{p}$ που το παράγουν. Δηλαδή έχουμε ότι $\vec{b} \perp \vec{t}$ και $\vec{b} \perp \vec{p}$. Αυτό το γεγονός θα παίξει σημαντικό ρόλο στα παρακάτω.

Επιδή το διάνυσμα $\vec{b}$ είναι μοναδιαίο, θα έχουμε

$$\vec{b} \cdot \vec{b} = 1.$$

Διαφορίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς τη φυσική παράμετρο s θα πάρουμε:

$$\vec{b} \cdot \dot{\vec{b}} = 0. \tag{1}$$

Αφού $\vec{b} \perp \vec{t}$, έπεται ότι

$$\vec{b} \cdot \vec{t} = 0,$$

την οποία διαφορίζουμε ως προς s και παίρνουμε:

$$\dot{\vec{b}} \cdot \vec{t} + \vec{b} \cdot \dot{\vec{t}} = 0 \Leftrightarrow \dot{\vec{b}} \cdot \vec{t} = -\vec{b} \cdot \dot{\vec{t}} \tag{2}$$

Όμως είδαμε ότι

$$\dot{\vec{t}} = k\vec{p},$$

όπου k η καμπυλότητα, την οποία σχέση την αντικαθιστούμε στη (2) και παίρνουμε:

$$\dot{\vec{b}} \cdot \vec{t} = -\vec{b} \cdot \dot{\vec{t}} = -k\vec{b} \cdot \vec{p} = 0 \tag{3}$$

διότι $\vec{b} \perp \vec{p}$, οπότε $\vec{b} \cdot \vec{p} = 0$.

Συνεπώς εάν $\dot{\vec{b}} \neq 0$, τότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $\dot{\vec{b}} \perp \vec{b}$ ενώ από τη σχέση (3), με τη βοήθεια της σχέσης (2), προκύπτει ότι και $\dot{\vec{b}} \perp \vec{t}$. Συνεπώς το διάνυσμα $\dot{\vec{b}}$ θα είναι κάθετο στο επίπεδο που παράγουν τα διανύσματα $\vec{b}$ και $\vec{t}$, δηλαδή το διάνυσμα $\dot{\vec{b}}$ θα είναι κάθετο στο ευθειοποιούν επίπεδο, άρα θα πρέπει να είναι παράλληλο με το διάνυσμα $\vec{p}$, (διότι το διάνυσμα $\vec{p}$ είναι επίσης κάθετο στο ευθειοποιούν επίπεδο), συνεπώς το διάνυσμα $\dot{\vec{b}}$ θα βρίσκεται στην πρωτοκάθετη ευθεία της καμπύλης. Θέτουμε λοιπόν:

$$\dot{\vec{b}}(s) := -\tau(s)\vec{p}(s), \tag{4}$$

όπου $\tau(s)$ μια βαθμωτή ποσότητα που είναι συνάρτηση της φυσικής παραμέτρου s της καμπύλης (στον παραπάνω ορισμό υποθέσαμε πως $k(s) > 0$, δηλαδή η καμπυλότητα είναι θετική).

Εάν θεωρήσουμε το εσωτερικό γινόμενο της σχέσης (4) με το μοναδιαίο πρωτοκάθετο διάνυσμα $\vec{p}$, παίρνουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 1. Ονομάζουμε *στρέψη (torsion)* μιας καμπύλης C με παραμετρική παράσταση $\vec{r}(s) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, στο σημείο της καμπύλης με διάνυσμα θέσης $\vec{r}(s)$, την ποσότητα

$$\tau(s) := -\vec{p}(s) \cdot \dot{\vec{b}}(s)$$

Το πρόσημο της στρέψης έχει γεωμετρική σημασία: οι δεξιόστροφες καμπύλες έχουν θετική στρέψη. Η στρέψη μετρά σε κάθε σημείο την απόκλιση μιας καμπύλης από το εγγύτατο επίπεδο αυτής.

Σημείωση 1: Η *καμπυλότητα* και η *στρέψη* μιας καμπύλης λέγονται αντίστοιχα και *πρώτη* και *δεύτερη καμπυλότητα* της καμπύλης.

8.2 Χρήσιμες Εκφράσεις για τη Στρέψη

Έστω $\vec{r}(s) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ η παραμετρική παράσταση μιας (απλής, κανονικής και λείας) καμπύλης C του χώρου με παράμετρο το μήκος τόξου της καμπύλης. Θα δώσουμε κάποιες χρήσιμες εκφράσεις για τη στρέψη της καμπύλης χρησιμοποιώντας την παραμετρική παράσταση $\vec{r}(s)$ της καμπύλης και τις παραγώγους της.

Θεώρημα 1. Η στρέψη μιας καμπύλης με παραμετρική παράσταση $\vec{r}(s)$ δίδεται από τη σχέση:

$$\tau(s) = \frac{|\vec{\dot{r}}(s)\vec{\ddot{r}}(s)\vec{\dddot{r}}(s)|}{|\vec{\ddot{r}}(s)|^2}$$

Σημείωση 1: Επειδή ορίσαμε την καμπυλότητα $k(s) = |\vec{\dot{t}}(s)| = |\vec{\ddot{r}}(s)|$, ενώ για την ακτίνα καμπυλότητας ισχύει ότι $\rho = 1/k$, η παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα και ως εξής:

$$\tau(s) = \frac{|\vec{\dot{r}}(s)\vec{\ddot{r}}(s)\vec{\dddot{r}}(s)|}{k(s)^2} = \rho(s)^2|\vec{\dot{r}}(s)\vec{\ddot{r}}(s)\vec{\dddot{r}}(s)|,$$

χρησιμοποιώντας τον γνωστό συμβολισμό για το μικτό γινόμενο

$$|\vec{\dot{r}}(s)\vec{\ddot{r}}(s)\vec{\dddot{r}}(s)| = \vec{\dot{r}}(s) \cdot [\vec{\ddot{r}}(s) \times \vec{\dddot{r}}(s)].$$

Απόδειξη: Από τον Ορισμό 8.1.1 έχουμε ότι $\tau = -\vec{p} \cdot \vec{\dot{b}}$. (Για απλοποίηση του συμβολισμού δε γράφουμε την εξάρτηση όλων των διανυσματικών συναρτήσεων από τη μεταβλητή s που είναι το μήκος τόξου της καμπύλης). Όμως $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{p}$, συνεπώς εφαρμόζοντας τον κανόνα του Leibniz για την παράγωγο του (εξωτερικού) γινομένου θα πάρουμε $\vec{\dot{b}} = \vec{\dot{t}} \times \vec{p} + \vec{t} \times \vec{\dot{p}}$. Άρα αν αντικαταστήσουμε την τελευταία σχέση στον ορισμό της στρέψης θα πάρουμε

$$\tau = -\vec{p} \cdot (\vec{\dot{t}} \times \vec{p} + \vec{t} \times \vec{\dot{p}}) = -|\vec{p}\vec{\dot{t}}\vec{p}| - |\vec{p}\vec{t}\vec{\dot{p}}| = |\vec{p}\vec{t}\vec{\dot{p}}|.$$

Ο πρώτος όρος του παραπάνω αθροίσματος μηδενίζεται, δηλαδή $|\vec{p}\vec{\dot{t}}\vec{p}| = 0$, διότι εάν αναπτύξουμε το μικτό γινόμενο, κατά τα γνωστά, με την ορίζουσα των συντεταγμένων των τριών διανυσμάτων, η ορίζουσα θα μηδενισθεί διότι θα έχει 2 γραμμές (ή 2 στήλες) *ίδιες* αφού το διάνυσμα $\vec{p}$ εμφανίζεται 2 φορές στο μικτό γινόμενο.

Συνεπώς

$$\tau = |\vec{p}\vec{t}\vec{\dot{p}}| = |\vec{t}\vec{p}\vec{\dot{p}}| = \vec{t} \cdot (\vec{p} \times \vec{\dot{p}}) \tag{5}$$

Θέλουμε να βρούμε μια έκφραση για την παράγωγο του μοναδιαίου πρωτοκάθετου διανύσματος $\vec{\dot{p}}$.

Γνωρίζουμε ότι $\vec{t} = \dot{\vec{r}}$, ενώ

$$\vec{p} = \frac{\dot{\vec{t}}}{|\dot{\vec{t}}|} = \frac{1}{k}\dot{\vec{t}} = \rho\dot{\vec{t}} = \rho\ddot{\vec{r}}, \tag{6}$$

όπου k η καμπυλότητα και $\rho = 1/k$ είναι η ακτίνα καμπυλότητας, με

$$k = |\dot{\vec{t}}| = \sqrt{\dot{\vec{t}} \cdot \dot{\vec{t}}} = \sqrt{\ddot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}}.$$

Για να υπολογίσουμε συνεπώς την παράγωγο του μοναδιαίου πρωτοκάθετου διανύσματος έχουμε:

$$\dot{\vec{p}} = \frac{d}{ds}(\rho\ddot{\vec{r}}) = \dot{\rho}\ddot{\vec{r}} + \rho\dddot{\vec{r}} \tag{7}$$

Θεωρούμε τον πρώτο όρο της σχέσης (7) που περιέχει την παράγωγο της ακτίνας καμπυλότητας $\dot{\rho}$. Υπολογίζουμε:

$$\dot{\rho} = \frac{d}{ds}\rho = \frac{d}{ds}(\frac{1}{k}) = -\frac{\dot{k}}{k^2} = -\frac{1}{k^2}\frac{d}{ds}(\sqrt{\ddot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}}) = -\frac{1}{k^2}\frac{1}{2\sqrt{\ddot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}}}\frac{d}{ds}(\ddot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}) =$$

$$= -\frac{1}{k^2}\frac{1}{2k}2\ddot{\vec{r}} \cdot \dddot{\vec{r}},$$

άρα καταλήγουμε στο ότι

$$\dot{\rho} = -\rho^3\ddot{\vec{r}} \cdot \dddot{\vec{r}}. \tag{8}$$

Αντικαθιστούμε τη σχέση (8) στην (7) και παίρνουμε

$$\dot{\vec{p}} = (-\rho^3\ddot{\vec{r}} \cdot \dddot{\vec{r}}) \cdot \ddot{\vec{r}} + \rho\dddot{\vec{r}} \tag{9}$$

και στη συνέχεια αντικαθιστούμε τη σχέση (9) και τη σχέση (6) στη σχέση (5) και παίρνουμε:

$$\tau = |\vec{t}\vec{p}\dot{\vec{p}}| = |\dot{\vec{r}}\rho\ddot{\vec{r}}[(-\rho^3\ddot{\vec{r}} \cdot \dddot{\vec{r}}) \cdot \ddot{\vec{r}} + \rho\dddot{\vec{r}}]| =$$

(εφαρμόζουμε τη γνωστή ιδιότητα του μικτού γινομένου που λέει ότι εάν αλλάξουμε την σειρά των παραγόντων το μικτό γινόμενο δε μεταβάλλεται)

$$= |[(-\rho^3\ddot{\vec{r}} \cdot \dddot{\vec{r}}) \cdot \ddot{\vec{r}} + \rho\dddot{\vec{r}}]\dot{\vec{r}}\rho\ddot{\vec{r}}| =$$

(εφαρμόζουμε και πάλι άλλη γνωστή ιδιότητα του μικτού γινομένου, ότι το γινόμενο είναι επιμεριστικό ως προς την πρόσθεση)

$$= |[(-\rho^3\vec{\ddot{r}}\cdot\vec{\dddot{r}})\cdot\vec{\ddot{r}}]\vec{\dot{r}}\rho\vec{\ddot{r}}| + |\rho\vec{\dddot{r}}\vec{\dot{r}}\rho\vec{\ddot{r}}| =$$

$$= 0 + \rho^2|\vec{\dot{r}}\vec{\ddot{r}}\vec{\dddot{r}}|$$

που είναι το ζητούμενο. □

Σημείωση 2: Η ποσότητα μικτό-γινόμενο

$$|[(-\rho^3\vec{\ddot{r}}\cdot\vec{\dddot{r}})\cdot\vec{\ddot{r}}]\vec{\dot{r}}\rho\vec{\ddot{r}}| = 0$$

διότι: αρχικά παρατηρούμε ότι η ποσότητα εντός της παρενθέσεως $(-\rho^3\vec{\ddot{r}}\cdot\vec{\dddot{r}})$ είναι *βαθμωτή ποσότητα* (βλέπε σχέση (8), η ποσότητα αυτή δίδει την παράγωγο της ακτίνας καμπυλότητας), η οποία πολλαπλασιάζει τη διανυσματική συνάρτηση $\vec{\ddot{r}}$. Συνεπώς στο εν λόγω μικτό γινόμενο, ο πρώτος παράγοντας και ο τρίτος, είναι συγγραμμικά διανύσματα, παράλληλα και τα δύο με το διάνυσμα $\vec{\ddot{r}}$. Συνεπώς εάν αναπτύξουμε το μικτό γινόμενο με την αντίστοιχη ορίζουσα των συντεταγμένων των διανυσμάτων, η ορίζουσα θα μηδενισθεί, διότι θα έχει 2 γραμμές (ή 2 στήλες) *ανάλογες*, δηλαδή θα διαφέρουν κατά ένα βαθμωτό πολλαπλάσιο.

Θα δούμε στη συνέχεια και μια ισοδύναμη έκφραση της στρέψης στην περίπτωση που η παραμετρική παράσταση της καμπύλης δεν είναι ως προς τη φυσική παράμετρο.

Θεώρημα 2. Η στρέψη μιας καμπύλης με παραμετρική παράσταση $\vec{r}(t) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, όπου η παράμετρος t δεν είναι η φυσική παράμετρος της καμπύλης, δίδεται από τη σχέση:

$$\tau(t) = \frac{|\vec{r'}(t)\vec{r''}(t)\vec{r'''}(t)|}{|\vec{r'}(t)\times\vec{r''}(t)|^2}$$

Απόδειξη: Έχουμε ότι:

$$\vec{\dot{r}} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{t}\vec{r'}$$

οπότε για την δεύτερη παράγωγο θα έχουμε

$$\vec{\ddot{r}} = \frac{d}{ds}(\dot{t}\vec{r'}) = \ddot{t}\vec{r'} + \dot{t}(\frac{d}{ds}\vec{r'}) = \ddot{t}\vec{r'} + \dot{t}(\frac{dt}{ds}\frac{d\vec{r'}}{dt}) = \ddot{t}\vec{r'} + (\dot{t})^2\vec{r''}.$$

Εντελώς ανάλογα υπολογίζουμε και την τρίτη παράγωγο:

$$\dddot{\vec{r}} = \frac{d}{ds}[\ddot{t}\vec{r'} + (\dot{t})^2\vec{r''}] = \dddot{t}\vec{r'} + \ddot{t}(\frac{d}{ds}\vec{r'}) + [\frac{d}{ds}(\dot{t})^2]\vec{r''} + (\dot{t})^2\frac{d}{ds}\vec{r''} =$$

$$= \dddot{t}\vec{r'} + \ddot{t}\frac{dt}{ds}\frac{d\vec{r'}}{dt} + 2\dot{t}\ddot{t}\vec{r''} + (\dot{t})^2\frac{dt}{ds}\frac{d\vec{r''}}{dt} =$$
$$= \dddot{t}\vec{r'} + \ddot{t}\dot{t}\vec{r''} + 2\dot{t}\ddot{t}\vec{r''} + (\dot{t})^2\dot{t}\vec{r'''} = \dddot{t}\vec{r'} + 3\dot{t}\ddot{t}\vec{r''} + (\dot{t})^3\vec{r'''}.$$

Συνεπώς

$$|\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}}\dddot{\vec{r}}| = \dot{t}\vec{r'} \cdot [(\ddot{t}\vec{r'} + (\dot{t})^2\vec{r''}] \times [\dddot{t}\vec{r'} + 3\dot{t}\ddot{t}\vec{r''} + (\dot{t})^3\vec{r'''})] =$$

$$(\dot{t}\vec{r'})\cdot[\ddot{t}\dddot{t}(\vec{r'}\times\vec{r'})+3\dot{t}(\ddot{t})^2(\vec{r'}\times\vec{r''})+(\dot{t})^3\ddot{t}(\vec{r'}\times\vec{r'''})+(\dot{t})^2\dddot{t}(\vec{r''}\times\vec{r'})+3(\dot{t})^3\ddot{t}(\vec{r''}\times\vec{r''})+(\dot{t})^5(\vec{r''}\times\vec{r'''})]$$

Όμως τα εξωτερικά γινόμενα $\vec{r'} \times \vec{r'} = \vec{r''} \times \vec{r''} = 0$, οπότε η παραπάνω ισότητα δίδει:

$$= (\dot{t}\vec{r'}) \cdot [3\dot{t}(\ddot{t})^2(\vec{r'} \times \vec{r''}) + (\dot{t})^3\ddot{t}(\vec{r'} \times \vec{r'''}) + (\dot{t})^2\dddot{t}(\vec{r''} \times \vec{r'}) + (\dot{t})^5(\vec{r''} \times \vec{r'''})]$$

$$= 3(\dot{t})^2(\ddot{t})^2|\vec{r'}\vec{r'}\vec{r''}| + \ddot{t}(\dot{t})^4|\vec{r'}\vec{r'}\vec{r'''}| + (\dot{t})^4\dddot{t}|\vec{r'}\vec{r''}\vec{r'}| + (\dot{t})^6|\vec{r'}\vec{r''}\vec{r'''}| =$$
$$= (\dot{t})^6|\vec{r'}\vec{r''}\vec{r'''}|$$

διότι όλα τα υπόλοιπα μικτά γινόμενα μηδενίζονται επειδή εμφανίζονται 2 ίδια διανύσματα οπότε η ορίζουσα θα έχει 2 ίδιες γραμμές (ή 2 ίδιες στήλες).

Καταλήξαμε λοιπόν στη σχέση

$$|\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}}\dddot{\vec{r}}| = (\dot{t})^6|\vec{r'}\vec{r''}\vec{r'''}|.$$

Όμως

$$\dot{t} = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}}$$

και

$$s = \int_{t_0}^{t} |\vec{r'}|dt \Rightarrow \frac{ds}{dt} = |\vec{r'}| \Rightarrow \dot{t} = \frac{1}{|\vec{r'}|}.$$

Άρα

$$|\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}}\dddot{\vec{r}}| = \frac{|\vec{r'}\vec{r''}\vec{r'''}|}{|\vec{r'}|^6}.$$

Όμως από το Θεώρημα 8.2.1 της παρούσης παραγράφου έχουμε ότι

$$|\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}}\dddot{\vec{r}}| = k^2\tau$$

ενώ από το Πρόταση 6.4.2 έχουμε ότι

$$k = \frac{|\vec{r'} \times \vec{r''}|}{|\vec{r'}|^3},$$

συνεπώς

$$k^2\tau = \frac{|\vec{r'}\vec{r''}\vec{r'''}|}{|\vec{r'}|^6} = \frac{|\vec{r'} \times \vec{r''}|^2}{|\vec{r'}|^6}\tau \Leftrightarrow \tau = \frac{|\vec{r'}\vec{r''}\vec{r'''}|}{|\vec{r'} \times \vec{r''}|^2}.$$

που είναι το ζητούμενο. □

Σημείωση 3: Είδαμε πως η καμπυλότητα μετρά τη μεταβολή (ανά μονάδα μήκους της καμπύλης) της διεύθυνσης του μοναδιαίου εφαπτόμενου διανύσματος, άρα δείχνει πόσο διαφέρει μια καμπύλη από την ευθεία, της οποίας το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα έχει σταθερή διεύθυνση, τη διεύθυνση της ευθείας. Ανάλογα, η στρέψη μετρά τη μεταβολή του εγγύτατου επιπέδου. Όπως προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της στρέψης, οι επίπεδες καμπύλες έχουν μηδενική στρέψη διότι έχουν σταθερό εγγύτατο επίπεδο, συνεπώς η στρέψη ουσιαστικά μετρά πόσο διαφέρει μια καμπύλη από μια επίπεδη καμπύλη.

8.3 Εφαρμογή

Ως εφαρμογή θα υπολογίσουμε την στρέψη της κυκλοειδούς έλικας η οποία έχει παραμετρική παράσταση

$$\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt),$$

όπου $t \in [0, 2\pi]$.

Επειδή η παραμετρική παράσταση δεν έχει ως παράμετρο την φυσική παράμετρο (μήκος τόξου) της κυκλοειδούς έλικας, θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$\tau(t) = \frac{|\vec{r'}(t)\vec{r''}(t)\vec{r'''}(t)|}{|\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t)|^2}.$$

Υπολογίζουμε λοιπόν τις εξής ποσότητες:

$$\vec{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b),$$

ενώ

$$\vec{r}''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0),$$

και
$$\vec{r}'''(t) = (a\sin t, -a\cos t, 0).$$
Άρα
$$\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= (a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t)\hat{k} - b(-a\sin t\hat{i} + a\cos t\hat{j}) + 0 = a^2\hat{k} + ab\sin t\hat{i} - ab\cos t\hat{j},$$
συνεπώς
$$|\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t)|^2 = a^4 + a^2b^2\sin^2 t + a^2b^2\cos^2 t = a^4 + a^2b^2 = a^2(a^2+b^2).$$
Τέλος το μικτό γινόμενο υπολογίζεται από το γνωστό τύπο με τη χρήση της ορίζουσας των συντεταγμένων των διανυσμάτων ως εξής:
$$\vec{r'}(t) \cdot [\vec{r''}(t) \times \vec{r'''}(t)] = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= b(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t) = ba^2.$$

Συνεπώς, αν αντικαταστήσουμε τις ποσότητες που υπολογίσαμε στον τύπο της στρέψης, προκύπτει:
$$\tau = \frac{ba^2}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{b}{a^2+b^2}.$$
Παρατηρούμε ότι η στρέψη της κυκλοειδούς έλικας είναι *σταθερή*.

9 Εξισώσεις Frenet-Seret

9.1 Βασική Θεωρία

Έστω $\vec{r}(s) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ η παραμετρική παράσταση μιας (απλής, κανονικής και λείας) καμπύλης C του χώρου με παράμετρο το μήκος τόξου s της καμπύλης. Ορίσαμε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης

$$\vec{t}(s) = \dot{\vec{r}}(s),$$

την καμπυλότητα

$$k(s) = |\dot{\vec{t}}(s)|,$$

καθώς και το μοναδιαίο πρωτοκάθετο διάνυσμα

$$\vec{p}(s) = \frac{\dot{\vec{t}}(s)}{|\dot{\vec{t}}(s)|}$$

της καμπύλης.

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε εύκολα

$$\vec{p}(s) = \frac{\dot{\vec{t}}(s)}{k(s)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{\vec{t}}(s) = k(s)\vec{p}(s). \tag{10}$$

Επίσης από τη σχέση 8.1.4 και τον Ορισμό 8.1.1 της στρέψης μιας καμπύλης είδαμε ότι

$$\dot{\vec{b}}(s) = \tau(s)\vec{p}(s), \tag{11}$$

όπου $\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{p}(s)$ το μοναδιαίο δικάθετο διάνυσμα της καμπύλης.

Θέλουμε να βρούμε μια σχέση ανάλογη των (10) και (11) για την πρώτη παράγωγο του μοναδιαίου πρωτοκάθετου διανύσματος $\vec{p}(s)$.

Επειδή το διάνυσμα $\vec{p}$ είναι μοναδιαίο, ισχύει ότι $\vec{p} \cdot \vec{p} = 1$. Διαφορίζουμε τη σχέση αυτή ως προς s και παίρνουμε $\vec{p} \cdot \dot{\vec{p}} = 0$, οπότε εάν $\dot{\vec{p}} \neq 0$, θα έχουμε $\dot{\vec{p}} \perp \vec{p}$, άρα το διάνυσμα $\dot{\vec{p}}$ θα ανήκει στο ευθειοποιούν επίπεδο που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{t}$ και $\vec{b}$, (και στο οποίο ευθειοποιούν επίπεδο το διάνυσμα $\vec{p}$ είναι κάθετο), συνεπώς θα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός αυτών:

$$\dot{\vec{p}}(s) = a(s)\vec{t}(s) + c(s)\vec{b}(s), \tag{12}$$

για κάποιες *βαθμωτές συναρτήσεις* $a(s)$ και $c(s)$ τις οποίες θα προσδιορίσουμε.

Πολλαπλασιάζουμε την (12) εσωτερικά με τα διανύσματα $\vec{t}$ και $\vec{b}$ και παίρνουμε

$$\dot{\vec{p}} \cdot \vec{t} = a(s)$$

και

$$\dot{\vec{p}} \cdot \vec{b} = c(s)$$

διότι τα $\vec{t}$ και $\vec{b}$ είναι μοναδιαία και $\vec{t} \perp \vec{b}$.

Επειδή $\vec{p} \perp \vec{t}$, έπεται ότι $\vec{p} \cdot \vec{t} = 0$, την οποία σχέση εάν τη διαφορίσουμε ως προς s θα πάρουμε

$$\dot{\vec{p}} \cdot \vec{t} + \vec{p} \cdot \dot{\vec{t}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{\vec{p}} \cdot \vec{t} = -\vec{p} \cdot \dot{\vec{t}} = -\vec{p} \cdot (k\vec{p}) = -k \tag{13}$$

όπου λάβαμε υπ΄ όψιν μας τη σχέση (10).

Όμως είδαμε παραπάνω ότι

$$\dot{\vec{p}} \cdot \vec{t} = a(s),$$

οπότε

$$a(s) = -k(s) \tag{14}$$

Επειδή $\vec{p} \perp \vec{b}$, έπεται ότι $\vec{p} \cdot \vec{b} = 0$, την οποία σχέση εάν τη διαφορίσουμε ως προς s θα πάρουμε

$$\dot{\vec{p}} \cdot \vec{b} + \vec{p} \cdot \dot{\vec{b}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{\vec{p}} \cdot \vec{b} = -\vec{p} \cdot \dot{\vec{b}} = -\vec{p} \cdot (-\tau\vec{p}) = \tau, \tag{15}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (11).

Όμως είδαμε παραπάνω ότι

$$\vec{p} \cdot \vec{b} = c(s),$$

οπότε

$$c(s) = \tau(s) \tag{16}$$

Άρα λοιπόν αντικαθιστώντας τις (14) και (16) στην (12) παίρνουμε το ζητούμενο

$$\dot{\vec{p}}(s) = -k(s)\vec{t}(s) + \tau(s)\vec{b}(s). \tag{17}$$

Ορισμός 1. Οι εξισώσεις

$$\dot{\vec{t}}(s) = k(s)\vec{p}(s),$$

$$\dot{\vec{p}}(s) = -k(s)\vec{t}(s) + \tau(s)\vec{b}(s)$$

και

$$\dot{\vec{b}}(s) = \tau(s)\vec{p}(s),$$

όπου $k(s)$ και $\tau(s)$ η καμπυλότητα και η στρέψη της καμπύλης αντίστοιχα, λέγονται *εξισώσεις Frenet-Seret* της καμπύλης.

9.2 Σφαιρικές Δείκτριες μιας Καμπύλης

Ως εφαρμογή των εξισώσεων Frenet-Seret θα μελετήσουμε σύντομα τις *σφαιρικές δείκτριες* μιας καμπύλης.

Έστω C μια καμπύλη του χώρου $\mathbb{R}^3$ (εφοδιασμένου με ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $Oxyz$), με φυσική παραμετρική παράσταση $\vec{r}(s) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ κλάσης τουλάχιστον 3 με καμπυλότητα $k(s) \neq 0$. Θεωρούμε τα διανύσματα του τριέδρου Frenet $\{\vec{t}(s), \vec{p}(s), \vec{b}(s)\}$ της C μετατοπισμένα στην αρχή των αξόνων O. Επειδή είναι μοναδιαία, τα πέρατά τους θα βρίσκονται πάντα επί της μοναδιαίας σφαίρας S^2 με κέντρο το σημείο O. Καθώς το τρίεδρο Frenet κινείται πάνω στην καμπύλη (καθώς μεταβάλλεται η τιμή της φυσικής παραμέτρου s), τα πέρατα των διανυσμάτων $\{\vec{t}(s), \vec{p}(s), \vec{b}(s)\}$ θα διαγράφουν κάποιες *καμπύλες* πάνω στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας S^2, οι οποίες λέγονται *σφαιρικές δείκτριες* της καμπύλης C. Η σφαιρική δείκτρια που διαγράφεται από το πέρας του μοναδιαίου εφαπτόμενου διανύσματος $\vec{t}(s)$ πάνω στη μοναδιαία σφαίρα λέγεται *εφαπτόμενη δείκτρια* και έχει παραμετρική παράσταση $\vec{r}_t(s) = \vec{t}(s) = \dot{\vec{r}}(s)$. Η σφαιρική δείκτρια που διαγράφεται από το πέρας του μοναδιαίου πρωτοκάθετου διανύσματος $\vec{p}(s)$ πάνω στη μοναδιαία σφαίρα λέγεται *πρωτοκάθετη δείκτρια* και έχει παραμετρική παράσταση $\vec{r}_p(s) = \vec{p}(s)$. Τέλος η σφαιρική δείκτρια που διαγράφεται από το πέρας του μοναδιαίου δικάθετου διανύσματος $\vec{b}(s)$ πάνω στη μοναδιαία σφαίρα λέγεται *δικάθετη δείκτρια* και έχει παραμετρική παράσταση $\vec{r}_b(s) = \vec{b}(s)$.

Για παράδειγμα η εφαπτόμενη δείκτρια μιας *ευθείας* στο χώρο είναι ένα *σταθερό σημείο* πάνω στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας.

Θεώρημα 1. Έστω C μια καμπύλη του χώρου $\mathbb{R}^3$ (εφοδιασμένου με ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $Oxyz$), με φυσική παραμετρική παράσταση $\vec{r}(s) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (κλάσης τουλάχιστον 3), με καμπυλότητα $k(s)$ και στρέψη $\tau(s)$. Έστω $\vec{r}_t(s) = \vec{t}(s) = \dot{\vec{r}}(s)$ η παραμετρική παράσταση της εφαπτόμενης δείκτριας της καμπύλης C. Τότε για την καμπυλότητα της εφαπτόμενης δείκτριας k_t, ισχύει η σχέση:

$$k_t^2 = \frac{k^2 + \tau^2}{k^2}.$$

Απόδειξη: Αρχικά πρέπει να παρατηρήσουμε πως ενώ η s είναι η φυσική παράμετρος της καμπύλης C, δεν είναι απαραίτητο να είναι και η φυσική παράμετρος της σφαιρικής δείκτριας. Συνεπώς για την καμπυλότητα θα χρησιμοποιήσουμε τη γενικότερη έκφραση

$$k_t = \frac{|\vec{r'}_t \times \vec{r''}_t|}{|\vec{r'}_t|^3}.$$

Όμως

$$\vec{r}_t = \vec{t}(s) = \dot{\vec{r}} \Rightarrow \vec{r'}_t = \frac{d\vec{r}_t}{ds} = \frac{d\vec{t}(s)}{ds} = \dot{\vec{t}} = k\vec{p},$$

χρησιμοποιώντας την πρώτη εξίσωση Frenet-Seret για την καμπύλη C.

Επίσης, αν παραγωγήσουμε την παραπάνω σχέση, θα πάρουμε

$$\vec{r''}_t = \dot{k}\vec{p} + k\dot{\vec{p}} = \dot{k}\vec{p} + k(-k\vec{t} + \tau\vec{b}) = \dot{k}\vec{p} + k\tau\vec{b} - k^2\vec{t},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη δεύτερη εξίσωση Frenet-Seret για την καμπύλη C.

Τώρα κάνουμε την κρίσιμη παρατήρηση: *γνωρίζουμε ότι το εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων δεν εξαρτάται από την επιλογή συστήματος συντεταγμένων.* Συνεπώς για τον υπολογισμό του εξωτερικού γινομένου $\vec{r'}_t \times \vec{r''}_t$ που απαιτείται για να εφαρμόσουμε τη σχέση που δίδει την καμπυλότητα, δε θα επιλέξουμε ως βάση τα γνωστά μοναδιαία διανύσματα $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ του Καρτεσιανού Συστήματος Συντεταγμένων, αλλά τα μοναδιαία διανύσματα του τριέδρου Frenet $\{\vec{t}, \vec{p}, \vec{b}\}$. Οπότε θα πάρουμε:

$$\vec{r'}_t \times \vec{r''}_t = \begin{vmatrix} \vec{t} & \vec{p} & \vec{b} \\ 0 & k & 0 \\ -k^2 & \dot{k} & k\tau \end{vmatrix} =$$

$$= k(k\tau\vec{t} + k^2\vec{b}) = k^2(\tau\vec{t} + k\vec{b}).$$

Τότε όμως

$$|\vec{r'}_t \times \vec{r''}_t|^2 = (\vec{r'}_t \times \vec{r''}_t) \cdot (\vec{r'}_t \times \vec{r''}_t) = [k^2(\tau\vec{t} + k\vec{b})] \cdot [k^2(\tau\vec{t} + k\vec{b})] = k^4(k^2 + \tau^2).$$

Στην τελευταία ισότητα εκτελέσαμε επιμεριστικά τις πράξεις λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι $\vec{t} \cdot \vec{t} = \vec{b} \cdot \vec{b} = 1$ και $\vec{t} \cdot \vec{b} = 0$. Οπότε

$$|\vec{r'}_t \times \vec{r''}_t| = k^2\sqrt{k^2 + \tau^2}.$$

Ανάλογα, χρησιμοποιώντας τη σχέση που υπολογίσαμε ότι $\vec{r}_t = k\vec{p}$, παίρνουμε ότι

$$|\vec{r'}_t| = \sqrt{k\vec{p} \cdot k\vec{p}} = k,$$

οπότε τελικά αν αντικαταστήσουμε τις ποσότητες που υπολογίσαμε στην αρχική έκφραση για τη ζητούμενη καμπυλότητα της σφαιρικής δείκτριας, θα πάρουμε ότι

$$k_t = \frac{k^2\sqrt{k^2 + \tau^2}}{k^3} \Rightarrow k_t^2 = \frac{k^2 + \tau^2}{k^2},$$

που είναι το ζητούμενο. □

10 Θεμελιώδες Θεώρημα Θεωρίας Καμπυλών στον $\mathbb{R}^3$

Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο τις τρεις εξισώσεις Frenet-Seret που αποτελούν ένα σύστημα από τρεις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης ως προς τις διανυσματικές συναρτήσεις $\vec{t}(s)$, $\vec{p}(s)$ και $\vec{b}(s)$.

Είναι λογικό να αναρωτηθούμε το εξής: *δοθέντων δύο συνεχών συναρτήσεων* $k(s)$ και $\tau(s)$, *εάν υπάρχουν λύσεις* $\vec{t}(s)$, $\vec{p}(s)$ και $\vec{b}(s)$ των εξισώσεων Frenet-Seret και, επειδή εξ ορισμού $\dot{\vec{r}}(s) = \vec{t}(s)$, *εάν υπάρχει καμπύλη*

$$\vec{r}(s) = \int \vec{t}(s)ds + const$$

με καμπυλότητα και στρέψη τις δοθείσες συνεχείς συναρτήσεις $k(s)$ και $\tau(s)$ αντίστοιχα.

Η απάντηση δίδεται από το παρακάτω *Θεμελιώδες Θεώρημα Ύπαρξης και Μοναδικότητας Καμπυλών στον* $\mathbb{R}^3$:

Θεώρημα 1. (*Θεμελιώδες Θεώρημα Θεωρίας Καμπυλών στον* $\mathbb{R}^3$).
Έστω $k(s)$ και $\tau(s)$ δύο τυχαίες συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα $a \leq s \leq b$. Τότε υπάρχει μοναδική καμπύλη C κλάσης 2, με παραμετρική παράσταση $\vec{r}(s) : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, όπου s η φυσική παράμετρος της καμπύλης, με καμπυλότητα και στρέψη που δίδονται από τις συναρτήσεις $k(s)$ και $\tau(s)$ αντίστοιχα. Η θέση της καμπύλης C στο χώρο δεν προσδιορίζεται μονοσήμαντα, αλλά υπόκειται σε στροφές και μετατοπίσεις.

Απόδειξη:

1. Απόδειξη Ύπαρξης:

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, (λόγου χάριν μέσω μιας αλλαγής παραμέτρου), θεωρούμε ότι $s \in [0,a] \subset \mathbb{R}$ και επιλέγουμε ένα Καρτεσιανό Δεξιόστροφο Ορθοκανονικό Σύστημα Μοναδιαίων Διανυσμάτων ως βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$, τα γνωστά μας $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$.

Οι τρεις εξισώσεις Frenet-Seret
$\dot{\vec{t}}(s) = k(s)\vec{p}(s)$
$\dot{\vec{p}}(s) = -k(s)\vec{t}(s) + \tau(s)\vec{b}(s)$

$\dot{\vec{b}}(s) = \tau(s)\vec{p}(s)$,
αν αναλύσουμε τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{t}(s)$, $\vec{p}(s)$ και $\vec{b}(s)$ σε συνιστώσες παράλληλες με τα διανύσματα της βάσης $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ του $\mathbb{R}^3$, θα δώσουν 9 γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης. Θεωρούμε τις αρχικές συνθήκες $\vec{t}(0) = \hat{\imath}$, $\vec{p}(0) = \hat{\jmath}$ και $\vec{b}(0) = \hat{k}$. Από τη σχετική θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων γνωρίζουμε πως υπάρχει *μοναδική λύση κλάσης 1* με τις παραπάνω επιλεγείσες αρχικές συνθήκες. Άρα η ύπαρξη της καμπύλης με τις δεδομένες συνεχείς συναρτήσεις $k(s)$ και $\tau(s)$ ως καμπυλότητα και στρέψη αντίστοιχα, προκύπτει ουσιαστικά από τις εξισώσεις Frenet-Seret και την θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.

Στη συνέχεια πρέπει να δείξουμε πως και η τριάδα $\{\vec{t}(s), \vec{p}(s), \vec{b}(s)\}$, αποτελεί μια επίσης δεξιόστροφη ορθοκανονική τριάδα $\forall s \in [0, a]$, έχοντας υποθέσει πως αυτό ισχύει για $s = 0$.

Για να το δείξουμε αυτό, θεωρούμε τις 6 συναρτήσεις (ως προς τη μεταβλητή s): $\vec{t} \cdot \vec{t}$, $\vec{t} \cdot \vec{p}$, $\vec{t} \cdot \vec{b}$, $\vec{p} \cdot \vec{p}$, $\vec{p} \cdot \vec{b}$ και $\vec{b} \cdot \vec{b}$. Με τη χρήση των εξισώσεων Frenet-Seret βρίσκουμε ότι οι 6 αυτές συναρτήσεις (ως προς s), ικανοποιούν τις εξής γραμμικές, συνήθεις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης (η επιλογή των 6 εξισώσεων αυτών είναι οι σχέσεις που πρέπει να ικανοποιούν τα διανύσματα $\{\vec{t}(s), \vec{p}(s), \vec{b}(s)\}$, για να είναι μοναδιαία, ορθογώνια και δεξιόστροφα):

$$\frac{d}{ds}(\vec{t} \cdot \vec{t}) = 2\dot{\vec{t}} \cdot \vec{t} = 2k(\vec{p} \cdot \vec{t}) \tag{18}$$

$$\frac{d}{ds}(\vec{t} \cdot \vec{p}) = \dot{\vec{t}} \cdot \vec{p} + \vec{t} \cdot \dot{\vec{p}} = k(\vec{p} \cdot \vec{p}) + \vec{t} \cdot (-k\vec{t} + \tau\vec{b}) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{ds}(\vec{t} \cdot \vec{p}) = k\vec{p} \cdot \vec{p} + \tau\vec{t} \cdot \vec{b} - k\vec{t} \cdot \vec{t} \tag{19}$$

$$\frac{d}{ds}(\vec{t} \cdot \vec{b}) = \dot{\vec{t}} \cdot \vec{b} + \vec{t} \cdot \dot{\vec{b}} = k(\vec{p} \cdot \vec{b}) - \tau\vec{t} \cdot \vec{p} \tag{20}$$

$$\frac{d}{ds}(\vec{p} \cdot \vec{p}) = 2\dot{\vec{p}} \cdot \vec{p} = -2k(\vec{t} \cdot \vec{p}) + 2\tau\vec{b} \cdot \vec{p} \tag{21}$$

$$\frac{d}{ds}(\vec{p} \cdot \vec{b}) = \dot{\vec{p}} \cdot \vec{b} + \vec{p} \cdot \dot{\vec{b}} = (-k(\vec{t} + \tau\vec{b}) \cdot \vec{b} + \vec{p} \cdot (-\tau\vec{p}) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{ds}(\vec{p}\cdot\vec{b}) = -k\vec{t}\cdot\vec{b} + \tau\vec{b}\cdot\vec{b} - \tau\vec{p}\cdot\vec{p} \tag{22}$$

$$\frac{d}{ds}(\vec{b}\cdot\vec{b}) = 2\dot{\vec{b}}\cdot\vec{b} = -2\tau(\vec{p}\cdot\vec{b}) \tag{23}$$

με τις εξής αρχικές συνθήκες:

$(\vec{t}\cdot\vec{t})(0) = 1,$
$(\vec{t}\cdot\vec{p})(0) = 0,$
$(\vec{t}\cdot\vec{b})(0) = 0,$
$(\vec{p}\cdot\vec{p})(0) = 1,$
$(\vec{p}\cdot\vec{b})(0) = 0$ και
$(\vec{b}\cdot\vec{b})(0) = 1.$

Το παραπάνω σύστημα των 6 εξισώσεων (18-23), με τις συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες που επιλέξαμε, έχει λύση την $(1,0,0,1,0,1)$. Όμως από τη θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων η λύση αυτή είναι *μοναδική*, άρα θα πρέπει να ισχύει ότι $\vec{t}\cdot\vec{t} = 1$, $\vec{t}\cdot\vec{p} = 0$, $\vec{t}\cdot\vec{b} = 0$, $\vec{p}\cdot\vec{p} = 1$, $\vec{p}\cdot\vec{b} = 0$ και $\vec{b}\cdot\vec{b} = 1$, *για κάθε* s. Συνεπώς η τριάδα $\{\vec{t}(s), \vec{p}(s), \vec{b}(s)\}$, είναι ορθοκανονική $\forall s$. Είναι και δεξιόστροφη $\forall s$, διότι οι διανυσματικές συναρτήσεις $\{\vec{t}(s), \vec{p}(s), \vec{b}(s)\}$, είναι συνεχείς και από την επιλογή των αρχικών συνθηκών η τριάδα αυτή είναι δεξιόστροφη στο σημείο $s = 0$ (υπενθυμίζουμε πως οι αρχικές συνθήκες που επιλέξαμε είναι $\vec{t}(0) = \hat{i}$, $\vec{p}(0) = \hat{j}$ και $\vec{b}(0) = \hat{k}$).

Ορίζουμε λοιπόν την καμπύλη

$$\vec{r}(s) := \int_0^s \vec{t}(l)dl$$

Αφού η διανυσματική συνάρτηση $\vec{t}$ είναι κλάσης 1, η διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}$ θα είναι κλάσης 2. Επίσης $|\dot{\vec{r}}| = |\vec{t}| = 1$, άρα η s είναι φυσική παράμετρος. Επιπλέον, επειδή $\dot{\vec{t}} = k\vec{p}$ και $|\vec{p}| = 1$, έπεται ότι η καμπυλότητα της καμπύλης είναι k. Τέλος, επειδή $\vec{b} = \vec{t}\times\vec{p}$ και

$$\dot{\vec{b}} = \dot{\vec{t}}\times\vec{p} + \vec{t}\times\dot{\vec{p}} = k(\vec{p}\times\vec{p}) + [-k(\vec{t}\times\vec{t})] + \tau(\vec{t}\times\vec{b}) = -\tau\vec{p},$$

όπου $|\vec{b}| = 1$, έπεται ότι η στρέψη της καμπύλης είναι τ.

2. Απόδειξη Μοναδικότητας:

Έστω C και C' δύο καμπύλες για τις οποίες ισχύει ότι $k(s) = k'(s)$ και $\tau(s) = \tau'(s)$, $\forall s \in [a, b]$ χρησιμοποιώντας προφανή συμβολισμό για την καμπυλότητα και την στρέψη των δύο καμπυλών. Μετατοπίζουμε έστω την C' έτσι ώστε για κάποιο $s = s_0$ τα αντίστοιχα σημεία των καμπυλών να συμπέσουν και ταυτόχρονα τις περιστρέφουμε κατάλληλα στο σημείο s_0 έτσι ώστε να ταυτισθούν και τα κινούμενα τρίεδρά τους, δηλαδή $(\vec{t'_0}, \vec{p'_0}, \vec{b'_0}) = (\vec{t_0}, \vec{p_0}, \vec{b_0})$.

[*Σημείωση 1:* Προς αποφυγή οποιασδήποτε σύγχυσης αναφέρουμε πως στην παρούσα παράγραφο ο τόνος συμβολίζει την δεύτερη καμπύλη και όχι παράγωγο ως προς την μεταβλητή t. Άλλωστε είναι εμφανές πως μόνο την φυσική παράμετρο χρησιμοποιούμε στην απόδειξη του θεωρήματος].

Διαφορίζουμε ως προς s τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{t} \cdot \vec{t'}$, $\vec{p} \cdot \vec{p'}$ και $\vec{b} \cdot \vec{b'}$ και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Frenet-Seret παίρνουμε:

$$\frac{d}{ds}(\vec{t} \cdot \vec{t'}) = \dot{\vec{t}} \cdot \vec{t'} + \vec{t} \cdot \dot{\vec{t'}} = k\vec{p} \cdot \vec{t'} + k\vec{t} \cdot \vec{p'} = k(\vec{p} \cdot \vec{t'} + \vec{p'} \cdot \vec{t}),$$

$$\frac{d}{ds}(\vec{p} \cdot \vec{p'}) = \dot{\vec{p}} \cdot \vec{p'} + \vec{p} \cdot \dot{\vec{p'}} = (-k\vec{t} + \tau\vec{b}) \cdot \vec{p'} + \vec{p} \cdot (k\vec{t'} + \tau\vec{b'} =$$

$$= -k(\vec{t} \cdot \vec{p'} + \vec{p} \cdot \vec{t'}) + \tau(\vec{b} \cdot \vec{p'} + \vec{b} \cdot \dot{\vec{b'}}),$$

$$\frac{d}{ds}(\vec{b} \cdot \vec{b'}) = \dot{\vec{b}} \cdot \vec{b'} + \vec{b} \cdot \dot{\vec{b'}} = -\tau\vec{p} \cdot \vec{b'} - \tau\vec{b} \cdot \vec{p'} = -\tau(\vec{p} \cdot \vec{b'} + \vec{p'} \cdot \vec{b}).$$

Προσθέτουμε τις τρεις αυτές εξισώσεις κατά μέλη και παίρνουμε:

$$\frac{d}{ds}(\vec{t} \cdot \vec{t'} + \vec{p} \cdot \vec{p'} + \vec{b} \cdot \vec{b'}) = 0$$

και ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\vec{t} \cdot \vec{t'} + \vec{p} \cdot \vec{p'} + \vec{b} \cdot \vec{b'} = const.$$

Για $s = s_0$, τα τρίεδρα Frenet ταυτίζονται, άρα το παραπάνω άθροισμα δίδει αποτέλεσμα 3 αφού όλα τα διανύσματα είναι μοναδιαία. Αφού όμως το αποτέλεσμα είναι 3 για $s = s_0$, το αυτό θα πρέπει να ισχύει $\forall s \in [a, b]$, συνεπώς καταλήξαμε στη σχέση

$$\vec{t} \cdot \vec{t'} + \vec{p} \cdot \vec{p'} + \vec{b} \cdot \vec{b'} = 3 \tag{24}$$

Όμως τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{t}$ και $\vec{t'}$ πληρούν πάντα την συνθήκη

$$-1 \leq \vec{t} \cdot \vec{t'} \leq 1,$$

οπότε λόγω της σχέσης (24) που ισχύει για κάθε $s \in [a, b]$, θα πρέπει να ισχύουν και οι σχέσεις

$$\vec{t} \cdot \vec{t'} = 1 = \vec{b} \cdot \vec{b'} = \vec{p} \cdot \vec{p'}.$$

Οπότε $\forall s \in [a, b]$, θα ισχύει ότι $\vec{t} = \vec{t'}$, $\vec{p} = \vec{p'}$ και $\vec{b} = \vec{b'}$.

Επειδή όμως

$$\vec{t} = \dot{\vec{r}} = \vec{t'} = \dot{\vec{r'}} \Rightarrow \vec{r}(s) = \vec{r'}(s) + const.$$

Αλλά στο σημείο $s = s_0$ ισχύει ότι $\vec{r}(s_0) = \vec{r'}(s_0)$, συνεπώς η σταθερά θα είναι μηδέν και καταλήγουμε στο ότι

$$\vec{r}(s) = \vec{r'}(s), \forall s \in [a, b],$$

δηλαδή οι καμπύλες C και C' ταυτίζονται. $\square$

Παρατήρηση 1: Το παραπάνω Θεώρημα επιλύει πλήρως το πρόβλημα της κατηγοριοποίησης (classification problem) των καμπυλών στον χώρο $\mathbb{R}^3$ (με μια ελευθερία ως προς τις στροφές και τις μετατοπίσεις στο χώρο). Συνεπώς μια καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ καθορίζεται πλήρως από την συνάρτηση καμπυλότητας $k(s)$ και την συνάρτηση της στρέψης της $\tau(s)$.

Ορισμός 1. Οι εξισώσεις $k = k(s)$ και $\tau = \tau(s)$ της καμπυλότητας και της στρέψης μιας καμπύλης αντίστοιχα, λέγονται *φυσικές* ή *εσωτερικές εξισώσεις* της καμπύλης.

Παράδειγμα 1. Οι φυσικές εξισώσεις της κυκλοειδούς έλικας είναι οι εξής:

$k(s) = \frac{a}{a^2+b^2} = const$

και

$\tau(s) = \frac{b}{a^2+b^2} = const.$

Παρατήρηση 2: Η σημασία των εσωτερικών εξισώσεων μιας καμπύλης είναι σημαντική για τον εξής λόγο: Είναι απολύτως σαφές ότι η παραμετρική αναπαράσταση των καμπυλών (είτε ως προς την φυσική παράμετρο s είτε ως προς μια άλλη παράμετρο t), εξαρτάται από την επιλογή συστήματος συντεταγμένων στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$. Καταλαβαίνει κανείς εύκολα διαισθητικά πως η καμπύλη δεν αλλάζει εάν αλλάξουμε σύστημα συντεταγμένων, παρ΄ ότι η παραμετρική της παράσταση θα αλλάξει. Θα ήταν λοιπόν χρήσιμο (όπως σκέφτηκε πρώτος ο Euler το 1736), να βρούμε έναν τρόπο περιγραφής των καμπυλών που να είναι *ανεξάρτητος* από την επιλογή συστήματος συντεταγμένων στον χώρο $\mathbb{R}^3$. Αυτό ακριβώς επιτυγχάνεται μέσω των εσωτερικών εξισώσεων μιας καμπύλης διότι: Παρατηρούμε πως τόσο στον ορισμό του μήκους τόξου μιας καμπύλης όσο και στον ορισμό της καμπυλότητας και της στρέψης μιας καμπύλης, χρησιμοποιούμε το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο (ισοδύναμα, τα μέτρα κάποιων διανυσματικών συναρτήσεων). Γνωρίζουμε δε πως, τόσο το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων (και κατ΄ επέκταση τα μέτρα των διανυσμάτων), όσο και το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων είναι ανεξάρτητα από την επιλογή συστήματος συντεταγμένων στον χώρο $\mathbb{R}^3$, δηλαδή είναι αμετάβλητα σε στροφές και μετατοπίσεις στο χώρο $\mathbb{R}^3$.

Παρατήρηση 3: Μια πιο πρόσφατη και πιο προχωρημένη αντιμετώπιση του γενικότερου προβλήματος της περιγραφής γεωμετρικών αντικειμένων με τρόπο ανεξάρτητο από την επιλογή συστημάτων συντεταγμένων γίνεται με την χρήση *διαφορικών μορφών* αλλά δεν θα μας απασχολήσει στο παρόν μάθημα. Κάποια στοιχεία επ΄ αυτού αναφέρθηκαν στο μάθημα της Προβολικής Γεωμετρίας.

11 Καμπύλες στο χώρο $\mathbb{R}^n$

Σε αυτή την παράγραφο, για λόγους πληρότητας, θα αναφερθούμε στην γενική περίπτωση καμπυλών στον Ευκλείδειο χώρο διάστασης n. Έστω λοιπόν ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με την γνωστή Ευκλείδεια μετρική (απαιτείται και ένας προσανατολισμός, αλλά αυτή η λεπτομέρεια μπορεί να αγνοηθεί από όσους δεν γνωρίζουν τι είναι).

Ορισμός 1. Μια καμπύλη C του $\mathbb{R}^n$ με παραμετρική παράσταση $\vec{r}(s)$, όπου $\vec{r}: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ συνεχής συνάρτηση, (και όπου s η φυσική παράμετρος της καμπύλης), θα λέγεται *γενική καμπύλη (generic curve)* εάν $\forall s \in I$ τα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$: $\dot{\vec{r}}(s)$, $\ddot{\vec{r}}(s)$,..., $\vec{r}^{(n-1)}(s)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συμβολίζουμε με $\vec{r}^{(n-1)}(s)$ την παράγωγο $(n-1)$-τάξης ως προς s της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{r}(s)$ παραπάνω, δηλαδή

$$\vec{r}^{(n-1)}(s) := \frac{d^{n-1}\vec{r}(s)}{ds^{n-1}}.$$

Εάν στα $(n-1)$ ως προς το πλήθος διανύσματα $\dot{\vec{r}}(s)$, $\ddot{\vec{r}}(s)$,..., $\vec{r}^{(n-1)}(s)$ εφαρμόσουμε την μέθοδο ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt, αποκτάμε μια ορθοκανονική οικογένεια διανυσμάτων $\vec{t}_1(s)$, $\vec{t}_2(s)$,..., $\vec{t}_{n-1}(s) \in \mathbb{R}^n$. Έστω $\vec{t}_n(s) \in \mathbb{R}^n$ ένα διάνυσμα ορισμένο με τέτοιον τρόπο έτσι ώστε τα διανύσματα $\{\vec{t}_1(s), \vec{t}_2(s), ..., \vec{t}_{n-1}(s), \vec{t}_n(s)\}$ να αποτελούν μια δεξιόστροφη ορθοκανονική *βάση* του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 2. Η παραπάνω βάση $\{\vec{t}_1(s), \vec{t}_2(s), ..., \vec{t}_{n-1}(s), \vec{t}_n(s)\}$ λέγεται *κινούμενη βάση Frenet* της καμπύλης στο σημείο $\vec{r}(s)$ αυτής.

Έστω

$$\dot{\vec{t}}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\vec{t}_j,$$

με $i = 1, 2, ..., n$ (παραλείπουμε την μεταβλητή s για απλοποίηση του συμβολισμού). Αφού εκ κατασκευής το διάνυσμα $\vec{t}_i$, με $i = 1, 2, ..., n-1$, εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\dot{\vec{r}}$, $\ddot{\vec{r}}$,..., $\vec{r}^{(i)}$, τότε το διάνυσμα $\dot{\vec{t}}_i$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\dot{\vec{r}}(s)$, $\ddot{\vec{r}}(s)$,..., $\vec{r}^{(i+1)}(s)$. Επειδή τα τελευταία διανύσματα εκφράζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων $\{\vec{t}_1, \vec{t}_2, ..., \vec{t}_{i+1}\}$, αυτό αποδεικνύει ότι $a_{ij} = 0$ για $j > i + 1$.

Επιπλέον, αφού $\vec{t}_i \cdot \vec{t}_j = \delta_{ij}$, έχουμε ότι $\dot{\vec{t}}_i \cdot \vec{t}_j + \vec{t}_i \cdot \dot{\vec{t}}_j = 0$, δηλαδή

$$a_{ij} + a_{ji} = 0,$$

συνεπώς $a_{ii} = 0$ και $a_{ij} = 0$ για $j < i - 1$. Άρα μόνο οι συντελεστές $a_{i,i+1} = -a_{i+1,i}$ μπορεί να είναι μη-μηδενικοί. Θέτοντας $k_1 = a_{12}, k_2 = a_{23}, ..., k_{n-1} = a_{n-1,n}$, παρατηρούμε ότι ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\dot{\vec{t}}_1 = k_1 \vec{t}_2,$$

$$\dot{\vec{t}}_2 = -k_1 \vec{t}_1 + k_2 \vec{t}_3,$$

$$...$$

$$\dot{\vec{t}}_{n-1} = -k_{n-2} \vec{t}_{n-2} + k_{n-1} \vec{t}_n$$

και

$$\dot{\vec{t}}_n = -k_{n-1} \vec{t}_{n-1}.$$

Ορισμός 3. Οι παραπάνω εξισώσεις λέγονται *εξισώσεις Frenet-Seret* μιας καμπύλης στο χώρο $\mathbb{R}^n$ και οι συναρτήσεις $k_1 = k_1(s), k_2 = k_2(s), ..., k_{n-1} = k_{n-1}(s)$ λέγονται *καμπυλότητες* της καμπύλης $\vec{r}(s)$. Ορίζονται μόνο για γενικές καμπύλες.

Ισχύει και στην γενική περίπτωση το Θεμελιώδες Θεώρημα της Θεωρίας Καμπυλών, δηλαδή για οποιεσδήποτε $(n-1)$ ως προς το πλήθος συνεχείς συναρτήσεις $k_1(s), k_2(s), ..., k_{n-1}(s)$ που ορίζονται στο διάστημα $I \subset \mathbb{R}$, υπάρχει καμπύλη (κανονική αλλά πιθανώς όχι απλή) C στον $\mathbb{R}^n$ με παραμετρική παράσταση $\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ της οποίας οι καμπυλότητες είναι οι δοσμένες συναρτήσεις. Η καμπύλη αυτή είναι μοναδική (θεωρούμε πως η καμπύλη μπορεί να υπόκειται σε στροφές και μετατοπίσεις στον χώρο $\mathbb{R}^n$):

Θεώρημα 1. (*Θεμελιώδες Θεώρημα Θεωρίας Καμπυλών στο Χώρο $\mathbb{R}^n$:*) Έστω $(n-1)$ ως προς το πλήθος τυχαίες λείες συναρτήσεις $k_1(s), k_2(s), ..., k_{n-1}(s)$ (όλες θετικά ορισμένες εκτός πιθανώς από την τελευταία), που ορίζονται σε ένα τυχαίο διάστημα $I = (0, a) \subset \mathbb{R}$. Τότε για κάθε αρχικό σημείο $O \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε δεξιόστροφη ορθοκανονική βάση $\{\hat{i}_1, \hat{i}_2, ..., \hat{i}_n\}$ του $\mathbb{R}^n$, υπάρχει μοναδική γενική καμπύλη (που μπορεί να υπόκειται σε στροφές και μετατοπίσεις) C με παραμετρική παράσταση $\vec{r}(s) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, τέτοια ώστε οι δοσμένες συναρτήσεις $k_1(s), k_2(s), ..., k_{n-1}(s)$ να αποτελούν τις καμπυλότητες της καμπύλης και στο σημείο $s = 0$ να ισχύει ότι $\vec{r}(0) = 0, \vec{t}_1(0) = \hat{i}_1, \vec{t}_2(0) = \hat{i}_2, ..., \vec{t}_n(0) = \hat{i}_n$, όπου $\{\vec{t}_1, \vec{t}_2, ..., \vec{t}_n\}$ η κινούμενη βάση Frenet της καμπύλης (που προκύπτει όπως περιγράψαμε παραπάνω από την διαδικασία Gram-Schmidt των διανυσμάτων $\dot{\vec{r}}(s)$, $\ddot{\vec{r}}(s)$,..., $\vec{r}^{(n-1)}(s)$).

Απόδειξη: Η Απόδειξη είναι γενίκευση της περίπτωσης του χώρου $\mathbb{R}^3$ που είδαμε διεξοδικά. Παραπέμπουμε στο [20].

12 Γενικά περί Επιφανειών

Όλοι μας είμαστε εξοικειωμένοι με την έννοια των επιφανειών, οι οποίες αποτελούν γεωμετρικά αντικείμενα διάστασης 2 και που ουσιαστικά γενικεύουν την έννοια του επιπέδου. Ο ακριβής μαθηματικός όρος είναι πως οι επιφάνειες αποτελούν *πολλαπλότητες* διάστασης 2. Αν και θα δώσουμε τον αυστηρό μαθηματικό ορισμό παρακάτω, σε αυτό το σημείο αρκεί να αναφέρουμε πως γενικά μια (πραγματική) πολλαπλότητα διάστασης n αποτελεί ένα χώρο που μόνο *τοπικά* (και όχι κατ΄ ανάγκη ολικά) μοιάζει με τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$, συνεπώς οι επιφάνειες που αποτελούν πολλαπλότητες διάστασης 2 τοπικά μοιάζουν με τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$.

Στο μάθημα αυτό θα ασχοληθούμε κυρίως με την λεγόμενη *τοπική διαφορική γεωμετρία των επιφανειών*. Από την ετυμολογία της ίδιας της λέξης γεωμετρία, φαίνεται πως η έννοια της μέτρησης και της απόστασης (μετρική) παίζει σημαντικό ρόλο σε αυτό τον κλάδο των μαθηματικών. Είναι δε προφανές ότι η έννοια της απόστασης αποτελεί το κύριο εργαλείο στη μελέτη τοπικών (local) ιδιοτήτων ενός γεωμετρικού αντικειμένου (πολλαπλότητας).

Οι πρώτες παράγραφοι όμως των σημειώσεων αυτών είναι αφιερωμένες στην *τοπολογία*, τον κλάδο των μαθηματικών που κατ΄ εξοχήν ασχολείται με την μελέτη των *ολικών (global) ιδιοτήτων* διαφόρων συνόλων (άρα και των πολλαπλοτήτων). (Υπεραπλουστεύοντας θα λέγαμε πως η τοπολογία μελετά το σχήμα και όχι το μέγεθος). Αυτό γίνεται για διάφορους λόγους: ο πρώτος και βασικότερος είναι για να δούμε τον συσχετισμό μεταξύ τοπικών και ολικών ιδιοτήτων ενός συνόλου (μιας πολλαπλότητας πιο συγκεκριμένα), κάτι που αποτελεί αναμφίβολα το πιο ενδιαφέρον κομμάτι της σύγχρονης διαφορικής γεωμετρίας. Στην περίπτωση των επιφανειών, η σύνδεση τοπικών και ολικών ιδιοτήτων επιτυγχάνεται μέσω του περίφημου Θεωρήματος Gauss-Bonnet που σχετίζει την τοπολογία μιας επιφάνειας με την καμπυλότητά της. Εντυπωσιακή γενίκευση του Θεωρήματος Gauss-Bonnet αποτελεί το Θεώρημα Δείκτου Atiyah-Singer που αποτελεί το πιο κομβικό αποτέλεσμα των μαθηματικών κατά το δεύτερο μισό του 20ου αιώνα, με αναρίθμητες εφαρμογές στα μαθηματικά, στη φυσική και αλλού. Ένας δεύτερος λόγος είναι για να δείξουμε ότι η έννοια του τοπολογικού χώρου εμφανίζεται με απόλυτα φυσιολογικό τρόπο στα μαθηματικά. Χωρίς αμφιβολία, η ιδέα μιας τοπολογίας σε ένα σύνολο έρχεται ταυτόχρονα με την ιδέα του ίδιου του συνόλου. Αποτελεί ένα από τα επιτεύγματα του σύγχρονου μαθηματικού φορμαλισμού το γεγονός ότι η διαισθητικά καθαρή αλλά δυσνόητη ιδέα της τοπολογίας σε ένα σύνολο είναι ισοδύναμη με την γνώση του πότε ένα υποσύνολο αποτελεί γειτονιά ενός από τα σημεία του ή ακόμη λιγότερο διαφωτιστικό, με την γνώση του ποια υποσύνολα είναι ανοικτά. Συνήθως ο ορισμός της τοπολογίας συσκοτίζει αντί να ξεκαθαρίζει την κατάσταση, όμως η τοπολογία των επιφανειών ευελπιστούμε να έχει εξισορροπιστικό αποτέλεσμα επ΄ αυτού.

Ανάλογη επιχειρηματολογία μας ώθησε να αναφερθούμε κάπως εκτενέστερα στις λεγόμενες *αφηρημένες επιφάνειες*, δηλαδή στις επιφάνειες εκείνες που δεν προκύπτουν ως υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ (στην αυστηρή μαθηματική ορολογία λέμε πως οι επιφάνειες αυτές δεν είναι *εμφυτευμένες* στον $\mathbb{R}^3$), παρά το γεγονός ότι οι επιφάνειες που υπάρχουν γύρω μας γίνονται κυρίως αντιληπτές στις αισθήσεις μας ως υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$. Το γεγονός ότι σύνολα που ορίζονται με αφηρημένο τρόπο έχουν ανέλπιστα πλούσιες γεωμετρικές ιδιότητες (και πολλές απρόσμενες εφαρμογές), είναι πιστεύουμε μια από τις πιο χρήσιμες ιδέες που μπορούν να προσφέρουν τα μαθηματικά ενώ ταυτόχρονα είναι και τα πιο δύσκολα για να ερμηνευθούν. Για παράδειγμα η φιάλη Klein, το πραγματικό προβολικό επίπεδο (επιφάνεια Boy), είναι επιφάνειες που δεν μπορούν να εμφυτευθούν στο χώρο $\mathbb{R}^3$, γεγονός που καθιστά την περιγραφή τους δύσκολη για τις αισθήσεις. Σε αυτή την περίπτωση (όπως και σε άλλες), οι παραμετρικές παραστάσεις δεν επαρκούν και απαιτείται μια πιο εσωτερική, βαθειά, αλλά και πιο αφηρημένη περιγραφή που μας την παρέχει η τοπολογία. Η σημασία του παραπάνω επιβεβαιώνεται δραματικά τόσο από πρόσφατα αποτελέσματα της φυσικής στοιχειωδών σωματιδίων αλλά και από άλλες σύγχρονες εφαρμογές για παράδειγμα της επιφάνειας Boy από την μηχανική και την αντοχή υλικών μέχρι την ψυχολογία (βλέπε εργασίες Lacan για την σχέση ψυχολογίας του βάθους με το προβολικό επίπεδο)!

Το τελικό εισαγωγικό σχόλιο αφορά την θέση της θεωρίας επιφανειών στα σύγχρονα μαθηματικά. Ο κύριος όγκος της έρευνας στη διαφορική γεωμετρία στις μέρες μας αφορά την μελέτη πολλαπλοτήτων διάστασης μεγαλύτερης από 2. Από αυτή τη σκοπιά η θεωρία επιφανειών συνιστά ένα χρήσιμο πρότυπο. Υπάρχουν όμως κάποια επί μέρους θέματα της θεωρίας επιφανειών στα οποία υπάρχει ακόμη ένα ερευνητικό ενδιαφέρον, όπως για παράδειγμα η θεωρία ελάχιστων επιφανειών (δηλαδή επιφάνειες ελάχιστου εμβαδού που αναπτύσσουν μια δοσμένη καμπύλη) ή η εργοδική μελέτη γεωδαισιακών καμπυλών σε μια επιφάνεια: σε πολλές κλειστές επιφάνειες, αλλά όχι σε όλες, σχεδόν όλες οι γεωδαισιακές τελικά περνούν οσοδήποτε κοντά από κάθε σημείο της επιφάνειας. Όμως το πιο ενδιαφέρον ερευνητικά ενεργό στις μέρες μας θέμα αφορά την μελέτη του συνόλου των μετρικών που μπορούν να ορισθούν σε μια δεδομένη επιφάνεια: αποδεικνύεται ότι η μελέτη των πιθανών μετρικών σε μια επιφάνεια ανάγεται τελικά στην μελέτη των επιφανειών ως επιφάνειες Riemann, δηλαδή αφορά την μιγαδική ανάλυση και πιο συγκεκριμένα την ολομορφία μιγαδικών συναρτήσεων.

Σχόλιο 1: Στη θεωρία καμπυλών (πολλαπλότητες διάστασης 1), η κατάσταση είναι απλή και η τοπολογία δεν έχει ιδιαίτερο ρόλο να διαδραματίσει, όπως φαίνεται από τα Σχόλια 2.1.1 και 2.1.2.

13 Ορισμός Επιφάνειας και Παραδείγματα

13.1 Μερικοί Χρήσιμοι Ορισμοί

Υπενθυμίζουμε μερικούς βασικούς ορισμούς από την Τοπολογία (για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο Παράρτημα και για ακόμη περισσότερες πληροφορίες στη σχετική Βιβλιογραφία):

Ορισμός 1. Ένας *τοπολογικός χώρος* είναι ένα μη-κενό σύνολο X μαζί με μια κλάση $\mathcal{T}$ υποσυνόλων του X (που λέγονται *ανοικτά υποσύνολα* του X), τέτοια ώστε:
(α). $\emptyset \in \mathcal{T}$ και $X \in \mathcal{T}$,
(β). εάν $U_i \in \mathcal{T} \forall i \in I$, τότε $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ και
(γ). εάν $U, V \in \mathcal{T}$, τότε $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Ορισμός 2. Ο τοπολογικός χώρος X λέγεται *χώρος Hausdorff* εάν για κάθε ζεύγος σημείων $x, y \in X$ με $x \neq y$, υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα U, V του X τέτοια ώστε $x \in U$, $y \in V$ και $U \cap V = \emptyset$.

Ορισμός 3. Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων X και Y λέγεται *συνεχής* εάν το $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X για κάθε ανοικτό υποσύνολο V του Y.

Ορισμός 4. Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων X και Y λέγεται *ομοιμορφισμός* εάν η f είναι αμφεικόνιση (δηλαδή απεικόνιση 1-1 και επί) και τόσο η $f : X \to Y$ όσο και η αντίστροφή της (που υπάρχει επειδή υποθέσαμε ότι η f είναι 1-1 και επί) $f^{-1} : Y \to X$ είναι συνεχείς. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι οι τοπολογικοί χώροι X και Y είναι *ομοιομορφικοί.*

Ορισμός 5. Ο τοπολογικός χώρος X λέγεται *συμπαγής* εάν κάθε ανοικτή κάλυψη του X περιέχει μια πεπερασμένη υποκάλυψη.

Σημείωση 1: Τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ αποτελούν τοπολογικούς χώρους Hausdorff όπου τα ανοικτά (υπο-)σύνολα προκύπτουν από τις τομές ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ (όπου το $\mathbb{R}^n$ θεωρούμε ότι είναι εφοδιασμένο με τη συνήθη τοπολογία, δηλαδή τα ανοικτά υποσύνολα είναι οι ανοικτές σφαιρικές περιοχές). Μια επιφάνεια έχει την ιδιότητα σε κάθε γειτονιά των σημείων της να φαίνεται σαν Ευκλείδειος χώρος, όπως η επιφάνεια της σφαιρικής γής.

Ορισμός 6. *Μια επιφάνεια X είναι ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff X που είναι τοπικά ομοιομορφικός με τον τοπολογικό χώρο* $\mathbb{R}^2$ (ο χώρος $\mathbb{R}^2$ είναι εφοδιασμένος με τη συνήθη τοπολογία).

Αναλυτικότερα ο ορισμός αυτός, ισοδύναμα, λέει το εξής:

Ορισμός 6′. Μια τοπολογική επιφάνεια (η απλά επιφάνεια) είναι ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff X, τέτοιος ώστε κάθε σημείο $x \in X$ περιέχεται σε ένα ανοικτό υποσύνολο U του X (δηλαδή $x \in U \subset X$ ανοικτό), το οποίο (U) είναι ομοιομορφικό με ένα ανοικτό υποσύνολο V του $\mathbb{R}^2$. Μια επιφάνεια X λέγεται *κλειστή* εάν είναι συμπαγής.

Σχόλιο 1: Μια επιφάνεια λέγεται και *2-πολλαπλότητα* ή *πολλαπλότητα διάστασης 2*. Γενικότερα, για κάθε πεπερασμένο φυσικό αριθμό n, μια *(τοπολογική) n-πολλαπλότητα* είναι ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff X που είναι τοπικά ομοιομορφικός με το $\mathbb{R}^n$. Το n αποτελεί την *διάσταση* της πολλαπλότητας. Οι διανυσματικοί χώροι $\mathbb{R}^n$ (και όλοι οι διανυσματικοί χώροι) αποτελούν τετριμμένα παραδείγματα πολλαπλοτήτων. Η διάστασή τους ως διανυσματικοί χώροι ταυτίζεται με την διάστασή τους ως πολλαπλότητες. Σημειώνουμε πως υπάρχει ακόμη γενικότερος ορισμός για την διάσταση (η λεγόμενη *τοπολογική διάσταση*) που μπορεί να εφαρμοσθεί σε οποιονδήποτε τοπολογικό χώρο.

Σχόλιο 2: Σε αυτό το μάθημα, πάντα ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^2$ ή και γενικότερα ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$, όταν θεωρούνται ως τοπολογικοί χώροι, θα θεωρούνται ότι είναι εφοδιασμένοι με τη συνήθη τοπολογία.

Σχόλιο 3: Το Θεώρημα Hein-Borel λέει πως ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές εάν και μόνο εάν είναι κλειστό (δηλαδή εάν περιέχει όλα τα οριακά του σημεία) και φραγμένο. Συνεπώς ο όρος κλειστή επιφάνεια για μια συμπαγή επιφάνεια είναι ίσως αδόκιμος και δημιουργεί σύγχυση αλλά διατηρείται στη μαθηματική ορολογία για ιστορικούς λόγους. Για παράδειγμα σημειώνουμε πως υπάρχουν πολλές επιφάνειες που είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ (όσον αφορά τη συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}^3$) αλλά δεν είναι κλειστές επιφάνειες (δηλαδή δεν είναι συμπαγείς επιφάνειες).

Σχόλιο 4: Υπενθυμίζουμε από την τοπολογία πως η εικόνα ενός συμπαγούς τοπολογικού χώρου κάτω από μια συνεχή απεικόνιση αποτελεί επίσης συμπαγή τοπολογικό χώρο (συνεπώς η εικόνα μιας συμπαγούς επιφάνειας κάτω από μια συνεχή απεικόνιση είναι μια επίσης συμπαγής επιφάνεια) και ότι μια συνεχής αμφεικόνιση από ένα συμπαγή τοπολογικό χώρο σε ένα τοπολογικό χώρο Hausdorff αποτελεί πάντα ομοιομορφισμό.

Σχόλιο 5: Η απαίτηση στους Ορισμούς 6 και 6′ να είναι ο τοπολογικός χώρος X Hausdorff δεν είναι απολύτως απαραίτητη, σε μερικά βιβλία δεν υπάρχει. Την ενσωματώνουμε στον ορισμό για να αποφύγουμε περιπτώσεις επιφανειών που είναι υπερβολικά αντι-διαισθητικές.

Σχόλιο 6: Ένας χώρος του οποίου η τοπολογία ορίζεται από μια μετρική είναι αυτόματα Hausdorff (για παράδειγμα το $\mathbb{R}^n$ με τη συνήθη τοπολογία, η οποία μπορεί ισοδύναμα να ορισθεί και μέσω του Ευκλείδειου εσωτερικού γινομένου-Ευκλείδεια μετρική, αποτελεί χώρο Hausdorff). Σε όλες τις περιπτώσεις στο συγκεκριμένο μάθημα, η τοπολογία μπορεί να ορισθεί και μέσω μιας μετρικής, αλλά στον ορισμό της επιφάνειας χρησιμοποιούμε τοπολογικό χώρο και όχι μετρικό χώρο διότι έτσι είναι γενικότερος ο ορισμός και επιπλέον η μετρική είναι συχνά άσχετη με τη συζήτηση και σε πολλές περιπτώσεις δεν υπάρχει φυσική εκλογή μετρικής.

13.2 Παραδείγματα Επιφανειών

Σύμφωνα με τους ισοδύναμους ορισμούς 6 και 6′, τα παρακάτω αποτελούν παραδείγματα επιφανειών:

1. Το $\mathbb{R}^2$.

2. Κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

3. Η επιφάνεια ενός κύβου.

4. Ο κώνος $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2=z^2, z>0\}$.

5. Η (μοναδιαία) σφαίρα $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2=1\}$. Ας δούμε ενδεικτικά αυτό το παράδειγμα κάπως πιο αναλυτικά. Ο απλούστερος τρόπος για να δει κανείς πως η σφαίρα αποτελεί επιφάνεια είναι να χρησιμοποιήσει τη γνωστή στερεογραφική προβολή: ένα ανοικτό σύνολο U είναι το συμπλήρωμα του Νότιου Πόλου (δηλαδή το U είναι το υποσύνολο της σφαίρας που αποτελείται από όλα τα σημεία της σφαίρας εκτός από το σημείο του Νότιου Πόλου) και η στερεογραφική προβολή το ταυτίζει με το $\mathbb{R}^2$, δηλαδή με το εφαπτόμενο επίπεδο στο Βόρειο Πόλο. Χρησιμοποιώντας ως ένα άλλο ανοικτό σύνολο V το συμπλήρωμα του Βόρειου Πόλου, βλέπουμε πως πράγματι κάθε σημείο της σφαίρας ανήκει σε κάποιο (τουλάχιστον ένα) ανοικτό σύνολο (για παράδειγμα εμείς επιλέξαμε τα U και V όπως παραπάνω), το οποίο (ανοικτό υποσύνολο της σφαίρας U ή V), μέσω της στερεογραφικής προβολής, είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{R}^2$. (Υπενθυμίζουμε πως το ίδιο το $\mathbb{R}^2$, αποτελεί ανοικτό υποσύνολο του εαυτού του, βλέπε Ορισμό 12.1 (α) παραπάνω στην αρχή αυτής της παραγράφου).

6. Γενικά οι πιο προφανείς επιφάνειες είναι αυτές που ορίζονται μέσω μιας εξίσωσης στον $\mathbb{R}^3$ της μορφής

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = 0\},$$

όπου η $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχώς διαφορίσιμη απεικόνιση. Μια ικανή συνθήκη (αλλά όχι και αναγκαία) για να ορίζεται μια επιφάνεια με τον παραπάνω τρόπο είναι η f και η βαθμίδα $gradf$ της f να *μην μηδενίζονται ταυτόχρονα*. Υπενθυμίζουμε ότι σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες η βαθμίδα της f δίδεται από τη σχέση

$$gradf = \nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}).$$

Τα πιο γνωστά παραδείγματα τέτοιων επιφανειών είναι οι λεγόμενες *επιφάνειες β′ βαθμού (ή τετραγωνικές επιφάνειες) (quadrics)*:

• *ελλειψοειδές* με εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

• *μονόχωνο υπερβολοειδές* με εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

• *δίχωνο υπερβολοειδές* με εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Στα σημεία που οι f και $gradf$ μηδενίζονται ταυτόχρονα, αναμένουμε η επιφάνεια X να συμπεριφέρεται ανώμαλα. Έτσι εάν $f = x^2 + y^2 + z^2$, τότε οι f και $gradf$ μηδενίζονται ταυτόχρονα στην αρχή των αξόνων και η X αποτελείται από την αρχή μόνο, οπότε δεν αποτελεί επιφάνεια. Εάν $f = x^2 + y^2 - z^2$, τότε οι f και $gradf$ πάλι μηδενίζονται ταυτόχρονα στην αρχή των αξόνων και η X αποτελεί έναν διπλό κώνο.

7. Μια άλλη κλάση επιφανειών, που συναντάται συχνά, είναι οι λεγόμενες *επιφάνειες εκ περιστροφής* που προκύπτουν από μια καμπύλη έστω γ στο επίπεδο XZ που περιστρέφεται γύρω από τον άξονα $z'z$ (προφανώς πρέπει να επιλέξουμε μια καμπύλη που δεν τέμνει τον άξονα $z'z$ ή που είναι συμμετρική ως προς αυτόν). Χαρακτηριστικό παράδειγμα επιφάνειας εκ περιστροφής αποτελεί το *τόρους (torus) (ή σπείρα, ή τόρος)*, που προκύπτει από την περιστροφή ενός κύκλου

$$(x-b)^2+z^2=a^2$$

με κέντρο το σημείο $(b,0)$, ακτίνα a και $b>a$.

8. Οι *ευθειοποιές επιφάνειες (ruled surfaces)* είναι οι επιφάνειες που σαρώνουν ευθείες καθώς κινούνται στο χώρο $\mathbb{R}^3$. Παράδειγμα είναι το μονόχωνο υπερβολοειδές που είδαμε και πιο πάνω καθώς και ο διπλός κώνος.

Υποκατηγορία των ευθειοποιών επιφανειών αποτελούν οι λεγόμενες *αναπτυκτές επιφάνειες (developables)* που προκύπτουν από την σάρωση της εφαπτόμενης ευθείας μιας καμπύλης στο χώρο. Οι αναπτυκτές επιφάνειες είναι οι γενικότερες επιφάνειες που προκύπτουν από το επίπεδο (ή από ένα κομμάτι του επιπέδου) το οποίο το λυγίζουμε χωρίς να το τεντώνουμε.

Σημείωση 1: Συχνά στις ευθειοποιές επιφάνειες θα πρέπει να αφαιρεθεί κάποιο σύνολο στο οποίο η επιφάνεια συμπεριφέρεται ανώμαλα. Για παράδειγμα ο διπλός κώνος με εξίσωση $x^2+y^2=z^2$ είναι η επιφάνεια που σαρώνεται από την περιστροφή μιας ευθείας αλλά αποτελεί επιφάνεια μόνον εάν αφαιρέσουμε την κορυφή. Ανάλογα, οι αναπτυκτές επιφάνειες που προκύπτουν από την σάρωση στο χώρο της εφαπτόμενης ευθείας μιας καμπύλης έχει μια κοφτερή ακμή (που λέγεται cuspidal edge) και πρέπει να αφαιρεθεί για να πάρουμε επιφάνεια.

9. Οι *μιγαδικές αλγεβρικές καμπύλες* αποτελούν επιφάνειες. Μια μιγαδική αλγεβρική καμπύλη στο χώρο $\mathbb{C}^2$ είναι το σύνολο που ορίζεται από την εξίσωση

$$X=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2|f(x,y)=0\},$$

όπου η f είναι ένα πολυώνυμο δύο μιγαδικών μεταβλητών με μιγαδικούς συντελεστές. Επειδή η σχέση $f=0$ δίδει δύο πραγματικές εξισώσεις μεταξύ τεσσάρων πραγματικών μεταβλητών, το X αποτελεί επιφάνεια (έχει πραγματική διάταση 2 αλλά μιγαδική διάσταση 1, συνεπώς αποτελεί επιφάνεια αλλά και μιγαδική καμπύλη), με δεδομένο βέβαια ότι οι συναρτήσεις f και $gradf$ δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα.
Για παράδειγμα η εξίσωση $x^2+y^2=1$ ορίζει μια επιφάνεια X στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}^2$. Εάν συμβολίσουμε το μιγαδικό διάνυσμα με συντεταγμένες $(x,y)\in\mathbb{C}^2$, (προφανώς $x,y\in\mathbb{C}$), ως $\vec{u}+i\vec{v}$, όπου $u,v\in\mathbb{R}^2$, τότε η εξίσωση $x^2+y^2=1$ είναι ισοδύναμη με το παρακάτω ζεύγος των εξισώσεων
$|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2=1$
και

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
Οι λύσεις μπορούν να γραφτούν στη μορφή
$\vec{u} = \cosh t\hat{\xi}$ και $\vec{v} = \sinh t\hat{\xi}_\perp$, όπου

$$\hat{\xi} := \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

μοναδιαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^2$, $\hat{\xi}_\perp$ το επίσης μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$, που προκύπτει από το $\hat{\xi}$ αν το περιστρέψουμε κατά γωνία $\pi/2$ και $t \in \mathbb{R}$ κάποια ελεύθερη παράμετρος.
Αντίστροφα,, για κάθε $\hat{\xi}$ στον μοναδιαίο κύκλο του $\mathbb{R}^2$ και $\forall t \in \mathbb{R}$, οι παραπάνω λύσεις ορίζουν ένα σημείο στην επιφάνεια X. Τοπολογικά η X αποτελεί κύλινδρο, επειδή προκύπτει από το Καρτεσιανό γινόμενο του κύκλου $|\hat{\xi}| = 1$ επί την ευθεία $\mathbb{R}$.
Ένας άλλος τρόπος για να δούμε την τοπολογία της X είναι να παραμετρήσουμε την X μέσω των παραμέτρων

$$x := \frac{1+w^2}{2w}$$

και

$$y := \frac{1-w^2}{2iw},$$

όπου $w = (x+iy)^{-1} \in \mathbb{C} - \{0\}$. Αυτό αποδεικνύει ότι η X είναι ομοιομορφική με το σύνολο $\mathbb{C} - \{0\}$, το οποίο τοπολογικά ισοδυναμεί με κύλινδρο διότι κάθε $w \in \mathbb{C} - \{0\}$ μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο στη μορφή $e^t u$, με $t \in \mathbb{R}$ και $u \in \mathbb{C}$ με $|u| = 1$.
Η παρακάτω κάπως περίεργη παρατήρηση θα μας βοηθήσει να εισάγουμε κάποιες ιδεές στην περίπτωση των επιφανειών Riemann παρακάτω. Όπως γνωρίζουμε από την στερεογραφική προβολή, στην μιγαδική ανάλυση είναι βολικό να προσθέτουμε ένα επ΄ άπειρον σημείο στο επίπεδο Argand. Το σύνολο που προκύπτει $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ονομάζεται *σφαίρα Riemann* διότι τοπολογικά είναι ομοιομορφικό με την σφαίρα S^2. Με την ίδια λογική, προσθέτουμε δύο επ΄ άπειρον σημεία στην επιφάνεια X τα οποία τα συμβολίζουμε $P_1 = (\infty, i\infty)$ και $P_2 = (\infty, -i\infty)$. Αντιστοιχούν στις τιμές της παραμέτρου $w = \infty$ και $w = 0$. Συνεπώς το σύνολο $X \cup \{P_1, P_2\}$ βρίσκεται σε αντιστοιχία 1-1 με την σφαίρα Riemann. Γεωμετρικά, τα σημεία P_1 και P_2 αποτελούν τα ιδεατά πέρατα (για αυτό λέγονται επ΄ άπειρον σημεία) των ασύμπτωτων ευθειών $x \pm iy = 0$ της μιγαδικής αλγεβρικής καμπύλης $x^2 + y^2 = 1$. Αυτές οι ασύμπτωτες είναι ακριβώς ανάλογες με τις γνωστές πραγματικές ασύμπτωτες $x \pm y = 0$ της υπερβολής $x^2 - y^2 = 1$ στον $\mathbb{R}^2$ (πραγματικό επίπεδο). Πράγματι, εάν $x^2 + y^2 = 1$ και $|x|$ πολύ μεγάλο, τότε το $y = i\sqrt{x^2-1}$ είτε είναι πολύ κοντά στο ix είτε είναι

πολύ κοντά στο $-ix$.

Ας δούμε και μερικά παραδείγματα που **δεν** αποτελούν επιφάνειες:

1. Ο κλειστός δίσκος $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$, και

2. Ο διπλός κώνος $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = z^2\}$,

διότι καμιά γειτονιά ενός σημείου στο σύνορο του δίσκου (κύκλος) ή καμιά γειτονιά της κορυφής του διπλού κώνου δεν είναι ομοιομορφική με κάποιο ανοικτό του $\mathbb{R}^2$ (η απόδειξη είναι δύσκολη).

Στα παραπάνω παραδείγματα επιφανειών χρησιμοποιήσαμε μόνο υποσύνολα του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$. Τα πιο ενδιαφέροντα παραδείγματα επιφανειών όμως προκύπτουν με αφηρημένο τρόπο χρησιμοποιώντας την λεγόμενη *τοπολογία πηλίκο*. Αναλυτικότερα θα τις μελετήσουμε στην επόμενη παράγραφο.

10. Ας δούμε τέλος τουλάχιστον ένα παράδειγμα μιας αφηρημένης επιφάνειας που λέγεται *δέσμη Möbius*.
Έστω X το σύνολο όλων των ευθειών του επιπέδου $\mathbb{R}^2$. Εφοδιάζουμε το επίπεδο με ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων Oxy. Θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε μια εικόνα αυτού του χώρου. Συμβολίζουμε με X_0 το υποσύνολο του X που αποτελείται από τις μη-κάθετες ευθείες του επιπέδου. Κάθε στοιχείο του X_0 προσδιορίζεται μονοσήμαντα από δύο παραμέτρους: την *κλίση* $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ της ευθείας και την *προσημασμένη απόσταση* της ευθείας από την αρχή των αξόνων O, η οποία θεωρείται θετική εάν η ευθεία περνά πάνω από το O και αρνητική εάν η ευθεία περνά κάτω από το O. Συνεπώς είναι φυσικό να ταυτίσουμε το X_0 με τον *χώρο των παραμέτρων*, έστω $A = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}$, σύνολο που αποτελεί ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, δηλαδή $A \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό. Γεωμετρικά, το A αποτελεί μια ταινία απείρου μήκους και πλάτους π μέσα στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ (οι τετμημένες των σημείων του A θα είναι εντός του διαστήματος $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ενώ οι τεταγμένες θα ανήκουν σε όλο το $\mathbb{R}$).

Τώρα θα πρέπει να προσθέσουμε και τις κάθετες ευθείες με κλίση $\pm\frac{\pi}{2}$ για να πάρουμε ολόκληρο το X. Αυτές μπορούν να προστεθούν είτε ως μια αριστερή πλευρά (ακμή) $\{-\frac{\pi}{2}\} \times \mathbb{R}$ είτε ως μια δεξιά πλευρά (ακμή) $\{\frac{\pi}{2}\} \times \mathbb{R}$ ή προτιμότερα ως δύο πλευρές, (όπως η διεθνής γραμμή ημερομηνίας σε έναν συμβατικό χάρτη στο επίπεδο της υδρόγειας σφαίρας). Όμως ποιο σημείο εκ των $\{-\frac{\pi}{2}\} \times \mathbb{R}$ και $\{\frac{\pi}{2}\} \times \mathbb{R}$ θα αντιστοιχεί σε ποια κάθετη γραμμή; Μπορούμε να αποφανθούμε ως εξής: Θεωρούμε την ακολουθία των ευθειών του επιπέδου $A, B, C, ..., J$, οι οποίες απέχουν μοναδιαία απόσταση από την αρχή των αξόνων O που ανήκουν στο X_0 με φθίνουσα κλίση θ από $\frac{\pi}{2}$ έως $-\frac{\pi}{2}$. Οι ευθείες αυτές θα αναπαρίστανται μέσα στο σύνολο A *πάνω σε σημεία των οριζόντιων πλευρών ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου*, του οποίου οι κορυφές ορίζονται από τα σημεία τομής των εξής 4 ευθειών: $x = \frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $y = 1$ και $y = -1$. Δηλαδή οι κορυφές του ορθογωνίου παραλληλογράμμου θα έχουν συντεταγμένες $(\frac{\pi}{2}, 1)$, $(-\frac{\pi}{2}, 1)$, $(-\frac{\pi}{2}, -1)$ και $(\frac{\pi}{2}, -1)$. Παρατηρούμε όμως ότι $\forall y \in \mathbb{R}$, τα σημεία $(\frac{\pi}{2}, y)$ και $(-\frac{\pi}{2}, -y)$ αναπαριστούν *την ίδια κάθετη γραμμή*. Συνεπώς για να πάρουμε την εικόνα του X θα πρέπει να θεωρήσουμε το σύνολο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}$ και να ταυτίσουμε τις συνοριακές πλευρές (ακμές) έτσι ώστε τα σημεία $(\frac{\pi}{2}, y)$ να ταυτίζονται με τα σημεία $(-\frac{\pi}{2}, -y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Το αποτέλεσμα που προκύπτει δεν είναι κύλινδρος αλλά *δέσμη Möbius*.

Θα πρέπει να ορίσουμε στη συνέχεια μια τοπολογία στο σύνολο X έτσι ώστε αυτό να αποτελεί επιφάνεια. Εν συντομία αυτό γίνεται ως εξής: Στην παραπάνω συζήτηση ορίσαμε ουσιαστικά μια αμφεικόνιση $\phi_0 : X_0 \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}$, διότι κάθε ευθεία καθορίζεται μονοσήμαντα από την κλίση της και την προσημασμένη απόστασή της από την αρχή των αξόνων O. Έστω X_1 το σύνολο των ευθειών του επιπέδου που δεν είναι οριζόντιες. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε μια αμφεικόνιση $\phi_1 : X_1 \to (0, \pi) \times \mathbb{R}$. Στη συνέχεια ορίζουμε ένα υποσύνολο U του X να είναι ανοικτό εάν το $\phi_0(U \cap X_0)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}$ και εάν το $\phi_1(U \cap X_1)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $(0, \pi) \times \mathbb{R}$. Αυτός ο ορισμός πράγματι δίδει μια τοπολογία στο X που το καθιστά επιφάνεια. Σημειώνουμε πως αυτή η τοπολογία μπορεί να ορισθεί και μέσω μετρικής αλλά δεν είναι φυσικά ορισμένη.

Τα παραπάνω παραδείγματα δίδουν το κίνητρο για τους εξής ορισμούς:

Ορισμός 1. Έστω X τοπολογικός χώρος εφοδιασμένος με μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$. Εάν $x \in X$, συμβολίζουμε με $[x] := \{y \in X | y \sim x\}$ την κλάση ισοδυναμίας του στοιχείου x και έστω

$$X/\sim := \{[x] | x \in X\}$$

το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας ή σύνολο πηλίκο. Έστω $\pi : X \to X/\sim$ η απεικόνιση πηλίκο η οποία απεικονίζει κάθε στοιχείο $x \in X$ στην κλάση ισοδυναμίας του. Τότε η *τοπολογία πηλίκο* στο σύνολο πηλίκο $X/\sim$ ορίζεται ως εξής: $\{V \subseteq X/\sim | \pi^{-1}(V)$ ανοικτό υποσύνολο του $X\}$. Με άλλα λόγια, ένα υποσύνολο V του συνόλου πηλίκο $X/\sim$ είναι ανοικτό (ως προς την τοπολογία πηλίκο) εάν και μόνο εάν η αντίστροφη εικόνα του κάτω από την απεικόνιση πηλίκο $\pi^{-1}(V) := \{x \in X | [x] \in V\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Ο ακριβής ορισμός της δέσμης δέσμης Möbius είναι ο εξής:

Ορισμός 2. Μια *δέσμη Möbius* είναι μια επιφάνεια που είναι ομοιομορφική με το σύνολο πηλίκο

$$[0,1] \times [0,1]/\sim$$

εφοδιασμένο με την τοπολογία πηλίκο, όπου η σχέση ισοδυναμίας $\sim$ ορίζεται ως εξής: $(x,y) \sim (s,t)$ εάν και μόνο εάν ($x = s$ και $y = t$) ή ($x = 1 - s$ και $\{y,t\} = \{0,1\}$).

Το *επίπεδο μοντέλο* της δέσμης Möbius προκύπτει από το τετράγωνο με ταύτιση ενός μόνο ζεύγους δύο απέναντι παράλληλων πλευρών (δεν έχει σημασία εάν πάρουμε τις οριζόντιες ή τις κάθετες πλευρές) με ταυτόχρονη συστροφή.

14 Αφηρημένες Επιφάνειες

Οι περισσότερο χρήσιμες στα μαθηματικά επιφάνειες δεν προκύπτουν ως αντικείμενα (υποσύνολα) του χώρου $\mathbb{R}^3$. Στην παρούσα παράγραφο θα δείξουμε μερικούς τρόπους που διάφορες επιφάνειες ορίζονται με αφηρημένο τρόπο, κυρίως ως σύνολο πηλίκο κάποιου αρχικού τοπολογικού χώρου εφοδιασμένου με μια σχέση ισοδυναμίας.

14.1 Το Τόρους και η Φιάλη Klein ως Χώροι Πηλίκο

Ένας τυπικός τρόπος που ορίζεται το τόρους είναι ως *το σύνολο των θέσεων των δεικτών του ρολογιού*. Μια θέση των δεικτών του ρολογιού καθορίζεται από ένα ζεύγος (x, y), όπου οι x και y είναι πραγματικοί αριθμοί modulo (ισοϋπόλοιπο) 12. Συνεπώς το σύνολο X των θέσεων των δεικτών του ρολογιού αποκτάται από το επίπεδο $\mathbb{R}^2$ εισάγοντας την σχέση ισοδυναμίας $\sim$ που ορίζεται ως εξής:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + 12n, & \text{για κάποιο} \quad n \in \mathbb{N}, \\ y_1 = y_2 + 12m, & \text{για κάποιο} \quad m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Θέλουμε να σκεφτούμε το σύνολο X των θέσεων των δεικτών του ρολογιού ως τοπολογικό χώρο. Το $\mathbb{R}^2$ είναι εφοδιασμένο με τη συνήθη τοπολογία και υπάρχει μια προφανής απεικόνιση $e : \mathbb{R}^2 \to X$ που αντιστοιχεί σε κάθε ζεύγος $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ την κλάση ισοδυναμίας του στο X. *Ορίζουμε ένα ανοικτό υποσύνολο U του X ως ένα υποσύνολο U του X του οποίου η αντίστροφη εικόνα $e^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^2$ υπό την e είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.* Λίγη σκέψη μας πείθει πως πράγματι αυτός ο ορισμός είναι λογικός. Η απόδειξη πως το X είναι ομοιομορφικό με το στάνταρ τόρους στον $\mathbb{R}^3$ απαιτεί λίγη τεχνική δουλειά (παραπέμπουμε στα [5] και [22] για όλες τις λεπτομέρειες).

Ίσως ένας ευκολότερος τρόπος για να δούμε ότι το παραπάνω σύνολο $\mathbb{R}^2/\sim$, όπου $\sim$ η σχέση ισοδυναμίας ισοϋπόλοιπο, αποτελεί τόρους, είναι να δούμε τι συμβαίνει στο καθένα παράγοντα $\mathbb{R}$ ξεχωριστά στο Καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Αν περιοριστούμε στο $\mathbb{R}$ λοιπόν και ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας $x \sim z$ εάν και μόνο εάν $x = z + 12n$, όπου $n \in \mathbb{Z}$ ακέραιος και $x, z \in \mathbb{R}$, τότε το σύνολο πηλίκο είναι το σύνολο $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ και αυτό δεν είναι άλλο από τον κύκλο S^1 με την τοπολογία πηλίκο. Για την ακρίβεια κύκλος μήκους περιφερείας 12. Σημειώνουμε με έμφαση πως δεν είναι το κλειστό διάστημα $[0, 12]$ διότι οι πραγματικοί αριθμοί που αφήνουν υπόλοιπο 0 και 12 όταν διαιρεθούν με 12 ταυτίζονται με αύξηση κατά 1 του n στην δεύτερη περίπτωση, άρα τα άκρα 0 και 12 του κλειστού διαστήματος $[0, 12]$ ταυτίζονται, οπότε προκύπτει ο κύκλος. Συνεπώς ο συνολικός χώρος θα είναι $S^1 \times S^1$ που εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς ότι είναι τόρους.

Σημείωση 1: Ένας διαφορετικός τρόπος να δούμε το παραπάνω είναι ο εξής: θεωρούμε την διπλά περιοδική συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to [-1, 1]$ με τύπο $f(x, y) = \sin 2\pi x \cdot \cos 2\pi y$. Επειδή η τιμή της στο (x, y) είναι ίδια με την τιμή της στο $(x + m, y + n)$, όπου $m, n \in \mathbb{Z}$, η f καθορίζεται πλήρως αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της στο μοναδιαίο τετράγωνο $[0, 1] \times [0, 1]$. Όμως $f(x, 0) = f(x, 1)$ και $f(0, y) = f(1, y)$, η f είναι συνεχής στον χώρο που προκύπτει από την ταύτιση των απέναντι πλευρών του μοναδιαίου τετραγώνου (που είναι τόρους).

Σημείωση 2: Έχουμε δει δύο σχέσεις μεταξύ των 2 βασικών τοπολογικών χώρων διάστασης 1 που είναι το $\mathbb{R}$ και το S^1: η πρώτη είναι ότι το S^1 είναι η συμπαγοποίηση ενός σημείου του $\mathbb{R}$ (βλέπε την στερεογραφική προβολή). Τώρα βλέπουμε και έναν ακόμη: το S^1 είναι ο χώρος πηλίκο του $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ κάτω από την σχέση ισοδυναμίας *ισοϋπόλοιπο (modulo)* (το 12 στην παραπάνω σχέση ισοδυναμίας μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός που θα υποδηλώνει το μήκος της περιφέρειας του κύκλου, θετικός φυσικά αφού μιλάμε για μήκος).

Δεν υπάρχει καμία μαθηματική διαφορά εάν στο παραπάνω παράδειγμα αγνοήσουμε τον παράγοντα 12 (η μόνη απώλεια θα ήταν πως τότε θα χάναμε την σχέση του παραδείγματος με το χώρο των θέσεων των δεικτών του ρολογιού), δηλαδή εάν ορίζαμε την σχέση ισοδυναμίας στον $\mathbb{R}^2$ ως:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + n, & \text{για κάποιο} \quad n \in \mathbb{N}, \\ y_1 = y_2 + m, & \text{για κάποιο} \quad m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Με την παραπάνω σχέση ισοδυναμίας, κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$ είναι ισοδύναμο με ένα σημείο του τετραγώνου $[0, 1] \times [0, 1]$ και κανένα ζεύγος σημείων του τετραγώνου δεν είναι ισοδύναμα *εκτός των*:
$(x, 0) \sim (x, 1)$ για $0 \leq x \leq 1$ και
$(0, y) \sim (1, y)$ για $0 \leq y \leq 1$.

Διαισθητικά, *η παραπάνω σχέση ισοδυναμίας ταυτίζει τις απέναντι πλευρές του τετραγώνου ανά δύο.* Αυτό αποτελεί το λεγόμενο *επίπεδο μοντέλο* του τόρους.

Είναι φανερό πως αυτό που προκύπτει είναι ένα τόρους. Σκεφτείτε και την αντίστροφη διαδικασία: εάν πάρουμε ένα τόρους και το κόψουμε στην μέση θα προκύψει ένας κύλινδρος τον οποίο εάν τον ξανακόψουμε θα προκύψει ένα τετράγωνο (ή ορθογώνιο παραλληλόγραμμο).

Το παραπάνω παράδειγμα αποτελεί τυπική περίπτωση μιας γενικότερης μεθόδου με την οποία ξεκινώντας από έναν τοπολογικό χώρο εφοδιασμένο με κάποια σχέση ισοδυναμίας, ορίζουμε μια τοπολογία στο σύνολο πηλίκο που λέγεται *τοπολογία πηλίκο*.

Παραθέτουμε ένα ακόμη λίγο πιο πολύπλοκο παράδειγμα του ιδίου τύπου: έστω το σύνολο $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με την συνήθη τοπολογία, στο οποίο ορίζουμε την εξής σχέση ισοδυναμίας:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rll} x_1 = x_2 + n, & \text{για κάποιο} & n \in \mathbb{N}, \\ y_1 = (-1)^n y_2 + m, & \text{για κάποιο} & m \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

Με την παραπάνω σχέση ισοδυναμίας, κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$ είναι ισοδύναμο με ένα σημείο του τετραγώνου $[0,1] \times [0,1]$ και κανένα ζεύγος σημείων του τετραγώνου δεν είναι ισοδύναμα *εκτός των*:
$(x,0) \sim (x,1)$ για $0 \leq x \leq 1$ και
$(0,y) \sim (1, 1-y)$ για $0 \leq y \leq 1$.

Διαισθητικά, *η παραπάνω σχέση ισοδυναμίας ταυτίζει τις απέναντι πλευρές του τετραγώνου ανά δύο αλλά στο ένα ζευγάρι (κάθετες πλευρές) υπάρχει ταυτόχρονα και συστροφή*. Αυτό αποτελεί το λεγόμενο *επίπεδο μοντέλο* της *φιάλης Klein (Klein bottle)*.

Ο χώρος πηλίκο $X = \mathbb{R}^2/\sim$ αποτελεί επιφάνεια και λέγεται *φιάλη Klein (Klein bottle)*. Σε αντίθεση με το τόρους, η επιφάνεια αυτή δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί ως επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$, δηλαδή δεν μπορεί να *εμφυτευθεί (embedded)* στο χώρο $\mathbb{R}^3$, παρά μόνο να *εμβαπτισθεί (immersed)* στο χώρο $\mathbb{R}^3$, πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχει απεικόνιση $f : X \to \mathbb{R}^3$ που είναι μόνο *τοπικός ομοιομορφισμός* επί του $f(X)$ (η απεικόνιση f δεν είναι 1-1).

Μια διάταξη της οποίας το σύνολο των θέσεων συνιστά φιάλη Klein είναι η παρακάτω: έστω $\Pi \in \mathbb{R}^3$ ένα επίπεδο ελεύθερο να περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα $z'z$ ενός Καρτεσιανού Συστήματος Συντεταγμένων μαζί με μια ευθεία l που διέρχεται από την αρχή των αξόνων O η οποία βρίσκεται πάντα πάνω στο επίπεδο Π. Τότε το σύνολο των θέσεων των (Π, l) συνιστά φιάλη Klein.

14.2 Το (Πραγματικό) Προβολικό Επίπεδο

Μια πολύ σημαντική γενικευμένη επιφάνεια είναι το (πραγματικό) προβολικό επίπεδο. Διαισθητικά η κατασκευή του είναι η εξής: κατ΄ αρχήν θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένο με ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $Oxyz$ με αρχή το σημείο O. Ας φανταστούμε πως βρισκόμαστε στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$, που ταυτίζεται με τον φυσικό 3-διάστατο χώρο, στο σημείο O (αρχή των αξόνων) και κοιτάζουμε το επίπεδο $\Pi \in \mathbb{R}^3$ με εξίσωση $z = 1$. Υπάρχει μια αντιστοιχία που είναι *σχεδόν* 1-1 μεταξύ των σημείων του επιπέδου Π και των ακτίνων που φτάνουν στο μάτι μας, δηλαδή μεταξύ των σημείων του Π και των ακτίνων (ευθειών) που διέρχονται από την αρχή των αξόνων O, που ορίζεται από το σημείο που οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή O τέμνουν το επίπεδο Π. Η αντιστοιχία δεν είναι ακριβώς 1-1 διότι οι ευθείες που είναι παράλληλες στο επίπεδο Π, δηλαδή οι ευθείες που βρίσκονται στο επίπεδο Oxy, δεν τέμνουν το επίπεδο Π. Με άλλα λόγια οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή O είναι *περισσότερες* από τα σημεία του επιπέδου Π. Καθώς μια ευθεία που διέρχεται από το O τείνει να γίνει παράλληλη με το Π, το σημείο τομής της με το Π *μετακινείται (τείνει) προς το άπειρο.* Είναι λογικό να υποθέσουμε λοιπόν πως για να αποκτήσουμε την επιθυμητή 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των ευθειών που διέρχονται από την αρχή O (φωτεινές ακτίνες που προσπίπτουν στο μάτι μας) πρέπει να *μεγαλώσουμε* το σύνολο Π ενώνοντάς το με το σύνολο Π_∞ των *ιδεατών σημείων στο άπειρο.* Θέλουμε ένα σημείο στο άπειρο για κάθε ευθεία παράλληλη στο Π, συνεπώς ο πληθάριθμος του συνόλου Π_∞ θα είναι ίσος με το πλήθος των ευθειών που διέρχονται από την αρχή O και βρίσκονται στο επίπεδο Oxy. Το σύνολο που προκύπτει από την παραπάνω ένωση

$$\hat{\Pi} = \Pi \cup \Pi_\infty$$

λέγεται *(πραγματικό) προβολικό επίπεδο.*

Η ιδέα των σημείων στο άπειρο προέρχεται από την προσπάθεια να σχεδιάσουμε ή να ζωγραφίσουμε 3-διάστατα αντικείμενα στο χαρτί ή σε ένα καμβά. Ο αυστηρός μαθηματικός ορισμός δεν είναι ιδιαίτερα διαφωτιστικός διαισθητικά:

Ορισμός 1. Το (πραγματικό) προβολικό επίπεδο είναι το σύνολο των ευθειών που διέρχονται από την αρχή ενός Καρτεσιανού Συστήματος Συντεταγμένων O του (πραγματικού) διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$ (που ταυτίζεται με τον φυσικό 3-διάστατο χώρο γύρω μας).

Σημείωση 1: Υπενθυμίζουμε πως ο παραπάνω ορισμός είναι ειδική περίπτωση του γενικού ορισμού του προβολικού χώρου ενός τυχαίου (πραγματικού αλλά και με οποιοδήποτε άλλο σώμα $\mathbb{F}$ εκτός των πραγματικών αριθμών με χαρακτηριστική διάφορη του 2) διανυσματικού χώρου V ως το σύνολο των διανυσματικών υποχώρων διάστασης ένα του V. Προφανώς οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή O αποτελούν τους μοναδικούς μονοδιάστατους διανυσματικούς υποχώρους του πραγματικού διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$ (οι ευθείες του χώρου που δεν διέρχονται από την αρχή O δεν αποτελούν διανυσματικούς υποχώρους διότι δεν περιέχουν το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης των διανυσμάτων–μηδενικό διάνυσμα–που ταυτίζεται με το σημείο O).

Μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή O καθορίζεται από ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{v}$ πάνω στην εν λόγω ευθεία. Τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{v'}$ ορίζουν την ίδια ευθεία εάν και μόνο εάν $\vec{v'} = \lambda\vec{v}$ για κάποιο μη-μηδενικό $\lambda \in \mathbb{R}$. Συνεπώς ο Ορισμός 1 επαναδιατυπώνεται ισοδύναμα ως ακολούθως:

Ορισμός 1′. Το (πραγματικό) προβολικό επίπεδο ορίζεται ως το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας (σύνολο πηλίκο) του συνόλου $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ εφοδιασμένου με την σχέση ισοδυναμίας

$$\vec{v'} \sim \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v'} = \lambda\vec{v}$$

για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Το πλεονέκτημα του Ορισμού 1′ είναι ότι καθιστά περίπου προφανές ότι το προβολικό επίπεδο αποτελεί τοπολογικό χώρο.

Σύμφωνα με τον Ορισμό 1′, ένα σημείο του προβολικού επιπέδου $\hat{\Pi}$ προσδιορίζεται μέσω *ομογενών συντεταγμένων* (x, y, z) που δεν είναι όλες μηδέν, οι οποίες όμως υπόκεινται στον περιορισμό ότι οι τριάδες συντεταγμένων (x, y, z) και $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ περιγράφουν το ίδιο σημείο του προβολικού επιπέδου εάν $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Για να αποδείξουμε πως το προβολικό επίπεδο αποτελεί επιφάνεια, θα δείξουμε ότι αποτελείται από την ένωση τριών ανοικτών συνόλων U_1, U_2 και U_3, το καθένα εκ των οποίων είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{R}^2$. Ορίζουμε το U_1 ως το σύνολο των σημείων των οποίων οι ομογενείς συντεταγμένες (x, y, z) ικανοποιούν την σχέση $x \neq 0$. Όμοια τα U_2 και U_3 αποτελούνται από τα σημεία των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν τις σχέσεις $y \neq 0$ και $z \neq 0$ αντίστοιχα. Ταυτίζουμε το U_3 με το επίπεδο $z = 1$ (που ταυτίζεται με το $\mathbb{R}^2$) μέσω της αντιστοιχίας (απεικόνισης)

$$(x, y, z) \leftrightarrow (\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1),$$

και εύκολα ελέγχει κανείς πως η παραπάνω αντιστοιχία (απεικόνιση) αποτελεί ομοιομορφισμό. Ομοίως τα σύνολα U_1 και U_2 μπορούν να ταυτιστούν με τα επίπεδα $x = 1$ και $y = 1$ αντίστοιχα (που το καθένα εξ αυτών ταυτίζεται με το $\mathbb{R}^2$).

Για να δεί κανείς διαισθητικά το σχήμα του προβολικού επιπέδου, παραθέτουμε το παρακάτων Θεώρημα:

Θεώρημα 1. Το προβολικό επίπεδο προκύπτει ως ο χώρος πηλίκο του μοναδιαίου δίσκου $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ εφοδιασμένου με την παρακάτω σχέση ισοδυναμίας που ταυτίζει τα αντιδιαμετρικά σημεία του μοναδιαίου κύκλου που αποτελεί το σύνορο του μοναδιαίου δίσκου

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \quad \text{και} \quad y = y', \\ x = -x', y = -y', \quad \text{και} \quad x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Απόδειξη: Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [5], στο [22] ή ακόμη και στις σημειώσεις του μαθήματος της Προβολικής Γεωμετρίας.

Από το Θεώρημα 1 προκύπτει πως το *επίπεδο μοντέλο* του προβολικού επιπέδου αποτελείται από ένα *μοναδιαίο τετράγωνο του οποίου οι απέναντι παράλληλες πλευρές ταυτίζονται ανά δύο με ταυτόχρονη συστροφή και στα δύο ζεύγη των πλευρών.*

Σημείωση 2: Για λόγους πληρότητας αναφέρουμε πως το *επίπεδο μοντέλο της σφαίρας* αποτελείται από ένα μοναδιαίο τετράγωνο στο οποίο ταυτίζονται δύο διαδοχικές κάθετες πλευρές ανά δύο (και όχι απέναντι παράλληλες πλευρές όπως στο τόρους, τη φιάλη Klein και το προβολικό επίπεδο).

Όπως και η φιάλη Klein, έτσι και το προβολικό επίπεδο δεν αποτελεί επιφάνεια που μπορεί να πραγματοποιηθεί ως επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ χωρίς σημεία αυτοτομής, δηλαδή δεν μπορεί να εμφυτευθεί στον $\mathbb{R}^3$. Από το Θεώρημα 1 προκύπτει πως το προβολικό επίπεδο προκύπτει από τον δίσκο με ένωση μιας δέσμης Möbius κατά μήκος του συνόρου διότι η δέσμη Möbius και ο δίσκος έχουν το ίδιο σύνορο (ή ακριβέστερα ομοιομορφικά σύνορα).

Μια αυτοτεμνόμενη αναπαράσταση του προβολικού επιπέδου στον $\mathbb{R}^3$ είναι ως *επτάεδρο* αποτελούμενο από τρία τετράγωνα με μοναδιαία πλευρά που τέμνονται κάθετα κατά μήκος των διαγωνίων τους, προσθέτοντας τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα με μοναδιαία πλευρά. Η πιο όμορφη αναπαράσταση όμως είναι ως *επιφάνεια Boy* (βλέπε τις σημειώσεις Προβολικής Γεωμετρίας).

Σημείωση 3: Το τόρους είναι μια επιφάνεια που μπορεί να εμφυτευθεί στο χώρο $\mathbb{R}^3$. Η δέσμη Möbius, η φιάλη Klein και το (πραγματικό) προβολικό επίπεδο (επιφάνεια Boy) αποτελούν παραδείγματα επιφανειών που δεν μπορούν να εμφυτευθούν στον χώρο $\mathbb{R}^3$ αλλά μόνο να εμβαπτισθούν. Σημειώνουμε πως όλες οι επιφάνειες μπορούν να εμβαπτισθούν στο χώρο $\mathbb{R}^3$.

14.3 Επιφάνειες Riemann

Η τελευταία κλάση παραδειγμάτων γενικευμένων επιφανειών είναι ίσως η πιο δύσκολη να βρούμε κίνητρα για την κατασκευή και την μελέτη τους αλλά δεν υστερούν καθόλου σε χρησιμότητα. [Η παράγραφος αυτή είναι προαιρετική και δεν απαιτείται για την κατανόηση των παρακάτω. Απευθύνεται σε αναγνώστες που έχουν κάποια εξοικείωση με την μιγαδική ανάλυση. Δεν θα επεκταθούμε πολύ στις επιφάνειες Riemann οι οποίες σημειωτέον αποτελούν σημαντικό κομμάτι τόσο της θεωρίας επιφανειών όσο και της μιγαδικής ανάλυσης με πάμπολες εφαρμογές τόσο στα μαθηματικά (για παράδειγμα στη θεωρία διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους) όσο και στη φυσική].

Στη *μιγαδική ανάλυση* είναι συχνή η εμφάνιση *πλειονότιμων συναρτήσεων* όπως οι $\log z$ και $\sqrt{1-z^2}$. Ο πιο στοιχειώδης τρόπος να τις μελετήσουμε είναι να περιοριστούμε σε ένα ανοικτό υποσύνολο V του επιπέδου Argand στο οποίο να μπορεί να ορισθεί μια μονότιμη ολόμορφη συνάρτηση που να παίρνει σε κάθε σημείο μία από τις πολλές τιμές της προβληματικά ορισμένης συνάρτησης που μας ενδιαφέρει. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της $\log z$, επιλέγουμε το V να είναι το $\mathbb{C} - Ox'$ (δηλαδή το επίπεδο χωρίς τον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα) και εκεί ορίζουμε

$$\log(re^{i\theta}) := \log r + e^{i\theta},$$

με $\theta \in (-\pi, \pi)$. Αυτή η προσέγγιση επαρκεί στις περισσότερες περιπτώσεις αλλά έχει μειονεκτήματα: η επιλογή αυτή του V είναι αυθαίρετη, θα μπορούσαμε να αφαιρέσουμε τον αρνητικό φανταστικό ημιάξονα χωρίς σημαντικές διαφοροποιήσεις.

Ένα απλό παράδειγμα που δείχνει το αρχικό στάδιο της ιδέας για τον ορισμό των επιφανειών Riemann είναι το εξής: ο συντομότερος (αλλά όχι ευκολότερος) τρόπος για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$$

είναι να ολοκληρώσουμε την συνάρτηση

$$\frac{\log z}{1+z^3}$$

γύρω από την κλειστή τροχιά γ στο επίπεδο Argand που έχει μια τρύπα γύρω από την αρχή O.

Θεωρούμε ότι ο ορισμός της συνάρτησης $\log z$ σε όλο το επίπεδο Argand εκτός από τον θετικό πραγματικό ημιάξονα δίδεται από τη σχέση $\log z := log|z| + iarg(z)$, με $0 < arg(z) < 2\pi$. Όμως η τροχιά περιλαμβάνει διπλή ολοκλήρωση κατά μήκος του θετικού πραγματικού ημιάξονα, μία χρησιμοποιώντας τις πραγματικές τιμές του $\log|z|$ και μία χρησιμοποιώντας την συνάρτηση $\log|z| + 2\pi i$ (με αντίθετες φορές). Μπορούμε να παρακάμψουμε το πρόβλημα αν μετακινήσουμε λίγο την κλειστή τροχιά ολοκλήρωσης από το κόψιμο (θετικός πραγματικός ημιάξονας) και μετά πάρουμε το σχετικό όριο αλλά αυτή η μέθοδος εισάγει μη αναγκαίες περιπλοκές.

Μια καλύτερη αλλά πιο απαιτητική μέθοδος είναι να εισάγουμε την επιφάνεια Riemann πάνω στην οποία ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\frac{\log z}{1+z^3}.$$

Θεωρούμε ένα στέλεχος (stalk) $\{X_k\}$, $k = 1, 2, ...$, από αντίγραφα του επιπέδου Argand (ο όρος *στέλεχος* προέρχεται από την αλγεβρική γεωμετρία αλλά δεν θα δώσουμε τον ακριβή ορισμό μιας και δεν είναι απαραίτητος για την περισσότερο ποιοτική συζήτηση αυτής της παραγράφου, παραπέμπουμε στο [13] και [12]), όπου το κάθε αντίγραφο είναι κομμένο κατά μήκος του θετικού πραγματικού ημιάξονα. Τοποθετούμε τα αντίγραφα το ένα κάτω από το άλλο και ενώνουμε το κάτω χείλος το κοψίματος του X_k με το επάνω χείλος του κοψίματος του X_{k+1}, $\forall k$, έτσι ώστε να σχηματιστεί μια επιφάνεια X που μοιάζει με μια άπειρη σπειροειδή σκάλα που έχει συμπιεσθεί και έχει γίνει επίπεδη. Η συνάρτηση

$$\frac{\log z}{1+z^3}$$

είναι καλά ορισμένη στην επιφάνεια X: στο X_k έχουμε

$$2\pi k \leq Im(\log z) \leq 2\pi(k+1).$$

Η κλειστή τροχιά γ ευρίσκεται πάνω στην X και οι δύο διελεύσεις από τον θετικό πραγματικό ημιάξονα βρίσκονται σε διαφορετικά φύλλα της X.

Ας θεωρήσουμε τώρα την επιφάνεια Riemann για την συνάρτηση $\sqrt{1-z^2}$. Σύμφωνα με το γένος, η συνάρτηση αυτή είναι δίτιμη, οπότε παίρνουμε δύο αντίγραφα X^+ και X^- του επιπέδου Argand $\mathbb{C}$ που το καθένα είναι κομμένο κατά μήκος του διαστήματος $(-1, 1)$. Στη συνέχεια ενώνουμε το άνω χείλος του X^+ στο κάτω χείλος του X^- και το κάτω χείλος του X^+ στο άνω χείλος του X^-. Ορίζουμε την συνάρτηση $\sqrt{1-z^2}$ στο σύνολο $X := X^+ \cup X^-$ έτσι ώστε $Im(\sqrt{1-z^2}) \geq 0$ για $z \in X^+$ και $Im(\sqrt{1-z^2}) \leq 0$ για $z \in X^-$. (Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $\sqrt{1-z^2}$ είναι πραγματική μόνο εάν $z \in [-1,1]$). Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση $\sqrt{1-z^2}$ παίρνει την τιμή 0 σε καθένα από τα διακλαδιζόμενα σημεία $z = \pm 1$, οπότε μπορούμε να προσθέσουμε αυτά τα δύο σημεία στην X. Απαιτεί φαντασία για να δούμε το σχήμα αυτής της επιφάνειας αλλά το ουσιώδες στοιχείο είναι πως αυτή η επιφάνεια είναι ομοιομορφική με το επίπεδο Argand με μια τρύπα στη μέση διότι έχει αφαιρεθεί το σημείο 0, δηλαδή $X \simeq \mathbb{C} - \{0\}$. Ο ομοιομορφισμός δίδεται εκπεφρασμένα από την απεικόνιση

$$\mathbb{C} - \{0\} \ni \zeta \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1}) \in X^+ & \text{εάν} \quad |\zeta| \geq 1, \\ \frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1}) \in X^- & \text{εάν} \quad |\zeta| \leq 1. \end{cases}$$

Η γενικευμένη επιφάνεια που καλείται επιφάνεια Riemann μιας πλειονότιμης μιγαδικής συνάρτησης f, ταυτίζεται με το γράφημα της f, δηλαδή με το σύνολο των ζευγών $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ έτσι ώστε το w είναι μία από τις τιμές της $f(z)$. Συνεπώς η επιφάνεια Riemann που αντιστοιχεί στην μιγαδική συνάρτηση $\sqrt{1-z^2}$ ταυτίζεται με την μιγαδική αλγεβρική καμπύλη $x^2 + y^2 = 1$ που είδαμε. Είναι θέμα γούστου εάν κανείς επιθυμεί να την βλέπει ως υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}^2$ ή ως ένα συμπιεσμένο αλεξίπτωτο πάνω στο επίπεδο Argand. Είναι χρήσιμο πάντως να έχει κανείς την δυνατότητα να χρησιμοποιεί και τις δύο εικόνες.

15 Μελέτη Αφηρημένων Επιφανειών

15.1 Χάρτες και Άτλαντες

Η συζήτηση που ακολουθεί δείχνει την σχέση της διαφορικής γεωμετρίας (θεωρία επιφανειών) με την γεωγραφία και αποτελεί ένα ισχυρό επιχείρημα για να δούμε ότι σχεδόν πάντα οι αφηρημένες μαθηματικές έννοιες προκύπτουν από πρακτικά προβλήματα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση από την ανάγκη προσδιορισμού της θέσης στην υδρόγειο που αντιμετώπισαν οι ναυτικοί στα χρόνια των μεγάλων θαλασσοπόρων εξερευνητών.

Ορισμός 1. Έστω X επιφάνεια. Ένας ομοιομορφισμός $\phi : U \to V$, από ένα ανοικτό σύνολο $U \subset X$ σε ένα ανοικτό σύνολο $V \subset \mathbb{R}^2$ ονομάζεται *χάρτης* ή *σύστημα συντεταγμένων* της επιφάνειας X.

Ορισμός 2. Έστω X επιφάνεια. Μια συλλογή χαρτών $\{\phi_a : U_a \to V_a\}$ τέτοιοι ώστε τα σύνολα U_a να καλύπτουν την επιφάνεια X ονομάζεται *άτλαντας* της X. Εξ ορισμού κάθε επιφάνεια έχει τουλάχιστον έναν άτλαντα.

Εάν η X είναι μια επιφάνεια εμφυτευμένη στον $\mathbb{R}^3$, ο απλούστερος τρόπος για να βρίσκουμε χάρτες της X είναι να παίρνουμε τις προβολές της επιφάνειας X πάνω στα επίπεδα συντεταγμένων του $\mathbb{R}^3$. Για παράδειγμα αν η X είναι η μοναδιαία σφαίρα και U είναι το ανοικτό ημισφαίριο που ορίζεται από την σχέση $z > 0$, (το βόρειο ημισφαίριο ας πούμε), τότε η απεικόνιση $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ από το U στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο του $\mathbb{R}^2$, (το επίπεδο του ισημερινού), αποτελεί έναν χάρτη και η X έχει έναν άτλαντα που αποτελείται από έξι τέτοιους χάρτες.

Οι χάρτες που ορίζονται όμως μέσω προβολών μπορεί να είναι οι πιο προφανείς αλλά δυστυχώς σπάνια είναι χρήσιμοι. Για την περίπτωση της σφαίρας, όπως είναι γνωστό από την εποχή τουλάχιστον του Μαγγελάνου, ο καλύτερος χάρτης είναι αυτός που δίδεται από το γεωγραφικό μήκος και το γεωγραφικό πλάτος. Ορίζεται στο ανοικτό σύνολο U παραπάνω, αν αφαιρέσουμε από την σφαίρα την διεθνή γραμμή ημερομηνίας (μέγιστος κύκλος, μεσημβρινός) οπότε αποκτάμε έναν ομοιομορφισμό μεταξύ του U και του ανοικτού συνόλου $(-\pi, \pi) \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ του $\mathbb{R}^2$. Ακόμη όμως και αυτός ο χάρτης δεν είναι αυτός που χρησιμοποιείται στους γεωγραφικούς άτλαντες σήμερα για παράδειγμα. Με δεδομένο ότι *δεν είναι δυνατόν να κατασκευασθεί γεωγραφικός άτλαντας (επίπεδος χάρτης) της υδρογείου σφαίρας που να είναι ακριβώς υπό κλίμακα* (δηλαδή όλες οι αποστάσεις στην υδρόγειο να απεικονίζονται υπό κλίμακα στον γεωγραφικό χάρτη), οι γεωγράφοι (και οι ναυτιλόμενοι και οι αεροπόροι στις μέρες μας) απαιτούν χάρτες που να έχουν ασθενέστερες αλλά παρά ταύτα χρήσιμες ιδιότητες όπως οι παρακάτω: συμμορφία (διατήρηση γωνιών), ισεμβαδικότητα (διατήρηση εμβαδών) και αναπαράσταση των μεγίστων κύκλων της υδρόγειας σφαίρας (που αποτελούν τις συντομότερες διαδρομές στη σφαίρα) με ευθείες του επιπέδου.

Σημείωση 1: Η αδυναμία κατασκευής χαρτών της υδρογείου υπό κλίμακα προκύπτει από το περίφημο Theorema Egregium του Gauss που θα δούμε παρακάτω, πόρισμα του οποίου αποτελεί το γεγονός ότι δεν υπάρχει ισομετρία μεταξύ μιας επιφάνειας με καμπυλότητα Gauss μηδέν (όπως το επίπεδο) και μιας επιφάνειας με σταθερή θετική καμπυλότητα Gauss (όπως είναι η σφαίρα).

Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

1. *Στερεογραφική Προβολή.* Δίδεται από τον χάρτη $\phi : U \to V$ που αποτελείται από την προβολή από τον βόρειο πόλο στο επίπεδο του ισημερινού. Συνεπώς, για την μοναδιαία σφαίρα $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ το πεδίο ορισμού U της ϕ είναι το σύνολο $U = X - \{(0, 0, 1)\}$, το πεδίο τιμών είναι $V = \mathbb{R}^2$ και η απεικόνιση δίδεται από την σχέση $\phi(x, y, z) = (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z})$. Αυτός ο χάρτης είναι σύμμορφος (δηλαδή η απεικόνιση ϕ παραπάνω διατηρεί τις γωνίες).

2. *Προβολή Mercator.* Αυτός ο χάρτης της σφαίρας ορίζεται στο συμπλήρωμα της γραμμής ημερομηνίας (δηλαδή το πεδίο ορισμού είναι η σφαίρα εκτός από τον μεσημβρινό αλλαγής ημερομηνίας). Απεικονίζει ένα τυχαίο σημείο της σφαίρας με γεωγραφικό μήκος ϕ και γεωγραφικό πλάτος θ στο σημείο $(\phi, \log[\tan(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})]) \in (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$. Δηλαδή

$$(\phi, \theta) \mapsto (\phi, \log[\tan(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})])$$

Αυτός ο χάρτης είναι επίσης σύμμορφος και είναι ιδιαίτερα χρήσιμος στην ναυσιπλοΐα.

3. Ο πιο προφανής χάρτης που διατηρεί τα εμβαδά (που λέγεται ισεμβαδικός ή ισοδύναμος στην χαρτογραφία), απεικονίζει το σημείο της σφαίρας με γεωγραφικό μήκος ϕ και γεωγραφικό πλάτος θ στο σημείο του $\mathbb{R}^2$ με συντεταγμένες $(\phi, \sin\theta)$, δηλαδή

$$(\phi, \theta) \mapsto (\phi, \sin\theta).$$

4. *Προβολή Mollweide.* Αυτός είναι ο πιο χρήσιμος ισεμβαδικός χάρτης που απεικονίζει το σημείο της σφαίρας με γεωγραφικό μήκος ϕ και γεωγραφικό πλάτος θ στο σημείο του $\mathbb{R}^2$ με συντεταγμένες $(\phi \cos\psi(\theta), \frac{1}{2}\pi \sin\psi(\theta))$, όπου η αμφεικόνιση $\psi : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ορίζεται ως εξής:

$$\psi(\theta) + \frac{1}{2}\sin 2\psi(\theta) = \frac{1}{2}\pi \sin\theta.$$

5. Ο μοναδικός χάρτης που απεικονίζει τους μέγιστους κύκλους της σφαίρας σε ευθείες στο επίπεδο είναι η προβολή από το κέντρο τη σφαίρας στο εφαπτόμενο επίπεδο σε κάποιο σημείο της σφαίρας. Συνεπώς απεικονίζει το ανοικτό βόρειο ημισφαίριο U της σφαίρας στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ ως εξής:

$$(\phi, \theta) \mapsto (\cot\theta \cos\phi, \cot\theta \sin\phi).$$

15.2 Προσανατολισμός Επιφανειών

Αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό του κόσμου που μας περιβάλλει το γεγονός ότι οι ομοιομορφισμοί $f : V \to V'$ μεταξύ δύο τυχαίων συνεκτικών ανοικτών συνόλων $V, V' \subset \mathbb{R}^2$ χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: αυτούς που διατηρούν τον προσανατολισμό και αυτούς που αντιστρέφουν τον προσανατολισμό. Οι πρώτοι απεικονίζουν απλές κλειστές καμπύλες του επιπέδου με φορά σύμφωνη με αυτή των δεικτών του ρολογιού σε καμπύλες με την ίδια φορά ενώ οι δεύτεροι αντιστρέφουν την φορά.

Το παραπάνω γεγονός μας παρέχει την δυνατότητα να χωρίσουμε τις επιφάνειες σε δύο κατηγορίες: τις *προσανατολίσιμες* και τις *μη-προσανατολίσιμες*:

Ορισμός 1. Μια επιφάνεια λέγεται *προσανατολίσιμη* εάν δεν περιέχει κάποιο ανοικτό υποσύνολο που να είναι ομοιομορφικό με την δέσμη Möbius.

Οι επιφάνειες που δεν είναι προσανατολίσιμες λέγονται *μη-προσανατολίσιμες*.

Από τις επιφάνειες που είδαμε στις προηγούμενες παραγράφους όλες είναι προσανατολίσιμες εκτός από την δέσμη Möbius, την φιάλη Klein και το (πραγματικό) προβολικό επίπεδο (επιφάνεια Boy).

Ο Ορισμός 1 παραπάνω είναι σύντομος και ίσως φαίνεται απλός αλλά στην πραγματικότητα, στις τοπολογικές επιφάνειες, η έννοια του προσανατολισμού είναι αρκετά δύσκολη και πολύπλοκη. Όπως θα δούμε παρακάτω, το θέμα του προσανατολισμού απλοποιείται δραστικά στην περίπτωση των λείων επιφανειών και απλοποιείται ακόμη περισσότερο στην περίπτωση των λείων επιφανειων που είναι εμφυτευμένες στον χώρο $\mathbb{R}^3$.

15.3 Απεικονίσεις Μετάβασης και Λείες Επιφάνειες

Είδαμε πως μια επιφάνεια επιδέχεται πολλούς χάρτες, (άρα και άτλαντες), συνεπώς είναι χρήσιμο να δούμε πως συνδέονται μεταξύ τους διαφορετικοί χάρτες της ίδιας επιφάνειας. Αυτό γίνεται μέσω των *απεικονίσεων μετάβασης*:

Ορισμός 1. Έστω X επιφάνεια και $\{\phi_i : V_i \to U_i\}$ ένας άτλαντας της X. Θεωρούμε δύο ανοικτά υποσύνολα V_i και V_j της X και τους αντίστοιχους ομοιομορφισμούς $\phi_i : V_i \to U_i$ και $\phi_j : V_j \to U_j$ με $i \neq j$ και $V_i \cap V_j \neq \emptyset$. Στην τομή $V_i \cap V_j$ των V_i και V_j ορίζονται και οι δύο ομοιομορφισμοί: $\phi_i : V_i \cap V_j \to U_i$ και $\phi_j : V_i \cap V_j \to U_j$. Φανερά $\phi_i(V_i \cap V_j) \subset U_i \subset \mathbb{R}^2$ αλλά και $\phi_j(V_i \cap V_j) \subset U_j \subset \mathbb{R}^2$. Ορίζεται η *σύνθεσή τους* $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(V_i \cap V_j) \to \phi_j(V_i \cap V_j)$ που είναι *ομοιομορφισμός* και ονομάζεται *απεικόνιση μετάβασης*.

Προφανώς οι απεικονίσεις μετάβασης έχουν πεδίο ορισμού κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και παίρνουν τιμές επίσης σε κάποιο άλλο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, συνεπώς έχει νόημα να μιλάμε για τις *παραγώγους* αυτών.

Ορισμός 2. Μια επιφάνεια λέγεται *λεία* εάν έχει έναν άτλαντα του οποίου οι απεικονίσεις μετάβασης είναι *λείες*, δηλαδή υπάρχουν παράγωγοι άπειρης τάξης και είναι συνεχείς, δηλαδή οι απεικονίσεις μετάβασης είναι άπειρης κλάσης.

Παραδείγματα: Η σφαίρα S^2 και το τόρους είναι λείες επιφάνειες ενώ η παράπλευρη επιφάνεια ενός πολυέδρου (πχ κύβος) όχι διότι στις ακμές δεν υπάρχουν παράγωγοι των απεικονίσεων μετάβασης.

Ορισμός 3. Έστω X_1 και X_2 δύο λείες επιφάνειες με άτλαντες $\{\phi_i : V_i^1 \to U_i^1\}$ και $\{\psi_i : V_i^2 \to U_i^2\}$ αντίστοιχα (των οποίων οι απεικονίσεις μετάβασης είναι λείες σύμφωνα με τον Ορισμό 2 της λείας επιφάνειας παραπάνω). Μια *λεία απεικόνιση* $f : X_1 \to X_2$, είναι μια συνεχής απεικόνιση $f : X_1 \to X_2$, τέτοια ώστε η σύνθεση $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ να είναι μια λεία απεικόνιση του $\mathbb{R}^2$ για κάθε χάρτη (όπου υποθέτουμε τους κατάλληλους περιορισμούς στα πεδία ορισμών των απεικονίσεων έτσι ώστε η σύνθεση να είναι πάντα καλά ορισμένη).

15.4 Προσανατολισμός Λείων Επιφανειών

Στις λείες επιφάνειες, το πρόβλημα του προσανατολισμού απλοποιείται. Στην πραγματικότητα, ένας λείος ομοιομορφισμός (δηλαδή ένας *διαφορομορφισμός*) $f : V_1 \to V_2$ μεταξύ δύο συνεκτικών ανοικτών υποσυνόλων $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, διατηρεί ή όχι τον προσανατολισμό ανάλογα με το εάν η Ιακωβιανή $det(Df)$

είναι θετική ή αρνητική $\forall v \in V_1$. Φανερά η Ιακωβιανή δεν μπορεί να μηδενισθεί διότι η γραμμική απεικόνιση Df (στη συγκεκριμένη περίπτωση πρόκειται για έναν 2×2 πίνακα) είναι *αντιστρέψιμη*. Δίδουμε λοιπόν τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 1. Μια απεικόνιση $f : V_1 \to V_2$ μεταξύ δύο συνεκτικών ανοικτών υποσυνόλων $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ θα λέγεται ότι *διατηρεί τον προσανατολισμό* εάν η Ιακωβιανή $det(Df)$ είναι θετική.

Στην αντίθετη περίπτωση θα λέμε ότι η απεικόνιση *δεν διατηρεί τον προσανατολισμό.*

Με την βοήθεια του παραπάνω ορισμού, μπορούμε τώρα να ορίσουμε ποιες λείες επιφάνειες είναι προσανατολίσιμες:

Ορισμός 2. Μια λεία επιφάνεια λέγεται *προσανατολίσιμη* εάν διαθέτει κάποιον άτλαντα του οποίου όλες οι απεικονίσεις μετάβασης διατηρούν τον προσανατολισμό (δηλαδή έχουν θετική Ιακωβιανή).

15.5 Ορισμός Επιφανειών με χρήση Άτλαντα

Η σφαίρα Riemann Σ περιγράφεται ως το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ μαζί με την προσθήκη ενός επ΄ άπειρον σημείου που θα συμβολίζεται ∞. Συνεπώς ισχύει ότι $\Sigma - \{\infty\} = \mathbb{C}$ και υπάρχει μια αμφεικόνιση $\phi : \Sigma - \{\infty\} \to \mathbb{C}$ που δίδεται από την σχέση $z \mapsto z^{-1}$ εάν $z \neq \infty$ και $\infty \mapsto 0$.

Ορίζουμε μια τοπολογία στην Σ δηλώνοντας ότι κάποιο τυχαίο $U \subset \Sigma$ είναι ανοικτό, εάν τα $U - \{\infty\}$ και $\phi(U - \{\infty\})$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{C}$. Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας την στερεογραφική προβολή αποδεικνύεται πως η Σ είναι ομοιομορφική με την μοναδιαία σφαίρα στον χώρο $\mathbb{R}^3$.

Υπάρχει μια γενικότερη μέθοδος ορισμού επιφανειών χρησιμοποιώντας έναν άτλαντα: Εάν X είναι ένα σύνολο που είναι ίσο με την ένωση μιας οικογένειας υποσυνόλων του, δηλαδή $X = \bigcup_a U_a$, όπου $\{U_a\}$ υποσύνολα του X, και για κάθε δείκτη a υπάρχει μια αμφεικόνιση $\phi_a : U_a \to V_a$, όπου V_a ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, τότε μπορούμε πάντα να ορίσουμε μια τοπολογία στο X με την παρακάτω συνταγή: το U είναι ανοικτό εάν και μόνο εάν το $\phi_a(U \cap U_a)$ είναι ανοικτό για κάθε a. Τότε η X αποτελεί επιφάνεια εάν ικανοποιούνται οι παρακάτω δύο συνθήκες:

(α). κάθε απεικόνιση μετάβασης $\phi_b \circ \phi_a^{-1} : \phi_a(U_a \cap U_b) \to \phi_b(U_a \cap U_b)$ είναι ομοιομορφισμός και

(β). το σύνολο $\{(x,x) | x \in U_a \cap U_b\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $U_a \times U_b$.

16 Τοπολογική Κατηγοριοποίηση Επιφανειών

Η παράγραφος αυτή αποτελεί τον πυρήνα της τοπολογικής μελέτης των επιφανειών (πολλαπλότητες διάστασης 2).

Θα επιχειρήσουμε να κάνουμε τοπολογική κατηγοριοποίηση (classification) των *συμπαγών και συνεκτικών* επιφανειών ως προς την βασική σχέση ισοδυναμίας της τοπολογίας που είναι ο ομοιομορφισμός. Οι συμπαγείς επιφάνειες γενικά χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες όπως είδαμε: στις *προσανατολίσιμες* και τις *μη-προσανατολίσιμες*. Η κατηγοριοποίηση γίνεται ξεχωριστά για την κάθε κατηγορία.

Ορισμός 1. Για κάθε προσανατολίσιμη συμπαγή επιφάνεια X ορίζουμε το *γένος (genus)* αυτής $g(X)$ που είναι *ο αριθμός των τρυπών* που διαθέτει. Προφανώς το γένος είναι θετικός ακέραιος αριθμός ή μηδέν. Ο παραπάνω ορισμός του γένους είναι διαισθητικός, θα δούμε σύντομα παρακάτω έναν πιο αυστηρό ορισμό μέσω της χαρακτηριστικής Euler που όμως απαιτεί επιπλέον γνώσεις τοπολογίας. Φανερά η έννοια του γένους αφορά την τοπολογική ιδιότητα της *συνεκτικότητας:* οι απλά συνεκτικές επιφάνειες (όπως η σφαίρα S^2) έχουν γένος $g(S^2) = 0$. Το τόρους έχει γένος 1 (διότι έχει μια τρύπα).

Ορισμός 2. Μπορούμε να πάρουμε επιφάνειες με μεγαλύτερο γένος χρησιμοποιώντας μια πράξη μεταξύ επιφανειών που λέγεται *συνεκτικό άθροισμα (connected sum)* και συμβολίζεται με $\sharp$. Ο ορισμός φαίνεται καλύτερα με ένα παράδειγμα: αν θεωρήσουμε δύο τόρι, αφαιρούμε έναν κυκλικό δίσκο και από τα δύο και τα ενώνουμε με έναν κύλινδρο. Θα αποκτήσουμε μια επιφάνεια με δύο τρύπες. Αν X και Y είναι δύο προσανατολίσιμες συμπαγείς επιφάνειες, γενικά ισχύει

$$g(X\sharp Y) = g(X) + g(Y).$$

Σημείωση 1: Είδαμε πως αποκτάμε την σφαίρα S^2, το τόρους, την δέσμη Möbius, την φιάλη Klein και το προβολικό επίπεδο από ένα τετράγωνο με κατάλληλη ταύτιση ζευγών των απέναντι πλευρών αυτού. Μπορούμε με την ίδια μέθοδο να πάρουμε συμπαγείς προσανατολίσιμες επιφάνειες με *μεγαλύτερο γένος* αν χρησιμοποιήσουμε *πολύγωνα* και ταυτίσουμε τις πλευρές τους κατάλληλα ανά ζεύγη. Αυτά λέγονται *επίπεδα μοντέλα συμπαγών προσανατολίσιμων επιφανειών με μεγαλύτερο από* 1 *γένος*. Για επιφάνεια με γένος g χρειαζόμαστε $4g-$γωνο (δηλαδή τετραπλάσιο αριθμό πλευρών από το γένος, για το τόρους που έχει γένος 1 χρειαζόμαστε τετράγωνο και ταυτίζουμε μια πλευρά με την μεθεπόμενη χωρίς συστροφή). Σε αυτή την περίπτωση είναι πιο πρακτικό να χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό με τις ακολουθίες γραμμάτων για τις πλευρές:

χρησιμοποιούμε τόσα γράμματα όσα τα ζεύγη των πλευρών που θα ταυτιστούν, άρα για επιφάνεια γένους g χρειαζόμαστε $2g$ διαφορετικά γράμματα. Διαγράφουμε το πολύγωνο με την φορά των δεικτών του ρολογιού και αν συναντάμε την πλευρά με την ίδια φορά γράφουμε το αντίστοιχο γράμμα, αν την συναντάμε με την αντίθετη γράφουμε το γράμμα υψωμένο στην δύναμη -1. Για παράδειγμα, με αυτόν τον συμβολισμό, το επίπεδο μοντέλο του τόρους συμβολίζεται ως $aba^{-1}b^{-1}$, της σφαίρας $aa^{-1}bb^{-1}$, της φιάλης Klein $abab^{-1}$ και της επιφάνειας Boy $abab$. Η κυκλική τάξη δεν παίζει ρόλο. Πολλά επίπεδα μοντέλα ορίζουν την ίδια επιφάνεια. Με αυτόν τον συμβολισμό μια συμπαγής προσανατολίσιμη επιφάνεια με γένος g συμβολίζεται $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$. *Τα επίπεδα μοντέλα έχουν μεγάλη σημασία διότι μέσω αυτών γίνονται οι αποδείξεις των δύο βασικών θεωρημάτων που δίδουν την τοπολογική κατηγοριοποίηση των επιφανειών* όπως θα δούμε παρακάτω.

Το παρακάτω θεώρημα μας λέει πως υπάρχουν *σχετικά λίγες* συμπαγείς συνεκτικές προσανατολίσιμες επιφάνειες:

Θεώρημα 1: Κάθε συμπαγής συνεκτική προσανατολίσιμη επιφάνεια είναι ομοιομορφική με το συνεκτικό άθροισμα από g ως προς το πλήθος τόρι για κάποιο $g \geq 0$, όπου g θετικός ακέραιος ή μηδέν. Δηλαδή κάθε συμπαγής προσανατολίσιμη επιφάνεια είναι ομοιομορφική με ένα τόρους με γένος g, όπου $g \geq 0$. Με άλλα λόγια η κατηγοριοποίηση των συμπαγών προσανατολίσιμων επιφανειών (ως προς ομοιομορφισμό) γίνεται με βάση το γένος: δύο συμπαγείς προσανατολίσιμες επιφάνειες είναι ομοιομορφικές εάν και μόνον εάν έχουν το ίδιο γένος.

Απόδειξη: Βαθειά και δύσκολη, παραπέμπουμε στο βιβλίο του Do Carmo ([5]) στην βιβλιογραφία.

Ερχόμαστε τώρα στην περίπτωση των μη-προσανατολίσιμων επιφανειών. Παρατηρούμε το εξής: η δέσμη Möbius έχει σύνορο έναν κύκλο (όπως και ο δίσκος, ίδιο με το τετράγωνο πριν την συστροφή). Παίρνουμε μια σφαίρα S^2 και αφαιρούμε k δίσκους ξένους μεταξύ τους. Επειδή η δέσμη Möbius με τον δίσκο έχουν το ίδιο σύνορο, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τους k δίσκους που αφαιρέσαμε με k δέσμες Möbius. Το αποτέλεσμα λέγεται *σφαίρα με k cross-caps (σταυρωτούς σκούφους)*.

Έχουμε συνεπώς το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2: Κάθε συμπαγής συνεκτική μη-προσανατολίσιμη επιφάνεια είναι ομοιομορφική με μια σφαίρα με k cross-caps, για κάποιο $k \geq 0$, όπου

k θετικός ακέραιος ή μηδέν. Ισοδύναμα, κάθε συμπαγής μη-προσανατολίσιμη επιφάνεια είναι ομοιομορφική με το συνεκτικό άθροισμα k ως προς το πλήθος προβολικών επιπέδων για κάποιο $k \geq 0$, όπου k θετικός ακέραιος ή μηδέν. Συνεπώς η κατηγοριοποίηση των συμπαγών μη-προσανατολίσιμων επιφανειών ως προς ομοιομορφισμό γίνεται με βάση το πλήθος των cross-caps.

Απόδειξη: Προκύπτει από την απόδειξη του Θεωρήματος 1, βλ. το βιβλίο του Do Carmo ([5]).

Με την βοήθεια των επίπεδων μοντέλων μπορούμε να κάνουμε ενιαία κατηγοριοποίηση στις προσανατολίσιμες και στις μη-προσανατολίσιμες κλειστές συνεκτικές επιφάνειες. Παραθέτουμε το παρακάτω θεώρημα που ουσιαστικά αποτελεί την ενοποιημένη έκφραση των θεωρημάτων 1 και 2 παραπάνω:

Θεώρημα 3. Μια κλειστή (δηλαδή συμπαγής) συνεκτική επιφάνεια X,
(α). είτε είναι ομοιομορφική με την σφαίρα S^2,
(β). είτε είναι ομοιομορφική με το συνεκτικό άθροισμα από g ως προς το πλήθος τόρι και άρα θα έχει γένος g, για κάποιο $g \geq 1$, με g πεπερασμένο θετικό ακέραιο αριθμό,
(γ). είτε θα είναι ομοιομορφική με το συνεκτικό άθροισμα από k ως προς το πλήθος (πραγματικά) προβολικά επίπεδα, όπου $k \geq 1$ πεπερασμένος θετικός ακέραιος αριθμός, και άρα θα είναι ομοιομορφική με μία σφαίρα με k cross-caps.
Οι περιπτώσεις (α) και (β) αφορούν τις προσανατολίσιμες κλειστές και συνεκτικές επιφάνειες ενώ η περίπτωση (γ) αφορά τις μη-προσανατολίσιμες κλειστές και συνεκτικές επιφάνειες.

Απόδειξη: Λόγω της εξαιρετικής σημασίας του παραπάνω θεωρήματος, θα δώσουμε τουλάχιστον μια περίληψη της απόδειξης. Για τις λεπτομέρειες παραπέμπουμε στα [10] και [18].

Θα πρέπει να ξεκινήσουμε από κάπου και επειδή ο ορισμός της επιφάνειας που δώσαμε (Ορισμός 13.1.6) είναι αρκετά γενικός, θα παραθέσουμε ένα θεώρημα που είναι πέρα από τον σκοπό του παρόντος μαθήματος και ανήκει στην ύλη της αλγεβρικής τοπολογίας: *κάθε κλειστή επιφάνεια έχει μια τριγωνοποίηση (triangulation)*, δηλαδή είναι ομοιομορφική με έναν χώρο που προκύπτει από την ξένη ένωση πεπερασμένων ως προς το πλήθος τριγώνων στον $\mathbb{R}^2$, των οποίων οι πλευρές ενώνονται κατά ζεύγη. Στην περίπτωση μιας επιφάνειας Riemann, μια τριγωνοποίηση προκύπτει άμεσα μέσω μιας μερόμορφης συνάρτησης. (Υπενθυμίζουμε πως μια μιγαδική συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής f λέγεται *μερόμορφη* σε ένα χωρίο D εάν είναι ολόμορφη στο D εκτός από πιθανώς ένα πλήθος διακριτών σημείων στο D όπου η f μπορεί να έχει πόλους αλλά όχι ουσιαστικές ανωμαλίες).

Θα συνεχίσουμε χρησιμοποιώντας τα επίπεδα μοντέλα που είδαμε παραπάνω. Επιλέγουμε ένα τυχαίο τρίγωνο της επιφάνειας και επιλέγουμε επίσης έναν ομοιομορφισμό αυτού προς ένα τρίγωνο του επιπέδου. Παίρνουμε ένα γειτονικό με το αρχικό τρίγωνο της επιφάνειας και την κοινή τους πλευρά και επιλέγουμε έναν ομοιομορφισμό προς ένα τρίγωνο του επιπέδου επίσης κ.ο.κ. Επειδή η επιφάνεια είναι συνεκτική, τα τρίγωνα του επιπέδου θα σχηματίσουν ένα πολύγωνο, συνεπώς η επιφάνεια X μπορεί να αποκτηθεί από αυτό το πολύγωνο εάν κολλήσουμε τις πλευρές του κατάλληλα κατά ζεύγη. Αυτό που πρέπει να κάνουμε, είναι να συγκεκριμενοποιήσουμε με συστηματικό τρόπο μια στάνταρ διαδικασία που να το επιτυγχάνει, χωρίς να μεταβάλλουμε τον τύπο του ομοιομορφισμού. Αυτό επιτυγχάνεται με έναν αριθμό βημάτων:

Βήμα 1: Γειτονικές πλευρές που εμφανίζονται σε συνδυασμούς της μορφής aa^{-1} ή $a^{-1}a$ μπορούν να εξαλειφθούν.

Βήμα 2: Μπορούμε να υποθέσουμε πως όλες οι κορυφές ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας διότι έστω ότι έχει συντελεστεί το Βήμα 1 και έχουμε δύο γειτονικές κορυφές που ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας, έστω κίτρινη και κόκκινη. Εξαιτίας του Βήματος 1, η άλλη πλευρά που περνά από την κίτρινη κορυφή, θα ζευγαρωθεί με κάποια άλλη πλευρά του πολυγώνου, οπότε κόβουμε το τρίγωνο που σχηματίζεται και το κολλάμε στην άλλη πλευρά. Αυτό που θα προκύψει είναι πολύγωνο με ίδιο πλήθος πλευρών αλλά μια περισσότερη κόκκινη κορυφή και μια λιγότερη κίτρινη. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία (Βήμα 1) ώστε να καταλήξουμε σε μία κλάση ισοδυναμίας κορυφών.

Βήμα 3: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε ζεύγος της μορφής a και a είναι γειτονικά, κόβοντας και κολλώντας. Καταλήγουμε συνεπώς σε μία κλάση ισοδυναμίας κορυφών και όλα τα ζεύγη a a γειτονικά. Τί γίνεται όμως με το ζεύγος a, a^{-1}; Εάν είναι γειτονικά, το Βήμα 1 τα εξαλείφει, διαφορετικά σκεφτόμαστε ως εξής: εάν όλες οι πλευρές στο επάνω μέρος έχουν τα ζευγάρια τους επίσης στο επάνω μέρος, τότε οι κορυφές τους δεν θα είναι ποτέ ισοδύναμες με μια κορυφή στο κάτω μέρος. Όμως το Βήμα 2 μας δίδει μία κλάση ισοδυναμίας, οπότε θα πρέπει να υπάρχει κάπου ένα b στο επάνω μισό που θα ζευγαρωθεί με κάτι στο κάτω μισό. Δεν μπορεί να είναι b διότι το Βήμα 3 τα θέσαμε σε γειτονικές θέσεις, άρα θα πρέπει να είναι b^{-1}.

Βήμα 4: Κάθε άλλος συνδυασμός μπορεί να μετατραπεί σε συνδυασμό της μορφής $cdc^{-1}d^{-1}$ με μια διαδικασία κόψιμο και κόλλημα (που ίσως χρειαστεί να επαναληφθεί περισσότερες από 1 φορές). Οπότε τελικά η επιφάνεια X θα περιγράφεται από μια ακολουθία όρων της μορφής aa ή $bcb^{-1}c^{-1}$, δηλαδή από ένα συνεκτικό άθροισμα από προβολικά επίπεδα και τόρι. Όμως εάν υπάρχει τουλάχιστον ένα προβολικό επίπεδο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα που αναφέρουμε στη Σημείωση 8 παρακάτω που λέει ότι $P\sharp T = P\sharp P\sharp P$ (όπου T τόρους και P το προβολικό επίπεδο) για να απαλλαγούμε από τα τόρι. $\square$

Παραθέτουμε μερικές σημειώσεις για τα παραπάνω δύο βασικά θεωρήματα της τοπολογίας των επιφανειών:

Σημείωση 2: Το προβολικό επίπεδο (επιφάνεια Boy) έχει $k = 1$. Η φιάλη Klein έχει $k = 2$, οπότε η φιάλη Klein είναι ομοιομορφική με το συνεκτικό άθροισμα δύο επιφανειών Boy.

Σημείωση 3: Επειδή η σφαίρα S^2 έχει γένος $g = 0$ αλλά και $k = 0$, προφανώς για τυχαία επιφάνεια X, ισχύει ότι $X\sharp S^2 = X$ (το ίσον εδώ σημαίνει ομοιομορφική). Δηλαδή η σφαίρα είναι το *ουδέτερο στοιχείο* του συνεκτικού αθροίσματος.

Σημείωση 4: Από το Θεώρημα 1 έπεται ότι από το συνεκτικό άθροισμα δύο συμπαγών συνεκτικών προσανατολίσιμων επιφανειών προκύπτει συμπαγής συνεκτική προσανατολίσιμη επιφάνεια με γένος ίσο με το άθροισμα των γενών των δύο επιφανειών. Όμοια, από το Θεώρημα 2 έπεται ότι από το συνεκτικό άθροισμα δύο συμπαγών συνεκτικών μη-προσανατολίσιμων επιφανειών προκύπτει συμπαγής συνεκτική μη-προσανατολίσιμη επιφάνεια με αριθμό cross-caps ίσο με το άθροισμα των αριθμών των cross-caps των δύο επιφανειών. (Για την περίπτωση συνεκτικού αθροίσματος μεταξύ μιας προσανατολίσιμης με μια μη-προσανατολίσιμη επιφάνεια, βλέπε Σημείωση 7 παρακάτω).

Σημείωση 5: Τα Θεωρήματα 1 και 2 παραπάνω είναι πολύ ισχυρά. Σε συμπαγείς πολλαπλότητες μεγαλύτερης διάστασης δεν είναι τόσο απλά τα πράγματα.

Σημείωση 6: Αφαίρεση ενός δίσκου από το προβολικό επίπεδο δίδει επιφάνεια ομοιομορφική με την δέσμη Möbius.

Σημείωση 7: Δεν ισχύει ο νόμος της διαγραφής στο συνεκτικό άθροισμα, δηλαδή *δεν* ισχύει $X\sharp A = Y\sharp A \Rightarrow X = Y$. Αντιπαράδειγμα είναι το παρακάτω: το συνεκτικό άθροισμα ενός τόρους με το προβολικό επίπεδο αποδεικνύεται ότι είναι ομοιομορφικό με το συνεκτικό άθροισμα 3 προβολικών επιπέδων (βλέπε [14]). Αν ίσχυε ο νόμος της διαγραφής θα παίρναμε ότι το τόρους είναι ομοιομορφικό με το συνεκτικό άθροισμα δύο προβολικών επιπέδων, κάτι που φυσικά δεν ισχύει.

Σημείωση 8: Η τοπολογική κατηγοριοποίηση των *μη-συμπαγών* επιφανειών είναι αρκετά πιο πολύπλοκη και δεν θα ασχοληθούμε με αυτό το θέμα σε αυτό το μάθημα. Αναφέρουμε μόνο πως δεν είναι αληθές ότι κάθε επιφάνεια είναι ομοιομορφική με ένα ανοικτό σύνολο κάποιας κλειστής (συμπαγούς) επιφάνειας.

17 Τοπολογικές Υποδιαιρέσεις και Χαρακτηριστική Euler

Ξεκινάμε με μερικές πολύ απλές διαπιστώσεις: Ένα πολύεδρο (πχ κύβος ή πυραμίδα) είναι ένα στερεό αντικείμενο που έχει ως σύνορο επίπεδες *έδρες (faces)*. Κάθε έδρα είναι ένα κλειστό υποσύνολο της επιφάνειας του πολύεδρου και είναι ομοιομορφική με έναν κλειστό δίσκο του επιπέδου. Αν δύο έδρες τέμνονται, τέμνονται κατά μήκος μιας *ακμής (edge)* που είναι ομοιομορφική με το κλειστό μοναδιαίο διάστημα $[0,1]$. Αν δύο ακμές τέμνονται, τέμνονται σε ένα σημείο που λέγεται *κορυφή (vertex)*.

Ορισμός 1. Αν συμβολίσουμε με V, E και F το πλήθος των κορυφών, ακμών και εδρών αντίστοιχα του πολύεδρου, τότε ο ακέραιος αριθμός

$$\chi = V - E + F$$

λέγεται *χαρακτηριστική Euler* του πολύεδρου. Είναι γνωστό ότι για κυρτά πολύεδρα, (δηλαδή πολύεδρα στα οποία η προέκταση κάθε έδρας αφήνει ολόκληρο το υπόλοιπο πολύεδρο στην ίδια πλευρά όπως συμβαίνει για τον κύβο, τις πυραμίδες κλπ), έχουμε ότι $\chi = 2$.

Από την εποχή του Descartes (1639) ήταν γνωστό ότι αν διαιρέσουμε την επιφάνεια μιας σφαίρας σε πολύγωνα (όπως πχ σε μια μπάλα ποδοσφαίρου με λευκά και μαύρα εξάγωνα) και θεωρήσουμε τον αριθμό κορυφών, ακμών (πλευρών) και εδρών V, E και F αντίστοιχα, τότε

$$V - E + F = 2.$$

Η τοπολογία μας δίδει την δυνατότητα να γενικεύσουμε τις παραπάνω περιπτώσεις εισάγοντας την έννοια της (τοπολογικής) υποδιαίρεσης (subdivision):

Ορισμός 2. Έστω X συμπαγής επιφάνεια. Ορίζουμε μια *(τοπολογική) υποδιαίρεση (subdivision)* της X να είναι μια διαμέριση της X σε:
(α). *κορυφές*, οι οποίες είναι ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων της X,
(β). *ακμές*, οι οποίες είναι ένα σύνολο από πεπερασμένα σε πλήθος, ξένα μεταξύ τους υποσύνολα της X που το καθένα είναι ομοιομορφικό με το ανοικτό διάστημα $(0,1)$,
(γ). *έδρες*, οι οποίες είναι ένα σύνολο από πεπερασμένα σε πλήθος, ξένα μεταξύ τους υποσύνολα της X που το καθένα είναι ομοιομορφικό με έναν ανοικτό κυκλικό δίσκο $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$ του $\mathbb{R}^2$,
τέτοιων ώστε:

(i): οι έδρες είναι τα συνεκτικά κομμάτια του συνόλου $X - \{$κορυφές και ακμές$\}$,
(ii): καμία ακμή δεν περιέχει κορυφές και
(iii): κάθε ακμή αρχίζει και τελειώνει σε μια κορυφή (είτε στην ίδια είτε σε διαφορετική κορυφή) ή ακριβέστερα αν e μια ακμή, τότε υπάρχουν κορυφές v_0 και v_1 (όχι υποχρεωτικά διαφορετικές μεταξύ τους) και μια συνεχής απεικόνιση $f : [0,1] \to e \cup \{v_0, v_1\}$, της οποίας ο περιορισμός στο ανοικτό $(0,1)$ είναι ομοιομορφισμός από το $(0,1)$ στο e και επιπλέον ικανοποιεί τις $f(0) = v_0$ και $f(1) = v_1$.

Παραδείγματα Α: Παραθέτουμε κάποια παραδείγματα τοπολογικών υποδιαιρέσεων της σφαίρας:

(1).
1 κορυφή στον βόρειο πόλο
0 ακμές
1 έδρα

(2).
1 κορυφή στον ισημερινό
1 ακμή, τον ισημερινό
2 έδρες, τα 2 ημισφαίρια

(3).
2 κορυφές, Β. και Ν. πόλο
1 ακμή, τον μεσημβρινό Greenwich
1 έδρα

(4).
2 κορυφές στους πόλους
2 ακμές, οι 2 μεσημβρινοί
2 έδρες

Παρατηρούμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις $V - E + F = 2$.

Ορισμός 3. Η *χαρακτηριστική Euler (ή αριθμός Euler)* μιας συμπαγούς επιφάνειας X εφοδιασμένης με μια *(τοπολογική) υποδιαίρεση*, συμβολίζεται $\chi(X)$, και ορίζεται ως ο ακέραιος αριθμός

$$\chi(X) = V - E + F,$$

όπου V ο αριθμός των κορυφών, E ο αριθμός των ακμών και F ο αριθμός των εδρών της δεδομένης υποδιαίρεσης.

Σχόλιο 1: Υπάρχουν και άλλοι ισοδύναμοι ορισμοί της χαρακτηριστικής Euler πιο προχωρημένοι, άλλοι δύο όμως εξ αυτών είναι αυτοί που χρησιμοποιούνται συχνότερα: ο ένας προέρχεται από την αλγεβρική τοπολογία με χρήση θεωρίας (συν)ομολογίας και θεωρίας συμπλόκων. Απαιτούνται αρκετά στοιχεία αλγεβρικής τοπολογίας για την ανάπτυξη αυτού του ορισμού που ακόμη και η απλή αναφορά τους θα μας βγάλει αρκετά έξω από τον σκοπό αυτού του μαθήματος. Ορισμένα στοιχεία από αυτή την προσέγγιση εμφανίζονται στην απόδειξη του Θεωρήματος 2 αμέσως παρακάτω. Ο άλλος ορισμός προέρχεται από την λεγόμενη ολική ανάλυση, και πιο συγκεκριμένα από την θεωρία Morse. Έστω X συμπαγής και συνεκτική λεία επιφάνεια και έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μια τυχαία λεία συνάρτηση με πεπερασμένο πλήθος απομονωμένων μη-εκφυλισμένων κριτικών σημείων (η ορολογία θα εξηγηθεί σε παρακάτω κεφάλαιο που θα δούμε το Θεώρημα Gauss-Bonnet). Συμβολίζουμε με M, m και s το πλήθος των τοπικών μεγίστων, των τοπικών ελαχίστων και σαγματικών σημείων της f αντίστοιχα. Τότε ισχύει ότι

$$\chi(X) = M - s + m.$$

Σημειώνουμε πως η χαρακτηριστική Euler αποτελεί μία από τις πιο βασικές έννοιες της (Αλγεβρικής) Τοπολογίας. Ορίζεται όχι μόνο για πολλαπλότητες οποιασδήποτε πεπερασμένης διάστασης (μεγαλύτερης απο 2), αλλά και για ακόμη γενικότερους χώρους που μελετά η αλγεβρική τοπολογία (λόγου χάριν για CW-σύμπλοκα). Όλοι οι ορισμοί της χαρακτηριστικής Euler είναι εξαιρετικά χρήσιμοι.

Θεώρημα 1. *Η χαρακτηριστική Euler μιας συμπαγούς επιφάνειας είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της τοπολογικής υποδιαίρεσης.*

Απόδειξη: Παραπέμπουμε στο [14] ή στο βιβλίο του Do Carmo ([5]). □

Ισχύει επίσης το εξής πολύ σημαντικό θεώρημα:

Θεώρημα 2. *Η χαρακτηριστική Euler $\chi(X)$ μιας συμπαγούς επιφάνειας X είναι τοπολογικά αναλλοίωτη ποσότητα (δηλαδή είναι αναλλοίωτη κάτω από ομοιομορφισμούς).*

Απόδειξη: Θα δώσουμε μια περίληψη της απόδειξης. Για τις λεπτομέρειες, παραπέμπουμε στα [14] και [5].

Η ιδέα της απόδειξης είναι να δώσουμε έναν διαφορετικό ορισμό της χαρακτηριστικής Euler από τον οποίο να προκύπτει με προφανή τρόπο πως είναι τοπολογικά αναλλοίωτη ποσότητα και στην συνέχεια θα αποδείξουμε πως η χαρακτηριστική Euler οποιασδήποτε τοπολογικής υποδιαίρεσης της επιφάνειας X είναι ίση με την ποσότητα $\chi(X)$ που ορίσαμε με αυτόν τον τρόπο.

Για κάθε συνεχή τροχιά $f : [0,1] \to X$, ορίζουμε το *σύνορό της* ∂f να είναι ο τυπικός γραμμικός συνδυασμός των σημείων $f(0) + f(1)$. Εάν g είναι μια άλλη απεικόνιση (τροχιά) με $g(0) = f(1)$, τότε με συντελεστές από το σώμα $\mathbb{Z}/2$, θα έχουμε

$$\partial f + \partial g = f(0) + 2f(1) + g(1) = f(0) + g(1)$$

που αποτελεί το σύνορο της τροχιάς που προκύπτει από την συνένωση των δύο τροχιών. Έστω C_0 ο διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης επί του σώματος $\mathbb{Z}/2$, των γραμμικών συνδυασμών σημείων με συντελεστές από το σώμα $\mathbb{Z}/2$, με πεπερασμένο πλήθος όρων, και έστω C_1 ο διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης επί του ιδίου σώματος $\mathbb{Z}/2$, των γραμμικών συνδυασμών τροχιών (με πεπερασμένο πλήθος όρων και συντελεστές από το σώμα $\mathbb{Z}/2$). Τότε η *απεικόνιση σύνορο* $\partial : C_1 \to C_0$ αποτελεί γραμμική απεικόνιση. Εάν η X είναι συνεκτική, τότε κάθε ζεύγος σημείων της μπορούν να ενωθούν μέσω μιας τροχιάς, έτσι ώστε το $x \in C_0$ να είναι η εικόνα της ∂ εάν και μόνο εάν έχει άρτιο πλήθος όρων.

Στη συνέχεια εστιάζουμε την προσοχή μας στις συνεχείς απεικονίσεις της μορφής $F : \Delta \to X$, με πεδίο ορισμού ένα τρίγωνο $ABC = \Delta$ και πεδίο τιμών την επιφάνεια X, και έστω C_2 ο διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης επί του ιδίου σώματος $\mathbb{Z}/2$, των γραμμικών συνδυασμών αυτών των συνεχών απεικονίσεων (με πεπερασμένο πλήθος όρων και συντελεστές από το σώμα $\mathbb{Z}/2$). Το σύνορο της $F : \Delta \to X$, αποτελείται από το άθροισμα των τριών τροχιών που αποτελούν τους περιορισμούς της F στις πλευρές του τριγώνου Δ. Τότε

$$\partial\partial F = (F(A) + F(B)) + (F(B) + F(C)) + (F(C) + F(A)) = 0,$$

έτσι ώστε *η εικόνα της $\partial : C_2 \to C_1$ να περιέχεται στον πυρήνα της $\partial : C_1 \to C_0$. Ορίζουμε το $H_1(X)$ να είναι ο χώρος πηλίκο.* Φανερά, αυτό αποτελεί τοπολογικά αναλλοίωτη ποσότητα (αμετάβλητη κάτω από ομοιομορφισμούς) διότι χρησιμοποιήσαμε μονο την έννοια της συνεχούς συνάρτησης για να την ορίσουμε.

Εάν θεωρήσουμε μια (τοπολογική) υποδιαίρεση στην επιφάνεια X, αποδεικνύεται πως επειδή κάθε έδρα είναι ομοιομορφική με δίσκο, κάθε στοιχείο στον πυρήνα της $\partial : C_1 \to C_0$ μπορεί να αντικατασταθεί προσθέτοντας κάποια ποσότητα που να ανήκει στην εικόνα ∂C_2, ποσότητα που με την σειρά της επίσης μπορεί να αντικατασταθεί με έναν γραμμικό συνδυασμό πλευρών της τοπολογικής υποδιαίρεσης.

Τώρα έστω $\mathcal{V}$, $\mathcal{E}$, και $\mathcal{F}$ διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης επί του σώματος $\mathbb{Z}/2$ με βάσεις που δίδονται από τα σύνολα των κορυφών, πλευρών και εδρών αντίστοιχα, της τοπολογικής υποδιαίρεσης της X. Ορίζουμε συνοριακές απεικονίσεις με τρόπο ανάλογο με τον παραπάνω:

$$\partial : \mathcal{E} \to \mathcal{V}$$

και

$$\partial : \mathcal{F} \to \mathcal{E}.$$

Τότε

$$H_1(X) := \frac{Ker(\partial : \mathcal{E} \to \mathcal{V})}{Im(\partial : \mathcal{F} \to \mathcal{E})}.$$

Υπενθυμίζουμε την σχέση τάξης και μηδενικότητας μιας γραμμικής απεικόνισης $f : V \to V$ που λέει ότι

$$\dim V = \dim Ker(f) + \dim Im(f) = \dim Ker(f) + rk(f).$$

Εφαρμόζουμε την σχέση στην περίπτωσή μας και παίρνουμε:

$$\dim H_1(X) = \dim \mathcal{E} - rk(\partial : \mathcal{E} \to \mathcal{V}) - \dim \mathcal{F} + \dim Ker(\partial : \mathcal{F} \to \mathcal{E}).$$

Επειδή η X είναι συνεκτική, η εικόνα της $\partial : \mathcal{E} \to \mathcal{V}$ θα αποτελείται από αθροίσματα με άρτιο πλήθος κορυφών, οπότε

$$\dim \mathcal{V} = 1 + rk(\partial : \mathcal{E} \to \mathcal{V}).$$

Επίσης, ο διανυσματικός χώρος $Ker(\partial : \mathcal{F} \to \mathcal{E})$ παράγεται από το άθροισμα των εδρών, συνεπώς

$$\dim Ker(\partial : \mathcal{F} \to \mathcal{E}) = 1,$$

οπότε

$$\dim H_1(X) = 2 - V + E - F$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η χαρακτηριστική Euler που την είχαμε ορίσει ως $\chi(X) = V - E + F$ αποτελεί τοπολογικά αναλλοίωτη ποσότητα. $\square$

Σχόλιο 2: Ένα επίπεδο μοντέλο μιας συμπαγούς επιφάνειας δίδει αυτομάτως μια υποδιαίρεση με 1 έδρα, άρα $F = 1$ (το εσωτερικό του πολυγώνου) και αν το πολύγωνο έχει $2n$ πλευρές, αυτές ταυτίζονται ανά ζεύγη οπότε έχουμε n ακμές, άρα $E = n$. Για το τόρους έχουμε μια κλάση ισοδυναμίας κορυφών οπότε $V = 1$. Είδαμε ότι μια προσανατολίσιμη συμπαγής επιφάνεια με γένος g αναπαρίσταται μέσω επίπεδου μοντέλου με ένα πολύγωνο με $4g$ πλευρές. Συνεπώς από τα παραπάνω προκύπτει ότι η χαρακτηριστική Euler μιας συμπαγούς προσανατολίσιμης επιφάνειας A με γένος g είναι

$$\chi(A) = 2 - 2g$$

Για μια συμπαγή μη-προσανατολίσιμη επιφάνεια B με k cross-caps ισχύει ότι

$$\chi(B) = 2 - k.$$

Θεώρημα 3. *Μια κλειστή επιφάνεια καθορίζεται μονοσήμαντα (μέχρις ενός ομοιομορφισμού) από το εάν είναι προσανατολίσιμη ή όχι και από την χαρακτηριστική Euler.*

Απόδειξη: Παραπέμπουμε στο βιβλίο του Do Carmo ([5]).

Σχόλιο 3: Σε συμπαγείς πολλαπλότητες μεγαλύτερης διάστασης δεν ισχύει κάτι ανάλογο, η κατηγοριοποίηση είναι πιο πολύπλοκη.

Σχόλιο 4: Διαισθητικά είναι ευκολότερο να ορίσει κάποιος για μια συμπαγή επιφάνεια πρώτα το γένος (genus) (ή τον αριθμό των cross-caps) και μετά την χαρακτηριστική Euler. Αυστηρά όμως ο ορισμός της χαρακτηριστικής Euler προηγείται και κατόπιν ορίζουμε το genus (αριθμός τρυπών) ή το πλήθος των cross-caps μέσω του Σχόλιου 2 παραπάνω.

Σχόλιο 5: Η χαρακτηριστική Euler είναι *ολική (global)* ιδιότητα και παίζει τον κύριο ρόλο στην θεωρία επιφανειών. *Το εκπληκτικό θεώρημα Gauss-Bonnet* που θα δούμε αργότερα μας δίδει έναν τρόπο να την υπολογίζουμε μέσω ενός ολοκληρώματος (τοπική φόρμουλα) χωρίς να ασχοληθούμε καθόλου με τοπολογικές υποδιαιρέσεις!

Παραδείγματα Β: Η σφαίρα έχει $\chi = 2$ (όπως και ο κύβος με τον οποίο αρχίσαμε την κουβέντα μας), το τόρους έχει $\chi = 0$. Το προβολικό επίπεδο (επιφάνεια Boy) έχει $\chi = 1$ και η φιάλη Klein έχει $\chi = 0$ αλλά *δεν* είναι ομοιομορφική με τόρους διότι η κατηγοριοποίηση εξαρτάται από την χαρακτηριστική Euler *και* την προσανατολισιμότητα.

Πρόταση 1. *Εκτομή (Excision).*
Για να υπολογίσουμε την χαρακτηριστική Euler διαφόρων επιφανειών είναι πολύ

χρήσιμη η ιδιότητα της *εκτομής*. Έστω ότι μια επιφάνεια X αποτελείται από την ένωση δύο χώρων A και B τέτοιων ώστε η τομή $A \cap B$ έχει μια υποδιαίρεση που είναι υποσύνολο των υποδιαιρέσεων των A και B (οπότε τα A και B προκύπτουν από την *εκτομή* της X). Αφού τα V, E και F που εμφανίζονται στον ορισμό της χαρακτηριστικής Euler αφορούν απλά *πληθάριθμους* κάποιων συνόλων, προκύπτει άμεσα ότι

$$\chi(X) = \chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$$

Με βάση την παραπάνω ιδιότητα μπορούμε να υπολογίσουμε και την χαρακτηριστική Euler του συνεκτικού αθροίσματος:

Πρόταση 2. Ισχύει ότι

$$\chi(A \sharp B) = \chi(A) + \chi(B) - 2$$

Απόδειξη: Παίρνουμε μια συμπαγή επιφάνεια X και αφαιρούμε έναν δίσκο D και παίρνουμε έναν χώρο X_0. Ο δίσκος έχει χαρακτηριστική Euler 1 (ένα πολύγωνο έχει 1 έδρα, n κορυφές και n πλευρές ή ακμές) ενώ ο κύκλος σύνορο έχει χαρακτηριστική Euler 0 (καμιά έδρα, κορυφή ή ακμή). Εφαρμόζουμε την φόρμουλα της εκτομής:

$$\chi(X) = \chi(X_0 \cup D) = \chi(X_0) + \chi(D) - \chi(X_0 \cap D) = \chi(X_0) + 1$$

Για να πάρουμε το συνεκτικό άθροισμα $X \sharp Y$, κολλάμε το X_0 στο Y_0 κατά μήκος του συνοριακού κύκλου οπότε

$$\chi(X \sharp Y) = \chi(X_0) + \chi(Y_0) - \chi(X_0 \cap Y_0) = \chi(X) - 1 + \chi(Y) - 1 - 0 = \chi(X) + \chi(Y) - 2,$$

άρα προκύπτει το ζητούμενο. □

Σχόλιο 6: Ξεκινώντας από εδώ αποδεικνύουμε την διαισθητική φόρμουλα ότι το γένος του συνεκτικού αθροίσματος ισούται με το άθροισμα των γενών. Η παραπάνω φόρμουλα συμφωνεί και με το ότι $\chi(A \sharp B) = 2 - 2g(A \sharp B)$.

Σχόλιο 7: Από την σχέση $\chi = 2 - 2g$ προκύπτει ότι για να είναι το g φυσικός αριθμός θα πρέπει το χ να είναι πάντα άρτιος (κατ' απόλυτο τιμή), κάτι που φυσικά συμβαίνει αλλά από τον ορισμό $\chi = V - E + F$ δεν θα μπορούσε ποτέ κανείς να το υποψιαστεί! Αυτή η παρατήρηση είναι χρήσιμη για κίνητρο στο *θεώρημα δείκτου Atiyah-Singer* που γενικεύει το θεώρημα Gauss-Bonnet που θα δούμε παρακάτω και που αποτελεί το σημαντικότερο θεώρημα στην θεωρία επιφανειών.

18 Η Μιγαδική Καμπύλη $x^n + y^n = 1$

18.1 Γενικά

Σε αυτή την παράγραφο, που είναι προαιρετική, θα ασχοληθούμε με την μιγαδική αλγεβρική καμπύλη που δίδεται από την εξίσωση $x^n + y^n = 1$. Η εν λόγω καμπύλη έχει μεγάλη σημασία στα σύγχρονα μαθηματικά, για παράδειγμα παίζει σημαντικό ρόλο στην απόδειξη του περίφημου *τελευταίου Θεωρήματος του Fermat* από τον Βρετανό A. Wiles (1996) με την συμβολή του επίσης Βρετανού R. Taylor, οι οποίοι στηρίχθηκαν σε προγενέστερη δουλειά του Γερμανού G. Faltings (1983) και του Γάλλου J.-P. Serre στην δεκαετία του 1960.

Το τελευταίο Θεώρημα του Fermat αποτελεί μια προσπάθεια για μια επέκταση του γνωστού Πυθαγορείου Θεωρήματος και λέει ότι *εάν n είναι κάποιος φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 2, δηλαδή $n > 2$, με $n \in \mathbb{N}$, τότε δεν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί $x, y, z \in \mathbb{Z}$, που να ικανοποιούν την εξίσωση $x^n + y^n = z^n$.*

Το παραπάνω είναι ισοδύναμο με το εξής: *η αλγεβρική καμπύλη $x^n + y^n = 1$ δεν περιέχει σημεία (x, y) των οποίων και οι δύο συντεταγμένες να είναι ρητοί αριθμοί.*

Το 1983 ο Γερμανός G. Faltings απέδειξε ότι *εάν η $f(x, y)$ είναι ένα πολυώνυμο με ρητούς συντελεστές, τότε η αλγεβρική καμπύλη $f(x, y) = 0$ έχει το πολύ πεπερασμένο πλήθος σημείων με ρητές συντεταγμένες, εάν και μόνο εάν η αντίστοιχη μιγαδική αλγεβρική καμπύλη $f(x, y) = 0$ ορίζει μια επιφάνεια της οποίας η χαρακτηριστική Euler είναι αρνητική.*

Θα δούμε ότι όταν $f(x, y) = x^n + y^n - 1$, τότε παίρνουμε μια επιφάνεια με χαρακτηριστική Euler $\chi = n(3 - n)$. Συνεπώς το Θεώρημα Faltings λέει ότι όταν $n > 3$, τότε υπάρχουν *το πολύ πεπερασμένα σε πλήθος* αντιπαραδείγματα στο τελευταίο Θεώρημα του Fermat. Τελικά μερικά χρόνια αργότερα το αποτέλεσμα αυτό βελτιώθηκε: αποδείχθηκε από τον Andrew Wiles (με την συμβολή του Richard Taylor) πως δεν υπάρχει *κανένα* αντιπαράδειγμα στο τελευταίο Θεώρημα του Fermat.

18.2 Ορισμός Τοπολογίας μέσω ενός Άτλαντα

Ακόμη και οι πιο απλές μιγαδικές συναρτήσεις οδηγούν σε ανέλπιστα πολύπλοκες επιφάνειες. Θα μελετήσουμε την επιφάνεια X του μιγαδικού επιπέδου $X \subset \mathbb{C}^2$, που παράγεται από την εξίσωση $x^n + y^n = 1$, όπου $n \in \mathbb{N}^*$

(n θετικός ακέραιος). Θα αποδείξουμε ότι αυτή η επιφάνεια, μαζί με τα επ' άπειρον σημεία της, είναι ομοιομορφική με μια συμπαγή επιφάνεια με γένος $g(X) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, δηλαδή είναι ομοιομορφική με ένα τόρους με $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ τρύπες. Αρχικά θα ορίσουμε έναν άτλαντα για αυτή την επιφάνεια. Χρησιμοποιούμε $2n$ χάρτες για να καλύψουμε την X και άλλους n επιπλέον χάρτες για να συμπεριλάβουμε τα επ' άπειρον σημεία της.

Για κάθε $x \in \mathbb{C}$ (εκτός από τις n ρίζες της μονάδας $e^{2\pi ik/n}$), υπάρχουν n σημεία (x, y) στην X, διότι το y μπορεί να είναι οποιαδήποτε από τις τιμές της $\sqrt[n]{1-x^n}$. Για να ορίσουμε την $\sqrt[n]{1-x^n}$ ως συνεχή συνάρτηση, πρέπει να κόψουμε το x-επίπεδο: έστω V το επίπεδο Argand που έχει κοπεί ακτινικά προς τα έξω από κάθε n-ιοστή ρίζα της μονάδας προς το ∞, δηλαδή $V = \mathbb{C} - \{x | x^n \in \mathbb{R}$ και $x^n \geq 1\}$. Εάν $x \in V$, τότε το $1 - x^n$ δεν βρίσκεται στον αρνητικό πραγματικό άξονα, οπότε μπορούμε να ορίσουμε μια ολόμορφη συνάρτηση $f_0 : V \to \mathbb{C}$, μέσω των συνθηκών

$$f_0(x)^n = 1 - x^n$$

και

$$-\pi/n < arg(f_0(x)) < \pi/n.$$

Μπορούμε να ορίσουμε και τους άλλους κλάδους της $\sqrt[n]{1-x^n}$, δηλαδή $f_k : V \to \mathbb{C}$, όπου $f_k(x) = e^{2\pi ik/n} f_0(x)$, για $0 \leq k < n$.

Έστω U_k το γράφημα της συνάρτησης f_k, δηλαδή το σύνολο U_k ορίζεται ως εξής: $U_k = \{(x, f_k(x)) \in \mathbb{C}^2 | x \in V\}$. Αυτό είναι ένα υποσύνολο της X και υπάρχει και ένας ομοιομορφισμός $\phi_k : U_k \to V$, που ορίζεται μέσω της $\phi_k(x, f_k(x)) = x$. Κάθε σημείο (x, y) της X τέτοιο ώστε το $x \in V$, ανήκει και σε ένα από τα σύνολα U_k, συνεπώς έχουμε n χάρτες που καλύπτουν το μεγαλύτερο μέρος της X. Πρέπει να ορίσουμε άλλους n χάρτες που να καλύπτουν τις τομές (τα κοψίματα). Αυτό γίνεται εύκολα διότι εάν $x^n + y^n = 1$, τότε τα x^n και y^n δεν μπορούν να είναι και τα δύο πραγματικά και μεγαλύτερα της μονάδος, δηλαδή τουλάχιστον ένα εκ των x, y θα πρέπει να ανήκει στο V. Έτσι ορίζουμε

$$U'_k = \{(f_k(y), y) \in \mathbb{C}^2 | y \in V\}$$

καθώς και ομοιομορφισμούς $\phi'_k : U'_k \to V$, που ορίζονται μέσω των $\phi'_k(f_k(y), y) = y$. Τώρα έχουμε έναν άτλαντα για την X.

Στο τέλος πρέπει να προσθέσουμε τα επ' άπειρον σημεία: Εάν $(x, y) \in X$, και το $|x|$ είναι μεγάλο, τότε το y βρίσκεται πολύ κοντά στο $w_k x$, για κάποιο k, όπου w_1, w_2,...,w_n είναι οι n-ιοστές ρίζες του -1 διότι

$$y = (1-x^n)^{1/n} = (-1)^{1/n} x (1 - 1/x^n)^{1/n} = (-1)^{1/n} x (1 - 1/nx^n + ...).$$

Έτσι η X έχει n ασύμπτωτες, που δίδονται από τις εξισώσεις $y = w_k x$, οπότε είναι λογικό να προσθέσουμε n επ' άπειρον σημεία P_1, P_2,...,P_n, ένα στο τέλος κάθε ασύμπτωτης. Έστω $\hat{X} := X \cup \{P_1, P_2, ..., P_n\}$ και έστω $U_k'' = P_k \cup \{(x, xf_k(x^{-1})) | x^{-1} \in V\}$. (Σημειώστε ότι το $(x, xf_k(x^{-1})) \in X$). Έχουμε έναν ομοιομορφισμό

$$\phi_k'' : U_k'' - \{P_k\} \to V - \{0\}$$

που απεικονίζει $(x, xf_k(x^{-1})) \mapsto x^{-1}$. Ορίζουμε μια αμφεικόνιση $\phi_k'' : U_k'' \to V$ θέτοντας $\phi_k''(P_k) = 0$. Αυτή μας δίδει έναν άτλαντα για το σύνολο $\hat{X}$, και είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι οι δύο συνθήκες της παραγράφου 15.3 ικανοποιούνται, συνεπώς το $\hat{X}$, αποκτά μια τοπολογία που το καθιστά επιφάνεια. Επίσης είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι η επαγόμενη τοπολογία στο υποσύνολο X από τον άτλαντα είναι η ίδια με την τοπολογία που κληρονομεί το X ως υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}^2$.

18.3 Ο Υπολογισμός της Χαρακτηριστικής Euler

Θα αποδείξουμε ότι η χαρακτηριστική Euler της επιφάνειας $\hat{X}$ που ορίζεται μέσω της μιγαδικής εξίσωσης $x^n + y^n = 1$ μαζί με τα επ' άπειρον σημεία της P_k, είναι $\chi(\hat{X}) = n(3-n)$. Αποδεικνύεται εύκολα πως η $\hat{X}$ είναι προσανατολίσιμη, συνεπώς από το Θεώρημα 16.1.1 (ή από το ισοδύναμο 16.1.3) η $\hat{X}$ θα είναι ομοιομορφική με τόρους με $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ τρύπες.

Η (μιγαδική) καμπύλη $\hat{X} = X \cup \{P_1, P_2, ..., P_k\}$ απεικονίζεται συνεχώς στην σφαίρα Riemann μέσω της απεικόνισης $(x, y) \mapsto x$ και $P_k \mapsto \infty$. Η αντίστροφη εικόνα κάθε σημείου της σφαίρας Riemann, εκτός των n σημείων διακλάδωσης $B_k = e^{2\pi ik/n}$, συνίσταται από ακριβώς n σημεία της $\hat{X}$.

Τώρα θεωρούμε την εξής τοπολογική υποδιαίρεση της σφαίρας Riemann: ως κορυφές παίρνουμε τα σημεία διακλάδωσης B_k, τα οποία τα ενώνουμε κυκλικά για να σχηματισθεί ένα πολύγωνο. Για την δεδομένη υποδιαίρεση έχουμε $V = n$, $E = n$ και $F = 2$ (σημειώστε ότι $n - n + 2 = 2$). Οι αντίστροφες εικόνες στην $\hat{X}$ των κορυφών και πλευρών (ακμών) του πολύγωνου στην σφαίρα Riemann δίδουν μια τοπολογική υποδιαίρεση για την $\hat{X}$, που έχει $V = n$ (διότι υπάρχει μοναδικό σημείο B_k), $E = n^2$ και $F = 2n$. Συνεπώς η χαρακτηριστική Euler θα είναι $\chi(\hat{X}) = n - n^2 + 2n = n(3-n)$.

Θα κλείσουμε το κεφάλαιο με μια διασκεδαστική εφαρμογή από την Θεωρία Γράφων (Graph Theory):

Πρόταση 1. Δοθέντων 5 τυχαίων σημείων στο επίπεδο, είναι αδύνατον να ενώσουμε κάθε ζεύγος σημείων με τροχιές που δεν τέμνονται.

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να αντικαταστήσουμε το επίπεδο με μια σφαίρα. Εάν μπορούσαμε να ενώσουμε τα σημεία, θα είχαμε μια τοπολογική υποδιαίρεση της σφαίρας με $V = 5$ και $E = 10$. Κάθε έδρα θα είχε ως σύνορο τουλάχιστον 3 ακμές (πλευρές) ενώ κάθε ακμή θα άνηκε σε ακριβώς 2 έδρες. Συνεπώς $2E \geq 3F$ οπότε $F \leq 6$ και άρα $V - E + F \leq 1$, κάτι που είναι *άτοπο*, διότι η σφαίρα έχει χαρακτηριστική Euler $\chi = V - E + F = 2$. $\square$

19 Επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$

19.1 Ορισμοί και Παραδείγματα

Ορισμός 1. Μια *λεία επιφάνεια* A *του* $\mathbb{R}^3$ είναι ένα υποσύνολο $A \subset \mathbb{R}^3$, (όπου ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$ θεωρείται εφοδιασμένος με ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $Oxyz$), τέτοιο ώστε κάθε σημείο $x \in A$ έχει μια γειτονιά $U(x) \subset A$ και μια απεικόνιση $\vec{r}(u,v) : V \to \mathbb{R}^3$, όπου $V \subseteq \mathbb{R}^2$ κάποιο ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, (όπου τα $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ θεωρούνται εφοδιασμένα με την συνήθη τοπολογία), τέτοια ώστε:
(α). η απεικόνιση $\vec{r} : V \to U$ είναι ομοιομορφισμός,
(β). η απεικόνιση $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ έχει παραγώγους οποιασδήποτε τάξης και
(γ). σε κάθε σημείο τα διανύσματα

$$\vec{r}_u := \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$$

και

$$\vec{r}_v := \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παρατήρηση 1. Η απαίτηση **(α)** του Ορισμού 1 υποδηλώνει ότι η A είναι επιφάνεια και τοπολογικά διότι κάθε σημείο της A έχει μια γειτονιά U που είναι ομοιομορφική με κάποιο ανοικτό υποσύνολο V του $\mathbb{R}^2$.

Παρατήρηση 2. Με την βοήθεια του Θεωρήματος Υπονοούμενης Συνάρτησης, οι απαιτήσεις **(β)** και **(γ)** του Ορισμού 1 υποδηλώνουν ότι μια τοπική αντιστρέψιμη αλλαγή συντεταγμένων στον $\mathbb{R}^3$, μπορεί να "*ισιώσει*" την επιφάνεια, δηλαδή τοπικά μπορεί να ορισθεί μέσω της εξίσωσης $x_3 = 0$, όπου (x_1, x_2, x_3) κάποιο πιθανώς μη-γραμμικό σύστημα συντεταγμένων του $\mathbb{R}^3$.

Παρατήρηση 3. Η απεικόνιση $\vec{r} : V \to \mathbb{R}^3$ παραπάνω λέγεται *(επιτρεπτή) παραμετρική παράσταση* της επιφάνειας ή *εμφύτευση* της επιφάνειας A στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ και οι μεταβλητές u και v λέγονται *παράμετροι* της παραμετρικής παράστασης ή *συντεταγμένες* της επιφάνειας A.

Παρατήρηση 4. Μια ισοδύναμη έκφραση της απαίτησης **(γ)** του Ορισμού 1 είναι ότι ο Ιακωβιανός πίνακας

$$J = \begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v \end{pmatrix}$$

έχει τάξη 2, δηλαδή $rk(J) = 2$.

Παρατήρηση 5. Εάν για κάποιο σημείο (u, v) μιας επιφάνειας A του $\mathbb{R}^3$ τα διανύσματα $\vec{r}_u$ και $\vec{r}_v$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε το σημείο αυτό λέγεται *ιδιάζον* σημείο. Αλλιώς λέγεται *κανονικό*.

Παρατήρηση 6. Ο υποψιασμένος αναγνώστης θα έχει καταλάβει την άμεση σχέση μεταξύ χάρτη (Ορισμός 15.1.1) και παραμετρικής παράστασης (Παρατήρηση 19.1.3 παραπάνω) μιας επιφάνειας του $\mathbb{R}^3$. Στην πραγματικότητα αποδεικνύεται εύκολα πως εάν $\phi : U \to V$ είναι ένας (επιτρεπτός) χάρτης μιας λείας επιφάνειας A εμφυτευμένης στον $\mathbb{R}^3$, τότε η αντίστροφη συνάρτηση $\phi^{-1} = r$ αποτελεί μια (επιτρεπτή) παραμετρική παράσταση εάν και μόνον εάν η παράγωγος Dr έχει (ως γραμμική απεικόνιση και άρα ως 2×2 πραγματικός πίνακας) τάξη 2.

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε ορισμένα παραδείγματα λείων επιφάνειων εμφυτευμένων στον $\mathbb{R}^3$ (το οποίο θεωρούμε ότι είναι εφοδιασμένο με ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $Oxyz$ με μοναδιαία ορθοκανονικά διανύσματα $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$).

Παραδείγματα.

Τα παρακάτω αποτελούν παραδείγματα *συμπαγών* επιφανειών:

1. Η γνωστή μας *σφαίρα* S^2 ακτίνας a έχει παραμετρική παράσταση

$$\vec{r}(u, v) = a \sin u \sin v \hat{\imath} + a \cos u \sin v \hat{\jmath} + a \cos v \hat{k}.$$

Όταν είναι σαφές ποια βάση του $\mathbb{R}^3$ χρησιμοποιούμε, η παραπάνω έκφραση θα γράφεται και ως εξής:

$$\vec{r}(u, v) = (a \sin u \sin v, a \cos u \sin v, a \cos v).$$

2. Το *τόρους* T^2 έχει παραμετρική παράσταση

$$\vec{r}(u, v) = (a + b \cos u)(\cos v \hat{\imath} + \sin v \hat{\jmath}) + b \sin u \hat{k},$$

όπου a και b οι δύο ακτίνες.

3. Οι *επιφάνειες εκ περιστροφής* γενικά έχουν παραμετρική παράσταση της μορφής
$$\vec{r}(u,v) = f(u)(\cos v\hat{\imath} + \sin v\hat{\jmath}) + u\hat{k}.$$

Τα παρακάτω αποτελούν παραδείγματα *μη-συμπαγών* επιφανειών:

4. Το *επίπεδο* έχει παραμετρική παράσταση
$$\vec{r}(u,v) = \vec{a} + u\vec{b} + v\vec{c},$$
όπου $\vec{b}$ και $\vec{c}$ κάποια τυχαία γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$.

5. Ο *κύλινδρος* έχει παραμετρική παράσταση
$$\vec{r}(u,v) = a(\cos v\hat{\imath} + \sin v\hat{\jmath}) + u\hat{k},$$
όπου a η ακτίνα της βάσης του.

6. Ο *κώνος* έχει παραμετρική παράσταση
$$\vec{r}(u,v) = au\cos v\hat{\imath} + au\sin v\hat{\jmath} + u\hat{k},$$
όπου a η ακτίνα της βάσης του.

7. Το *ελικοειδές* έχει παραμετρική παράσταση
$$\vec{r}(u,v) = au\cos v\hat{\imath} + au\sin v\hat{\jmath} + v\hat{k},$$
όπου a η ακτίνα της βάσης του.

8. Οι *αναπτυκτές επιφάνειες* γενικά έχουν παραμετρική παράσταση της μορφής
$$\vec{r}(u,v) = \vec{\gamma}(u) + v\dot{\vec{\gamma}}(u),$$
όπου $\vec{\gamma}(u)$ μια φυσική παραμετρική παράσταση της καμπύλης γ που παράγει την αναπτυκτή επιφάνεια (το u είναι η φυσική παράμετρος της καμπύλης γ).

Ορισμός 2. Το *εφαπτόμενο επίπεδο* T_aA μιας λείας επιφάνειας A του $\mathbb{R}^3$ στο σημείο $a \in A$ είναι ο διανυσματικός χώρος που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{r}_u(a)$ και $\vec{r}_v(a)$. (Από τον Ορισμό 1 αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα οπότε το εφαπτόμενο επίπεδο αποτελεί γεωμετρικά ένα επίπεδο).

Παρατήρηση 7. Το εφαπτόμενο επίπεδο είναι ανεξάρτητο από την παραμετρική παράσταση της επιφάνειας.

Παρατήρηση 8. Υπενθυμίζουμε ότι εάν $\vec{\gamma} : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ είναι μια λεία καμπύλη του χώρου, τότε το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο σημείο $\vec{\gamma}(t)$ είναι το διάνυσμα $\vec{\gamma'}(t) = \frac{d\vec{\gamma}}{dt}$. Αποδεικνύεται εύκολα το παρακάτω: εάν A λεία επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$, τότε το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο σημείο $a \in A$ αποτελείται από το σύνολο όλων των εφαπτόμενων διανυσμάτων όλων των λείων καμπυλών της επιφάνειας A που περνούν από το εν λόγω σημείο a.

Ορισμός 3. Τα διανύσματα

$$\pm\frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$$

είναι τα *δύο μοναδιαία κάθετα διανύσματα* (με φορά προς τα *"μέσα"* και προς τα *"έξω"* αντίστοιχα) της επιφάνειας A στο σημείο (u,v) με παραμετρική παράσταση $\vec{r}(u,v)$.

Ορισμός 4. Μια *αλλαγή παραμέτρησης* μιας επιφάνειας είναι η σύνθεση

$$\vec{r} \circ f : V' \to \mathbb{R}^3,$$

όπου $f : V' \to V$ είναι κάποιος *διαφορομορφισμός*, δηλαδή η f αποτελεί ομοιομορφισμό και επι πλέον τόσο η f όσο και η αντίστροφή της f^{-1} έχουν παραγώγους οποιασδήποτε τάξης, ενώ τα V και V' είναι κάποια ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$.

Σημείωση 1. Εάν $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, τότε από τον κανόνα της αλυσίδας για την παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης προκύπτει ότι

$$(\vec{r} \circ f)_x = \vec{r}_u u_x + \vec{r}_v v_x$$

και

$$(\vec{r} \circ f)_y = \vec{r}_u u_y + \vec{r}_v v_y,$$

οπότε

$$\begin{pmatrix} (\vec{r} \circ f)_x \\ (\vec{r} \circ f)_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_u \\ \vec{r}_v \end{pmatrix}.$$

Αφού η f έχει διαφορίσιμη αντίστροφη, ο Ιακωβιανός πίνακας θα είναι αντιστρέψιμος οπότε τα διανύσματα $(\vec{r} \circ f)_x$ και $(\vec{r} \circ f)_y$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα εάν και μόνο εάν τα διανύσματα $\vec{r}_u$ και $\vec{r}_v$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Σημείωση 2. Υπενθυμίζουμε ότι δύο διανύσματα $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά εξαρτημένα εάν και μόνο εάν $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

Ορισμός 5. Μια επιφάνεια A του $\mathbb{R}^3$ λέγεται *απλή* εάν για κάθε σημείο της $a \in A$ υπάρχει ανοικτή 3-διάστατη σφαιρική περιοχή $S(a)$ του $\mathbb{R}^3$ έτσι ώστε η τομή $A \cap S(a)$ να είναι ομοιομορφική με επίπεδο κυκλικό δίσκο.

19.2 Η Απεικόνιση Gauss

Ορισμός 1. Έστω A μια λεία επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ (εφοδιασμένου με το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο) και έστω T_aA το εφαπτόμενο επίπεδο της A στο σημείο $a \in A$. Τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ που είναι κάθετα στο επίπεδο T_aA ονομάζονται *κάθετα διανύσματα* της επιφάνειας A στο σημείο a.

Συνεπώς η A έχει δύο μοναδιαία κάθετα διανύσματα σε κάθε σημείο αυτής.

Ορισμός 2. Ονομάζουμε (κατά σύμβαση) *θετικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα* $\hat{n}_a$ μιας λείας επιφάνειας A του $\mathbb{R}^3$ στο σημείο $a \in A$, εκείνο το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα το οποίο δοθέντος ενός επιτρεπτού χάρτη της A, τα διανύσματα $\{\vec{r}_u(a), \vec{r}_v(a), \hat{n}_a\}$ συνιστούν μια *δεξιόστροφη βάση* του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$.

Με άλλα λόγια το θετικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\hat{n}_a$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα που είναι συγγραμμικό με το εξωτερικό γινόμενο $\vec{r}_u(a) \times \vec{r}_v(a)$.

Θεώρημα 1. Έστω A μια λεία επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$. Δύο διαφορετικοί χάρτες της A που περιέχουν το σημείο $a \in A$ ορίζουν το ίδιο θετικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\hat{n}_a$ εάν και μόνο εάν η απεικόνιση μετάβασης μεταξύ των δύο χαρτών διατηρεί τον προσανατολισμό (δηλαδή έχει θετική Ιακωβιανή).

Απόδειξη: Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [22].

Πόρισμα 1. Εάν η A είναι μια προσανατολίσιμη λεία επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$, τότε υπάρχει μια λεία απεικόνιση $\hat{n} : A \to \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε το $\hat{n}_a$ να είναι το θετικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της A στο σημείο $a \in A$.

Απόδειξη: Προφανής από το Θεώρημα 1.

Ορισμός 3. Η απεικόνιση $\hat{n} : A \to \mathbb{R}^3$ που απεικονίζει κάθε σημείο $a \in A$ της προσανατολίσιμης λείας επιφάνειας A του $\mathbb{R}^3$ στο θετικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\hat{n}_a$ ονομάζεται *απεικόνιση Gauss*.

Σημείωση 1: Προφανώς κάθε προσανατολίσιμη λεία επιφάνειας A του $\mathbb{R}^3$ έχει δύο όψεις.

20 Η Πρώτη Θεμελιώδης Μορφή

20.1 Βασικός Ορισμός

Είδαμε στο Βασικό Θεώρημα της Θεωρίας Καμπυλών στον χώρο $\mathbb{R}^3$, (Θεώρημα 10.1), ότι τα βασικά μεγέθη μιας καμπύλης είναι η καμπυλότητα και η στρέψη αυτής. Κάτι παρόμοιο ισχύει και για τις επιφάνειες που είναι εμφυτευμένες στον χώρο $\mathbb{R}^3$, όπου οι λεγόμενες *πρώτη θεμελιώδης μορφή* και *δεύτερη θεμελιώδης μορφή* παίζουν ρόλο ανάλογο με αυτόν της καμπυλότητας και της στρέψης.

Έστω A μια λεία επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με (επιτρεπτή) παραμετρική παράσταση $\vec{r}(u,v) : V \to \mathbb{R}^3$, όπου V κάποιο ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Επίσης θεωρούμε ότι ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$ είναι εφοδιασμένος με το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός 1. Μια *λεία καμπύλη πάνω στην επιφάνεια* A ορίζεται μέσω μιας απεικόνισης $t \mapsto (u(t), v(t))$ που έχει συνεχείς παραγώγους κάθε τάξης και τέτοιας ώστε η καμπύλη $\vec{\gamma}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$ να αποτελεί μια καμπύλη του $\mathbb{R}^3$.

Σχόλιο 1: Η απαίτηση του ορισμού ότι η καμπύλη $\vec{\gamma}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$ αποτελεί μια καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ σημαίνει ότι οι συναρτήσεις $u(t)$ και $v(t)$ έχουν παραγώγους κάθε τάξης ως προς t. Επίσης από τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει ότι $\vec{\gamma}' = \vec{r}_u u' + \vec{r}_v v'$ ενώ το γεγονός ότι η επιφάνεια A είναι εμφυτευμένη στον $\mathbb{R}^3$ εμπεριέχει την συνθήκη ότι τα διανύσματα $\vec{r}_u$ και $\vec{r}_v$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οπότε από την παράγωγο της καμπύλης $\vec{\gamma}'$ προκύπτει ότι $(u', v') \neq 0$. (Υπενθυμίζουμε ότι $u'(t) = du/dt$ και $v'(t) = dv/dt$).

Το μήκος τόξου μιας τέτοιας καμπύλης (που βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια A), από τις τιμές έστω της παραμέτρου $t = a$ έως $t = b$, είναι:

$$\int_a^b |\vec{\gamma}'| dt = \int_a^b \sqrt{\vec{\gamma}' \cdot \vec{\gamma}'} dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{(\vec{r}_u u' + \vec{r}_v v') \cdot (\vec{r}_u u' + \vec{r}_v v')} dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt,$$

όπου θέσαμε

$$E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u,$$

$$F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v,$$
$$G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v.$$

Ορισμός 2. Η *πρώτη θεμελιώδης μορφή* της επιφάνειας A είναι η έκφραση

$$Edu^2 + Fdudv + Gdv^2,$$

όπου

$$E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u,$$
$$F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v,$$
$$G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v.$$

Σχόλιο 2: Οι συναρτήσεις E, F και G, εξαρτώνται μόνο από την επιφάνεια A και την παραμετρική της παράσταση και όχι από την συγκεκριμένη καμπύλη πάνω στην A.

Σχόλιο 3: Η πρώτη θεμελιώδης μορφή αποτελεί απλά έναν τρόπο για να γράφουμε τις τρεις συναρτήσεις E, F και G, και ταυτόχρονα να έχουμε υπόψιν μας την σχέση που δίδει το μήκος μιας καμπύλης που βρίσκεται πάνω στην εν λόγω επιφάνεια A του $\mathbb{R}^3$. Συνεπώς οι ποσότητες du και dv αποτελούν απλά σύμβολα που δεν έχουν νόημα ανεξάρτητο από τον συγκεκριμένο ορισμό. *Στην πραγματικότητα η πρώτη θεμελιώδης μορφή αποτελεί μια τετραγωνική μορφή στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας A στο εν λόγω σημείο $\vec{r}(u,v)$ (και που ταυτίζεται με τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ όπως έχουμε δει), η οποία αντιστοιχεί στο τυχαίο διάνυσμα $\xi\vec{r}_u + \eta\vec{r}_v$ του εφαπτόμενου επιπέδου, το μήκος του* $|\xi\vec{r}_u + \eta\vec{r}_v|^2 = E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2$.

Το μήκος τόξου μιας καμπύλης πάνω στην επιφάνεια A με συντεταγμένες $u(t)$ και $v(t)$, μπορεί να υπολογισθεί με την χρήση της πρώτης θεμελιώδους μορφής:

$$s = \int \sqrt{E(\frac{du}{dt})^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G(\frac{dv}{dt})^2 dt}.$$

20.2 Αλλαγή Συντεταγμένων

Ας δούμε πως συμπεριφέρεται η πρώτη θεμελιώδης μορφή σε μια αλλαγή παραμέτρων (συντεταγμένων) της επιφάνειας A: έστω ότι η επιφάνεια A έχει αρχικές συντεταγμένες (x, y) και κάνουμε μια αλλαγή συντεταγμένων $(x, y) \mapsto (u, v)$, όπου $u = u(x, y)$ και $v = v(x, y)$. Για να υπολογίσουμε το μήκος μιας καμπύλης $(x(t), y(t))$ πάνω στην A, θα πρέπει να υπολογίσουμε τις ποσότητες

$$u' = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt} = u_x x' + u_y y'$$

και

$$v' = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = v_x x' + v_y y',$$

οπότε θα πάρουμε:

$$s = \int \sqrt{E(\frac{du}{dt})^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G(\frac{dv}{dt})^2}dt = \int \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}dt =$$

$$= \int \sqrt{E(u_x x' + u_y y')^2 + 2F(u_x x' + u_y y')(v_x x' + v_y y') + G(v_x x' + v_y y')^2} = ...$$

που απαιτεί πολύπλοκες πράξεις.

Αντί αυτού κάνουμε το εξής:

Γράφουμε

$$du = u_x dx + u_y dy$$

και

$$dv = v_x dx + v_y dy,$$

τα οποία τα αντικαθιστούμε στην πρώτη θεμελιώδη μορφή και επειδή, όπως είδαμε στην θεωρία καμπυλών, το μήκος μιας καμπύλης δεν εξαρτάται από την παραμετρική παράσταση που χρησιμοποιούμε, παίρνουμε ότι

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = E'dx^2 + 2F'dxdy + G'dy^2,$$

όπου οι ποσότητες E', F' και G' συνδέονται με τις αρχικές ποσότητες E, F και G ως εξής (με χρήση πινάκων):

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E' & F' \\ F' & G' \end{pmatrix}.$$

20.3 Παραδείγματα

1. Εάν η επιφάνεια A είναι το *επίπεδο* Oxy, τότε μια παραμετρική παράσταση είναι η $\vec{r}(x,y) = x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}$, οπότε $\vec{r}_x = \hat{\imath}$ και $\vec{r}_y = \hat{\jmath}$. Συνεπώς η πρώτη θεμελιώδης μορφή του επιπέδου Oxy είναι

$$dx^2 + dy^2.$$

Εάν κάνουμε μια αλλαγή συντεταγμένων και χρησιμοποιήσουμε για παράδειγμα τις πολικές συντεταγμένες του επιπέδου $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$, τότε θα έχουμε

$$dx = dr\cos\theta - r\sin\theta d\theta$$

και
$$dy = dr\sin\theta + r\cos\theta d\theta,$$
οπότε
$$dx^2 + dy^2 = (dr\cos\theta - r\sin\theta d\theta)^2 + (dr\sin\theta + r\cos\theta d\theta)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

Αυτό το παράδειγμα δείχνει με παραστατικό τρόπο την σχέση της πρώτης θεμελιώδους μορφής με την *μετρική*.

2: Κύλινδρος. Στην περίπτωση του κυλίνδρου έχουμε την παραμετρική παράσταση
$$\vec{r}(u,v) = a(\cos v\hat{\imath} + \sin v\hat{\jmath}) + u\hat{k},$$
οπότε υπολογίζουμε $\vec{r}_u = \hat{k}$ και $\vec{r}_v = a(-\sin v\hat{\imath} + \cos v\hat{\jmath})$, οπότε $E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = 1$, $F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0$ και $G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = a^2$, οπότε η πρώτη θεμελιώδης μορφή του κυλίνδρου είναι
$$du^2 + a^2 dv^2.$$

3: Κώνος. Στην περίπτωση του κώνου έχουμε την παραμετρική παράσταση
$$\vec{r}(u,v) = a(u\cos v\hat{\imath} + u\sin v\hat{\jmath}) + u\hat{k},$$
οπότε υπολογίζουμε $\vec{r}_u = a(\cos v\hat{\imath} + \sin v\hat{\jmath}) + \hat{k}$ και $\vec{r}_v = a(-u\sin v\hat{\imath} + u\cos v\hat{\jmath})$, οπότε $E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = 1 + a^2$, $F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0$ και $G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = a^2u^2$, οπότε η πρώτη θεμελιώδης μορφή του κώνου είναι
$$(1 + a^2)du^2 + a^2u^2dv^2.$$

4: Σφαίρα. Στην περίπτωση της σφαίρας έχουμε την παραμετρική παράσταση
$$\vec{r}(u,v) = a\sin u\sin v\hat{\imath} + a\cos u\sin v\hat{\jmath} + a\cos v\hat{k},$$
οπότε υπολογίζουμε $\vec{r}_u = a\cos u\sin v\hat{\imath} - a\sin u\sin v\hat{\jmath}$ και $\vec{r}_v = a\sin u\cos v\hat{\imath} + a\cos u\cos v\hat{\jmath} - a\sin v\hat{k}$, οπότε $E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = a^2\sin^2 v$, $F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0$ και $G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = a^2$, οπότε η πρώτη θεμελιώδης μορφή της σφαίρας είναι
$$a^2\sin^2 v du^2 + a^2dv^2.$$

5: Επιφάνειες εκ περιστροφής. Στην περίπτωση αυτή έχουμε παραμετρική παράσταση της μορφής
$$\vec{r}(u,v) = f(u)(\cos v\hat{\imath} + \sin v\hat{\jmath}) + u\hat{k},$$

οπότε υπολογίζουμε $\vec{r}_u = f'(u)(\cos v\hat{i} + \sin v\hat{j}) + \hat{k}$ και $\vec{r}_v = f(u)(-\sin v\hat{i} + \cos v\hat{j})$, οπότε $E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = 1 + f'(u)^2$, $F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0$ και $G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = f(u)^2$, οπότε η πρώτη θεμελιώδης μορφή είναι

$$(1 + f'(u)^2)du^2 + f(u)^2 dv^2.$$

6: Αναπτυκτές Επιφάνειες. Στην περίπτωση αυτή έχουμε παραμετρική παράσταση της μορφής

$$\vec{r}(u, v) = \vec{\gamma}(u) + v\vec{t},$$

όπου $u = s$ η φυσική παράμετρος της καμπύλης $\vec{\gamma}(u)$ ενώ $\vec{t}$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης. Υπολογίζουμε $\vec{r}_u = \vec{t}(u) + v\vec{t}'(u) = \vec{t} + vk\hat{n}$ και $\vec{r}_v = \vec{t}$, όπου $\hat{n} = \vec{p}$ το πρωτοκάθετο διάνυσμα της καμπύλης και k η καμπυλότητά της, οπότε $E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = 1 + v^2k^2$, $F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 2$ και $G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = 1$, οπότε η πρώτη θεμελιώδης μορφή είναι

$$(1 + v^2k^2)du^2 + 2dudv + dv^2.$$

20.4 Μετρική Ρήμαν

Η παράγραφος αυτή είναι προαιρετική και είναι χρήσιμη για μια αρχική εξοικείωση με ορισμένες βασικές έννοιες που απαντώνται συνεχώς τόσο στην γεωμετρία Ρήμαν όσο και στην Ειδική και Γενική Θεωρία της Σχετικότητας (τανυστική άλγεβρα).

Το αντίστοιχο της πρώτης θεμελιώδους μορφής σε μια γενικευμένη λεία επιφάνεια A, (δηλαδή επιφάνεια που δεν είναι εμφυτευμένη στον $\mathbb{R}^3$), λέγεται *μετρική Ρήμαν (Riemann metric)*. Σε κάθε ανοικτό $U \subseteq A$ με συντεταγμένες (u, v), αναζητάμε λείες συναρτήσεις E, F, G, με $E, G > 0$ και $EG - F^2 > 0$ ενω σε μια αλληλοεπικαλυπτόμενη γειτονιά με συντεταγμένες (x, y), αναζητάμε λείες συναρτήσεις E', F', G', με τις ίδιες ιδιότητες και οι οποίες υπακούουν στον νόμο μετασχηματισμού που περιγράφεται στο τέλος της παραγράφου 20.2 παραπάνω.

Παραδείγματα:

1. Το τόρους ως επιφάνεια Ρήμαν έχει μετρική

$$dzd\bar{z} = dx^2 + dy^2.$$

2. Το άνω ημιεπίπεδο Argand $\{x + iy \in \mathbb{C} | y > 0\}$ έχει την μετρική

$$\frac{dx^2 + dy^2}{2}.$$

Καμία από τις μετρικές στα δύο παραπάνω παραδείγματα δεν έχει καμία σχέση με την πρώτη θεμελιώδη μορφή των παραπάνω επιφανειών όταν εμφυτευθούν στον χώρο $\mathbb{R}^3$.

Μια εναλλακτική περιγραφή της πρώτης θεμελιώδους μορφής που την καθιστά μερική περίπτωση της μετρικής Ρήμαν, είναι η εξής:

Έστω A λεία επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$, (εφοδιασμένου με το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο), με (επιτρεπτή) παραμετρική παράσταση $\vec{r}(u,v)$. Συμβολίζουμε τις συντεταγμένες (u,v) με το σύμβολο x^i, όπου ο δείκτης i παίρνει τις τιμές $i=1,2$, δηλαδή $x^1=u$ και $x^2=v$. Τότε $\vec{r}_1=\vec{r}_u$ και $\vec{r}_2=\vec{r}_v$. Στην συνέχεια θέτουμε

$$g_{ij} := \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j,$$

όπου $i,j=1,2$.

Προφανώς η παραπάνω σχέση ορίζει 4 ποσότητες και φανερά ισχύει ότι $g_{11}=E$, $g_{12}=g_{21}=F$ και $g_{22}=G$.

Με αυτόν τον συμβολισμό, η πρώτη θεμελιώδης μορφή γράφεται

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j,$$

όπου $i,j=1,2$ και υιοθετούμε την λεγόμενη *σύμβαση Einstein*, δηλαδή *οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες αθροίζονται*. Η γραφή αυτή λέγεται *τανυστική μορφή* της πρώτης θεμελιώδους μορφής.

Οι 4 ποσότητες g_{ij} λέμε ότι αποτελούν τις συνιστώσες του μετρικού τανυστή που είναι τανυστής τύπου $(0,2)$ (διότι έχει 2 κάτω δείκτες και κανέναν άνω δείκτη). Ο τανυστής αυτός είναι συμμετρικός, δηλαδή ισχύει ότι $g_{ij}=g_{ji}$. Η βασική ιδιότητα των ποσοτήτων αυτών, που αποτελεί και την ιδιότητα κλειδί που μας κάνει να αποκαλούμε τις ποσότητες αυτές συνιστώσες ενός τανυστή τύπου $(0,2)$, είναι η συμπεριφορά τους κάτω από μια αλλαγή συντεταγμένων, που όπως είδαμε περιγράφεται από την σχέση της παραγράφου 20.2 (εκεί βέβαια χρησιμοποιούμε συμβολισμό πινάκων).

Ο υποψιασμένος αναγνώστης θα έχει καταλάβει πως η μετρική Ρήμαν είναι μια λεία "συνάρτηση" όπου σε κάθε σημείο μιας λείας επιφάνειας (πολλαπλότητας διάστασης 2 αλλά το ίδιο ισχύει και για λείες πολλαπλότητες μεγαλύτερης διάστασης), αντιστοιχεί μια θετικά ορισμένη συμμετρική διγραμμική μορφή στον αντίστοιχο εφαπτόμενο χώρο της επιφάνειας. Η απαίτηση $E,G>0$ χρειάζεται για να είναι η μετρική θετικά ορισμένη (για να μην προκύπτουν αρνητικά μήκη) ενώ η απαίτηση $EG - F^2 > 0$, (ποσότητα που συνιστά την ορίζουσα του 2×2 πίνακα της μετρικής εάν αυτή θεωρηθεί ως συμμετρικός πίνακας), χρειάζεται για να μην προκύπτουν αρνητικά εμβαδά χωρίων (όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω). Σημειώνουμε πάντως πως μια μετρική που δεν είναι θετικά ορισμένη λέγεται ψευδομετρική Ρήμαν. Τέτοιες μετρικές χρησιμοποιούνται συχνά στην θεωρητική φυσική (για παράδειγμα η λεγόμενη μετρική Minkowski της Ειδικής Θεωρίας Σχετικότητας δεν είναι θετικά ορισμένη). Μια λεία πολλαπλότητα εφοδιασμένη με μια (ψευδο)μετρική Ρήμαν λέγεται χώρος (ψεύδο)Ρήμαν. Η μελέτη αυτών λέγεται γεωμετρία (ψευδο)Ρήμαν.

Το σχόλιο με το οποίο θα θέλαμε να κλείσουμε αυτή την παράγραφο είναι πως όταν μια επιφάνεια είναι εμφυτευμένη στον χώρο $\mathbb{R}^3$, μια μετρική Ρήμαν υπάρχει αυτόματα από την εμφύτευση την ίδια, που δεν είναι άλλη από την πρώτη θεμελιώδη μορφή που ορίζεται μέσω της παραμετρικής παράστασης (εμφύτευσης) και του Ευκλείδειου εσωτερικού γινομένου στο χώρο $\mathbb{R}^3$ όπως περιγράψαμε παραπάνω. Εάν η επιφάνεια δεν είναι εμφυτευμένη στον χώρο $\mathbb{R}^3$, τότε η μετρική Ρήμαν συνιστά επιπρόσθετο δεδομένο για την επιφάνεια.

20.5 Γωνίες και Εμβαδά

Η πρώτη θεμελιώδης μορφή δεν είναι χρήσιμη μόνο για τον υπολογισμό των μηκών των καμπυλών πάνω σε μια επιφάνεια, αλλά μέσω αυτής μπορούν να υπολογισθούν γωνίες και εμβαδά χωρίων πάνω στην επιφάνεια (αυτό συμβαίνει γενικότερα και με την μετρική Ρήμαν).

Έστω $\vec{\gamma}_1(t)$ και $\vec{\gamma}_2(t)$ δύο καμπύλες μιας λείας επιφάνειας A του $\mathbb{R}^3$ που τέμνονται και έστω $\vec{r}(u, v)$ η παραμετρική παράσταση της επιφάνειας A. Η γωνία θ που τέμνονται (δηλαδή η γωνία που σχηματίζουν τα εφαπτόμενα μοναδιαία διανύσματα των δύο καμπυλών στο σημείο τομής τους) δίδεται από τη σχέση

$$\cos\theta = \frac{\vec{\gamma}_1'(t) \cdot \vec{\gamma}_2(t)}{|\vec{\gamma}_1'(t)||\vec{\gamma}_2(t)|}.$$

Όμως $\vec{\gamma}_i' = \vec{r}_u u_i' + \vec{r}_v v_i'$, οπότε

$$\vec{\gamma}_i'(t) \cdot \vec{\gamma}_j(t) = (\vec{r}_u u_i' + \vec{r}_v v_i') \cdot (\vec{r}_u u_j' + \vec{r}_v v_j') =$$

$$= E u_i' u_j' + F(u_i' v_j' + u_j' v_i') + G v_i' v_j'$$

και κάθε όρος μπορεί περαιτέρω να γραφεί σαν συνάρτηση της καμπύλης και των ποσοτήτων E, F και G της πρώτης θεμελιώδους μορφής.

Η πρώτη θεμελιώδης μορφή μας επιτρέπει να υπολογίζουμε και εμβαδά χωρίων της επιφάνειας A. Τουλάχιστον διαισθητικά, το απειροστό παραλληλόγραμμο πάνω στην A που παράγεται από τα εφαπτόμενα διανύσματα $\vec{r}_u du$ και $\vec{r}_v dv$ έχει εμβαδό $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv$. Χρησιμοποιώντας την γνωστή διανυσματική ταυτότητα

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2,$$

παίρνουμε

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Συνεπώς δίδουμε τον παρακάτω Ορισμό:

Ορισμός 1. Έστω A μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με παραμετρική παράσταση $\vec{r}(u,v) : V \to \mathbb{R}^3$, όπου $V \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό. Τότε το εμβαδό ενός τμήματος (χωρίου) $\vec{r}(V_0)$ της επιφάνειας A (όπου $V_0 \subseteq V$), δίδεται από την σχέση

$$\int_{V_0} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv = \int_{V_0} \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Σημείωση 1: Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, το εμβαδόν είναι ανεξάρτητο από την παραμέτρηση, διότι εάν $\vec{r}_x = \vec{r}_u u_x + \vec{r}_v v_x$ και $\vec{r}_y = \vec{r}_u u_y + \vec{r}_v v_y$, τότε $\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (u_x v_y - v_x u_y) \vec{r}_u \times \vec{r}_v$, οπότε

$$\int_{V_0} |\vec{r}_x \times \vec{r}_y| dxdy = \int_{V_0} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| |u_x v_y - v_x u_y| dxdy = \int_{V_0} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv,$$

χρησιμοποιώντας τον τύπο αλλαγής μεταβλητής πολλαπλών ολοκληρωμάτων.

Σημείωση 2: Μια ισοδύναμη έκφραση του τύπου για το εμβαδόν ενός χωρίου μιας επιφάνειας χρησιμοποιώντας τανυστές είναι η εξής:

$$\alpha = \int \int \sqrt{\det(g)} dudv.$$

Για παράδειγμα, το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας ακτίνας a υπολογίζεται ως εξής: η πρώτη θεμελιώδης μορφή της σφαίρας υπολογίσθηκε στο παράδειγμα 20.3.4 και χρησιμοποιώντας πίνακες (τανυστές) είναι

$$g_{ij} = a^2 \begin{pmatrix} \sin^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς $\det g = a^4 \sin^2 v$ ενώ εάν $u = \theta \in [0, \pi]$ συμβολίζει το γεωγραφικό πλάτος και $v = \phi \in [0, 2\pi]$ συμβολίζει το γεωγραφικό μήκος των γνωστών μας σφαιρικών συντεταγμένων, τότε

$$\alpha = a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\phi d\theta d\phi = 4\pi a^2,$$

που είναι το γνωστό αποτέλεσμα.

20.6 Ισομετρίες

Είναι σαφές πως η πρώτη θεμελιώδης μορφή μιας επιφάνειας A του $\mathbb{R}^3$ εξαρτάται από την επιφάνεια αλλά και από την παραμετρική παράσταση (και άρα με βάση την Παρατήρηση 19.1.6 και από τον χάρτη ή άτλαντα). Όμως μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ επιδέχεται πολλές ισοδύναμες παραμετρικές παραστάσεις. Συνεπώς είναι ουσιαστικής σημασίας να μπορέσουμε να *διυλίσουμε* την ουσιαστική πληροφορία που ενυπάρχει μέσα στην πρώτη θεμελιώδη μορφή και που εξαρτάται μόνο από την επιφάνεια και όχι από την χρησιμοποιούμενη κάθε φορά παραμετρική παράσταση.

Ξεκινάμε με την εξής διαισθητική παρατήρηση: αφού η πρώτη θεμελιώδης μορφή μας επιτρέπει να υπολογίζουμε τα μήκη καμπυλών πάνω στις επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$, είναι προφανές πως αυτή δεν θα πρέπει να μεταβάλεται εάν "λυγίσουμε" την επιφάνεια χωρίς να την "τεντώσουμε". Είναι συνεπώς χρήσιμη η εισαγωγή του εξής ορισμού:

Ορισμός 1. Δύο λείες επιφάνειες X_1 και X_2 του $\mathbb{R}^3$ λέγονται *ισομετρικές* εάν υπάρχει λεία απεικόνιση $f : X_1 \to X_2$ μεταξύ τους (βλέπε Ορισμό 15.3.3) η οποία να απεικονίζει κάθε καμπύλη της επιφάνειας X_1 σε μια καμπύλη της επιφάνειας X_2 με το ίδιο μήκος. Η απεικόνιση f λέγεται *ισομετρία*.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό, έχουμε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 1. *Δύο λείες επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$ είναι ισομετρικές εάν και μόνο εάν οι αντίστοιχες παραμετρικές παραστάσεις τους έχουν την ίδια πρώτη θεμελιώδη μορφή.*

Απόδειξη: Είναι προφανές ότι εάν δύο επιφάνειες A και $\check{A}$ του $\mathbb{R}^3$ έχουν την ίδια πρώτη θεμελιώδη μορφή, τότε θα είναι ισομετρικές.

Αντίστροφα, έστω A μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με παραμετρική παράσταση $\vec{r} : V \to \mathbb{R}^3$ και έστω $f : A \to \check{A}$ μια λεία ισομετρία. Τότε μπορούμε να ορίσουμε μια παραμετρική παράσταση $\check{\vec{r}} : V \to \mathbb{R}^3$ για την επιφάνεια $\check{A}$ μέσω της σχέσης $\check{\vec{r}} = f \circ \vec{r}$. Επειδή η f είναι λεία, το ίδιο ισχύει και για την $\vec{r}$, οπότε έχουμε

$$\int_a^b \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}dt = \int_a^b \sqrt{\check{E}(u')^2 + 2\check{F}u'v' + \check{G}(v')^2}dt,$$

για κάθε λεία καμπύλη $t \mapsto (u(t), v(t))$, όπου (u, v) παράμετροι του χωρίου $V \subseteq \mathbb{R}^2$ και όπου $\breve{E} = \vec{\breve{r}}_u \cdot \vec{\breve{r}}_u$, $\breve{F} = \vec{\breve{r}}_u \cdot \vec{\breve{r}}_v$ και $\breve{G} = \vec{\breve{r}}_v \cdot \vec{\breve{r}}_v$.

Ας εφαρμόσουμε το παραπάνω στην καμπύλη που δίδεται από τη σχέση $u(t) = u_0 + t$ και $v(t) = v_0$, για $0 \leq t \leq \epsilon$, όπου $(u_0, v_0) \in V$. Θα βρούμε

$$\int_0^\epsilon \sqrt{E(u_0 + t, v_0)}dt = \int_0^\epsilon \sqrt{\breve{E}(u_0 + t, v_0)}dt.$$

Υπενθυμίζουμε ότι οι ποσότητες $E, F, G, \breve{E}, \breve{F}, \breve{G}$ είναι συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $V \subseteq \mathbb{R}^2$ με τιμές στο $\mathbb{R}$.

Επειδή όμως

$$\phi(u_0) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \phi(u_0 + t)dt,$$

για κάθε συνεχή συνάρτηση ϕ, συμπεραίνουμε ότι $E(u_0, v_0) = \breve{E}(u_0, v_0)$.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι $G(u_0, v_0) = \breve{G}(u_0, v_0)$.

Στην συνέχεια θεωρούμε την καμπύλη $t \mapsto (u(t), v(t)) = (u_0 + t, v_0 + t)$. Το ίδιο επιχείρημα αποδεικνύει ότι

$$\sqrt{E + 2F + G} = \sqrt{\breve{E} + 2\breve{F} + \breve{G}}$$

στο σημείο (u_0, v_0), και συνεπώς $F(u_0, v_0) = \breve{F}(u_0, v_0)$.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος πρέπει να δείξουμε ότι η $\vec{\breve{r}}$ αποτελεί μια παραμετρική παράσταση της επιφάνειας $\breve{A}$, δηλαδή πρέπει να αποδείξουμε ότι τα διανύσματα $\vec{\breve{r}}_u$ και $\vec{\breve{r}}_v$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αυτό όμως πράγματι ισχύει διότι οι εξισώσεις $E = \breve{E}$, $F = \breve{F}$ και $G = \breve{G}$, συνεπάγονται ότι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{\breve{r}}_u$ και $\vec{\breve{r}}_v$ είναι ίση με την γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{r}_u$ και $\vec{r}_v$. $\square$

Ας δούμε ένα παράδειγμα: ο κώνος είδαμε στο παράδειγμα 20.3.3 ότι έχει πρώτη θεμελιώδη μορφή

$$(1 + a^2)du^2 + a^2u^2dv^2.$$

Θέτουμε

$$r = \sqrt{1 + a^2}u$$

και παίρνουμε

$$dr^2 + \frac{a^2}{1+a^2} r^2 dv^2.$$

Εάν τώρα θέσουμε

$$\theta = \sqrt{\frac{a^2}{1+a^2}} v,$$

παίρνουμε τις πολικές συντεταγμένες του επιπέδου

$$dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

Παρατηρήστε ότι καθώς $0 \leq v \leq 2\pi$, προκύπτει ότι $0 \leq \theta \leq \beta$, όπου

$$\beta = \sqrt{\frac{a^2}{1+a^2}} 2\pi < 2\pi.$$

20.7 Το Ερώτημα της Πραγματοποίησης

Εν μέρει παρακινούμενοι και από την εμπειρία μας από την θεωρία καμπυλών, είναι λογικό να εγερθεί το εξής ερώτημα (που λέγεται *πρόβλημα της πραγματοποίησης (problem of realisation)*):

Δοθέντων ενός ανοικτού υποσυνόλου $V \subseteq \mathbb{R}^2$ και τριών τυχαίων λείων συναρτήσεων $E, F, G : V \to \mathbb{R}$, υπάρχει κάποια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με παραμετρική παράσταση $\vec{r}(u,v) : V \to \mathbb{R}^3$, τέτοια ώστε η πρώτη θεμελιώδης μορφή αυτής να είναι η $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, και η οποία να είναι και θετικά ορισμένη (δηλαδή να ικανοποιούνται και οι συνθήκες $E, G > 0$ και $EG - F^2 > 0$;

Η απάντηση στην παραπάνω ερώτηση (την οποία την παραθέτουμε χωρίς απόδειξη), είναι η εξής:

Τοπικά ναι, αλλά ολικά όχι.

Δηλαδή δοθέντων τριών τυχαίων λείων συναρτήσεων $E, F, G : V \to \mathbb{R}$ και ενός σημείου $P \in V$, μπορούμε να βρούμε μια γειτονιά $P \ni V_0 \subseteq V$ του P και μια απεικόνιση $\vec{r}(u,v) : V_0 \to \mathbb{R}^3$, η οποία να αποτελεί την παραμετρική παράσταση μιας επιφάνειας του $\mathbb{R}^3$ και της οποίας η πρώτη θεμελιώδης μορφή να είναι η επιθυμητή. *Συνήθως όμως η απεικόνιση $\vec{r}$ δεν μπορεί να επεκταθεί σε όλο το V.*

Θα κλείσουμε αυτή την παράγραφο με τους εξής ορισμούς:

Ορισμός 1. Ένας χάρτης μιας επιφάνειας του $\mathbb{R}^3$ λέγεται *σύμμορφος* εάν διατηρεί τις γωνίες.

Πρόταση 1. *Ένας χάρτης μιας επιφάνειας του $\mathbb{R}^3$ είναι σύμμορφος εάν στην πρώτη θεμελιώδη μορφή ισχύει ότι $F = 0$ και $E = G$.*

Απόδειξη: Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [22].

Ορισμός 2. Ένας χάρτης μιας επιφάνειας του $\mathbb{R}^3$ λέγεται *ισεμβαδικός* εάν διατηρεί το εμβαδόν. (Στην χαρτογραφία χρησιμοποιείται ο όρος ισοδύναμος).

Πρόταση 2. *Ένας χάρτης μιας επιφάνειας του $\mathbb{R}^3$ είναι ισεμβαδικός εάν στην πρώτη θεμελιώδη μορφή ισχύει ότι $EG - F^2 = 1$.*

Απόδειξη: Προφανής, από τον τύπο του Ορισμού 20.5.1.

Ορισμός 3. Ένα σύστημα τοπικών συντεταγμένων (δηλαδή ένα ζεύγος παραμέτρων) (u, v), σε μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ λέγεται *ορθογώνιο* εάν τα εφαπτόμενα διανύσματα των καμπυλών συντεταγμένων u =σταθ και v =σταθ είναι *κάθετα*.

Πρόταση 3. *Ένα σύστημα τοπικών συντεταγμένων (u, v) σε μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ είναι* ορθογώνιο *εάν στην πρώτη θεμελιώδη μορφή ισχύει ότι $F = 0$ (ισοδύναμα εάν $g_{12} = 0$ χρησιμοποιώντας τανυστικό φορμαλισμό).*

Απόδειξη: Προκύπτει εύκολα από τον τύπο για τις γωνίες της παραγράφου 20.5.

21 Καμπυλότητα μιας Επιφάνειας

21.1 Η δεύτερη θεμελιώδης μορφή

Η πρώτη θεμελιώδης μορφή μιας επιφάνειας του $\mathbb{R}^3$ περιγράφει την λεγόμενη *εσωτερική* ή *συμφυή (intrinsic)* γεωμετρία μιας επιφάνειας, δηλαδή την εμπειρία που εκλαμβάνει για την επιφάνεια ένα μικρό έντομο που περπατά επάνω σε αυτήν. Η *δεύτερη θεμελιώδης μορφή* (που δεν είναι ανεξάρτητη από την πρώτη θεμελιώδη μορφή όπως θα δούμε σύντομα παρακάτω), σχετίζεται με τον τρόπο που η επιφάνεια *εμφυτεύεται* στον χώρο $\mathbb{R}^3$.

Είχαμε δει στην θεωρία καμπυλών ότι η καμπυλότητα μιας καμπύλης εκφράζει την μεταβολή της γωνίας που σχηματίζει το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης ανά μονάδα μήκους της καμπύλης (βλέπε Σημείωση 6.4.1).

Ανάλογα, ορίζεται η γεωμετρική έννοια της *καμπυλότητας* μιας επιφάνειας A του $\mathbb{R}^3$, η οποία σε κάθε σημείο $a \in A$ της επιφάνειας εκφράζει την ”*απόκλιση*” της επιφάνειας A από το εφαπτόμενο επίπεδο T_aA.

Έστω λοιπόν A μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με (επιτρεπτή) παραμετρική παράσταση $\vec{r}(u,v) : V \to \mathbb{R}^3$, όπου $V \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό. Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο $a \in A$ με διάνυσμα θέσης $\vec{r}(u,v)$ και συμβολίζουμε με T_aA το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας A στο σημείο a, το οποίο παράγεται από τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\vec{r}_u$ και $\vec{r}_v$. Στη συνέχεια επιλέγουμε ένα σημείο $a' \in A$ με διάνυσμα θέσης $\vec{r}(u',v')$, που να είναι *γειτονικό* του σημείου a, και χρησιμοποιούμε τον τύπο του Taylor για να προσεγγίσουμε το $\vec{r}(u',v')$ όταν το (u',v') είναι κοντά στο (u,v). Θα πάρουμε:

$$\vec{r}(u',v') = \vec{r}(u,v) + [\vec{r}_u(u,v)\delta u + \vec{r}_v(u,v)\delta v] +$$

$$+\frac{1}{2}[\vec{r}_{uu}(u,v)(\delta u)^2 + 2\vec{r}_{uv}(u,v)\delta u\delta v + \vec{r}_{vv}(u,v)(\delta v)^2] +$$

$$+ \text{ [όροι τρίτης τάξης] } + \ldots$$

όπου $\delta u = u' - u$, $\delta v = v' - v$,

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u},$$

$$\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v},$$

$$\vec{r}_{uu} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2},$$

$$\vec{r}_{vv} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2}$$

και

$$\vec{r}_{uv} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v}.$$

Εάν αγνοήσουμε τους όρους τρίτης (και μεγαλύτερης) τάξης, τότε η *απόσταση* του διανύσματος $\vec{r}(u', v')$ από το εφαπτόμενο επίπεδο $T_a A$ είναι

$$\hat{n} \cdot [\vec{r}(u', v') - \vec{r}(u, v)],$$

όπου $\hat{n}$ το μοναδιαίο θετικό κάθετο διάνυσμα του $T_a A$. Υπολογίζουμε λοιπόν την ποσότητα αυτή:

$$\hat{n} \cdot [\vec{r}(u', v') - \vec{r}(u, v)] = \frac{1}{2}[\hat{n} \cdot \vec{r}_{uu}(\delta u)^2 + 2\hat{n} \cdot \vec{r}_{uv}\delta u \delta v + \hat{n} \cdot \vec{r}_{vv}(\delta v)^2],$$

διότι τα εσωτερικά γινόμενα $\hat{n} \cdot \vec{r}_u = \hat{n} \cdot \vec{r}_v = 0$ μηδενίζονται επειδή εξ ορισμού $\hat{n} \perp T_a A$, οπότε το $\hat{n}$ θα είναι κάθετο και στα διανύσματα που παράγουν το εφαπτόμενο επίπεδο, δηλαδή $\hat{n} \perp \vec{r}_u$ και $\hat{n} \perp \vec{r}_v$.

Εάν στην συνέχεια, όπως έχει επικρατήσει για παραδοσιακούς λόγους, θέσουμε

$$L := \hat{n} \cdot \vec{r}_{uu},$$
$$M := \hat{n} \cdot \vec{r}_{uv},$$
$$N := \hat{n} \cdot \vec{r}_{vv},$$

τότε η απόσταση του διανύσματος $\vec{r}(u', v')$ από το εφαπτόμενο επίπεδο $T_a A$ γράφεται στην μορφή

$$\hat{n} \cdot [\vec{r}(u', v') - \vec{r}(u, v)] = \frac{1}{2}(Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2).$$

Ορισμός 1. Έστω A μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με (επιτρεπτή) παραμετρική παράσταση $\vec{r}(u, v) : V \to \mathbb{R}^3$, όπου $V \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό. Η τετραγωνική μορφή

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2,$$

όπου

$$L = \hat{n} \cdot \vec{r}_{uu},$$
$$M = \hat{n} \cdot \vec{r}_{uv},$$
$$N = \hat{n} \cdot \vec{r}_{vv},$$

συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $V \subseteq \mathbb{R}^2$ και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$, λέγεται *δεύτερη θεμελιώδης μορφή* της επιφάνειας A.

Σημείωση 1: Επειδή δεν χρησιμοποιήσαμε (όπως άλλωστε είθισται στην διεθνή βιβλιογραφία για ιστορικούς λόγους) τον παράγοντα $1/2$, η δεύτερη θεμελιώδης μορφή γεωμετρικά εκφράζει το διπλάσιο της απόστασης του διανύσματος $\vec{r}(u', v')$ από το εφαπτόμενο επίπεδο $T_a A$.

21.2 Εναλλακτική παρουσίαση της β′ θεμελιώδους μορφής και παραδείγματα

Είναι χρήσιμο να δούμε μια εναλλακτική περιγραφή της β′ θεμελιώδους μορφής χρησιμοποιώντας μια μονο-παραμετρική οικογένεια επιφανειών. Η δεύτερη θεμελιώδης μορφή προκύπτει από την παράγωγο της μονοπαραμετρικής οικογένειας των αντίστοιχων πρώτων θεμελιωδών μορφών.

Έστω A μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με (επιτρεπτή) παραμετρική παράσταση $\vec{r}(u, v) : V \to \mathbb{R}^3$, όπου $V \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό. *Θεωρούμε ότι η επιφάνεια A έχει ελαστικότητα και την συμπιέζουμε προς τα μέσα κατά μια απόσταση t κατά μήκος του θετικού μοναδιαίου διανύσματος $\hat{n}$ αυτής*, οπότε αποκτάμε μια *μονο-παραμετρική οικογένεια επιφανειών* με παραμετρική παράσταση

$$\vec{R}(u, v, t) = \vec{r}(u, v) - t\hat{n}(u, v),$$

με

$$\vec{R}_u = \vec{r}_u - t\hat{n}_u$$

και

$$\vec{R}_v = \vec{r}_v - t\hat{n}_v.$$

Φανερά τώρα έχουμε την πρώτη θεμελιώδη μορφή της επιφάνειας A που είναι η $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ η οποία εξαρτάται από την παράμετρο t και θέλουμε να υπολογίσουμε την ποσότητα

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(Edu^2+2Fdudv+Gdv^2)|_{t=0} = -[\vec{r}_u\cdot\hat{n}_u du^2+(\vec{r}_u\cdot\hat{n}_v+\vec{r}_v\cdot\hat{n}_u)dudv+\vec{r}_v\cdot\hat{n}_v dv^2].$$

Το δεξί μέλος αποτελεί την δεύτερη θεμελιώδη μορφή, η οποία αποτελεί (όπως και η πρώτη θεμελιώδης μορφή), μια τετραγωνική μορφή στον εφαπτόμενο χώρο της επιφάνειας.

Μπορούμε να γράψουμε την δεύτερη θεμελιώδη μορφή με τον ίδιο τρόπο όπως στην προηγούμενη παράγραφο: αφού $\hat{n} \perp \vec{r}_u, \vec{r}_v$, θα έχουμε

$$0 = (\vec{r}_u \cdot \hat{n})_u = \vec{r}_{uu} \cdot \hat{n} + \vec{r}_u \cdot \hat{n}_u.$$

Παρόμοια,

$$\vec{r}_{uv} \cdot \hat{n} + \vec{r}_u \cdot \hat{n}_v = 0$$

και

$$\vec{r}_{vu} \cdot \hat{n} + \vec{r}_v \cdot \hat{n}_u = 0$$

και επειδή $\vec{r}_{uv} = \vec{r}_{vu}$, έχουμε ότι $\vec{r}_u \cdot \hat{n}_v = \vec{r}_v \cdot \hat{n}_u$. Συνεπώς ορίζουμε:

Ορισμός 1. Η *δεύτερη θεμελιώδης μορφή* είναι η τετραγωνική μορφή

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2,$$

όπου

$$L = \hat{n} \cdot \vec{r}_{uu},$$
$$M = \hat{n} \cdot \vec{r}_{uv},$$
$$N = \hat{n} \cdot \vec{r}_{vv}.$$

Παραδείγματα:

1. *Το επίπεδο* με παραμετρική παράσταση

$$\vec{r}(u,v) = \vec{a} + u\vec{b} + v\vec{c}$$

έχει $\vec{r}_{uu} = \vec{r}_{uv} = \vec{r}_{vv} = 0$, οπότε η δεύτερη θεμελιώδης μορφή *μηδενίζεται.*

2. *Η σφαίρα* ακτίνας a, όπου το κέντρο αυτής ταυτίζεται με την αρχή του συστήματος συντεταγμένων του $\mathbb{R}^3$, θα έχει $\vec{r} = a\hat{n}$, οπότε $\vec{r}_u \cdot \hat{n}_u = a^{-1}\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u$, $\vec{r}_u \cdot \hat{n}_v = a^{-1}\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$ και $\vec{r}_v \cdot \hat{n}_v = a^{-1}\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$, οπότε

$$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2 = a^{-1}(Edu^2+2Fdudv+Gdv^2) = \frac{1}{a}(a^2\sin^2 v du^2+a^2dv^2) =$$

$$= a\sin^2 v du^2 + adv^2.$$

3. Μια επιφάνεια A του $\mathbb{R}^3$ που έχει *Καρτεσιανή αναπαράσταση* που δίδεται από το γράφημα μιας συνάρτησης 2 μεταβλητών $z = f(x,y)$, (Καρτεσιανή αναπαράσταση της επιφάνειας, βλέπε και παράγραφο 2.1), έχει παραμετρική παράσταση

$$\vec{r}(x,y) = x\hat{i} + y\hat{j} + f(x,y)\hat{k}.$$

Υπολογίζουμε τις ποσότητες $\vec{r}_x = \hat{i} + f_x\hat{k}$, $\vec{r}_y = \hat{j} + f_y\hat{k}$, $\vec{r}_{xx} = f_{xx}\hat{k}$, $\vec{r}_{xy} = f_{xy}\hat{k}$ και $\vec{r}_{yy} = f_{yy}\hat{k}$. Σε ένα κριτικό σημείο της f (βλέπε παράγρφο 23.5 παρακάτω), ισχύει ότι $f_x = f_y = 0$, οπότε το θετικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας είναι $\hat{n} = \hat{k}$. *Τότε η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της επιφάνειας είναι η Hessian της συνάρτησης* f:

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Hessian για μια ποιοτική μελέτη της συμπεριφοράς της δεύτερης θεμελιώδους μορφής στα σημεία της επιφάνειας.

Σε κάθε σημείο $a \in A$ της επιφάνειας, παραμετροποιούμε την επιφάνεια χρησιμοποιώντας την προβολή της στο εφαπτόμενο επίπεδο T_aA οπότε τότε η συνάρτηση $f(x, y)$ δίδει το *ύψος* της επιφάνειας πάνω από το εφαπτόμενο επίπεδο και χρησιμοποιούμε την θεωρία κριτικών σημείων πραγματικών συναρτήσεων 2 πραγματικών μεταβλητών.

(α). Εάν $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$, τότε το κριτικό σημείο αποτελεί *τοπικό μέγιστο* εάν ο πίνακας είναι αρνητικά ορισμένος και *τοπικό ελάχιστο* εάν ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος. Στην επιφάνεια η διαφορά έγκειται στην επιλογή του κάθετου μοναδιαίου και η εικόνα της επιφάνειας είναι ότι μοιάζει με σφαίρα, δηλαδή ευρίσκεται ολόκληρη στην μια πλευρά του εφαπτόμενου επιπέδου T_aA.

(β). Εάν $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$, τότε το κριτικό σημείο αποτελεί όπως λέμε *σημείο σάγματος* και το εφαπτόμενο επίπεδο T_aA τέμνει την επιφάνεια (οπότε η επιφάνεια εκτείνεται και στις δύο μεριές του εφαπτόμενου επιπέδου).

Γενικά μια επιφάνεια έχει σημεία και των δύο παραπάνω κατηγοριών.

Από το Παράδειγμα 1 προκύπτει εύκολα και η εξής πρόταση:

Πρόταση 1. Η δεύτερη θεμελιώδης μορφή μιας επιφάνειας του $\mathbb{R}^3$ μηδενίζεται εάν και μόνο εάν η επιφάνεια είναι το επίπεδο (ή μέρος ενός επιπέδου).

Απόδειξη: Η Απόδειξη προκύπτει εύκολα από την γνωστή εξίσωση του επιπέδου $\vec{r} \cdot \hat{n} = 0$ (βλέπε και [14]).

21.3 Γεωδαισιακή και Κάθετη Καμπυλότητα

Η γνώση της πρώτης και δεύτερης θεμελιώδους μορφής μιας επιφάνειας A του $\mathbb{R}^3$ μας παρέχει την δυνατότητα να υπολογίζουμε την καμπυλότητα οποιασδήποτε καμπύλης της επιφάνειας A. Στην πραγματικότητα, ισχύει κάτι πολύ ισχυρότερο που είναι ανάλογο με το βασικό θεώρημα της θεωρίας καμπυλών (Θεώρημα 10.1): *η πρώτη και η δεύτερη θεμελιώδης μορφή χαρακτηρίζουν πλήρως μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ (με μια πιθανή στερεά κίνηση στον χώρο $\mathbb{R}^3$).*

Έστω A μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με (επιτρεπτή) παραμετρική παράσταση $\vec{r}(u, v) : V \to \mathbb{R}^3$, όπου $V \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και έστω επίσης $\vec{\gamma}(s) : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ μια καμπύλη πάνω στην επιφάνεια A με παράμετρο το μήκος τόξου.

[Υπενθυμίζουμε ότι μια καμπύλη $u \mapsto \vec{\gamma}(u)$ στον χώρο $\mathbb{R}^3$ λέμε ότι έχει φυσική παράμετρο την παράμετρο u εάν το μήκος της καμπύλης από το σημείο $\vec{\gamma}(0)$ έως το σημείο $\vec{\gamma}(u)$ είναι u. Η συνθήκη για να ισχύει αυτό είναι, όπως έχουμε δει, $|d\vec{\gamma}(u)/du| = 1$].

Θα γράφουμε για την καμπύλη $\vec{\gamma}(s) = \vec{r}(u(s), v(s))$ ως συνήθως. Η καμπυλότητα k της καμπύλης $\vec{\gamma}$ στο σημείο αυτής $\vec{\gamma}(s)$ ορίζεται ως το μέτρο του διανύσματος

$$k := |\ddot{\vec{\gamma}}(s)|.$$

Το διάνυσμα $\ddot{\vec{\gamma}}(s)$ (που δεν είναι άλλο από το γνωστό μας διάνυσμα $\dot{\vec{t}}(s)$, δηλαδή η παράγωγος ως προς s του μοναδιαίου εφαπτόμενου διανύσματος της καμπύλης), μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες,

$$\ddot{\vec{\gamma}}(s) = \ddot{\vec{\gamma}}_t(s) + \ddot{\vec{\gamma}}_n(s),$$

όπου $\ddot{\vec{\gamma}}_t(s)$ είναι η *εφαπτομενική συνιστώσα* που βρίσκεται στο εφαπτόμενο επίπεδο ("t" από την λέξη tangential), και $\ddot{\vec{\gamma}}_n(s)$ είναι η *κάθετη συνιστώσα* που είναι κάθετη στο εφαπτόμενο επίπεδο ("n" από την λέξη normal).

Ορισμός 1. Το μήκος του διανύσματος $\ddot{\vec{\gamma}}_t(s)$ λέγεται *γεωδαισιακή καμπυλότητα* και συμβολίζεται με k_g:

$$k_g := |\ddot{\vec{\gamma}}_t(s)|.$$

Ορισμός 2. Το μήκος του διανύσματος $\ddot{\vec{\gamma}}_n(s)$ λέγεται *κάθετη καμπυλότητα* και συμβολίζεται με k_n:

$$k_n := |\ddot{\vec{\gamma}}_n(s)|.$$

Σημείωση 1: Η χρήση του όρου κάθετη καμπυλότητα είναι προφανής διότι αναφέρεται στο μέτρο της κάθετης συνιστώσας διανύσματος $\ddot{\vec{\gamma}}$. Η χρήση του όρου γεωδαισιακή καμπυλότητα (και όχι για παράδειγμα "εφαπτομενική καμπυλότητα") θα δικαιολογηθεί παρακάτω (βλέπε σημείωση 24.2.3), όταν θα δούμε πως μια καμπύλη είναι γεωδαισιακή (δηλαδή έχει ελάχιστο μήκος) εάν και μόνο εάν μηδενίζεται η γεωδαισιακή καμπυλότητα αυτής.

Συνεπώς, με την χρήση των δύο παραπάνω ορισμών, έχουμε ότι για την καμπυλότητα k μιας καμπύλης της επιφάνειας A ισχύει ότι

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2.$$

Μπορούμε να ορίσουμε και *πρόσημα* στις ποσότητες k_g και k_n, ορίζοντας ως *θετικές* τις ποσότητες

$$k_g = \ddot{\vec{\gamma}} \cdot (\dot{\vec{\gamma}} \times \hat{n})$$

και

$$k_n = \ddot{\vec{\gamma}} \cdot \hat{n}.$$

Το σημαντικό για την κάθετη καμπυλότητα k_n είναι ότι σε κάθε σημείο εξαρτάται μόνο από την *διεύθυνση* της καμπύλης $\vec{\gamma}$ στο εν λόγω σημείο, δηλαδή εξαρτάται μόνο από το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης

$$\dot{\vec{\gamma}} = \dot{u}\vec{r}_u + \dot{v}\vec{r}_v.$$

Θεώρημα 1. Έστω A μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με (επιτρεπτή) παραμετρική παράσταση $\vec{r}(u,v) : V \to \mathbb{R}^3$, όπου $V \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και έστω επίσης $\vec{\gamma}(s) : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ μια καμπύλη πάνω στην επιφάνεια A με παράμετρο το μήκος τόξου. Τότε η *κάθετη καμπυλότητα* k_n της καμπύλης $\vec{\gamma}(s)$ δίδεται από την σχέση

$$k_n = L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2.$$

Απόδειξη: Εξ ορισμού, $k_n = \ddot{\vec{\gamma}} \cdot \hat{n}$. Όμως

$$\ddot{\vec{\gamma}} = \frac{d}{ds}(\dot{u}\vec{r}_u + \dot{v}\vec{r}_v) =$$

$$= \ddot{u}\vec{r}_u + \dot{u}\dot{\vec{r}}_u + \ddot{v}\vec{r}_v + \dot{v}\dot{\vec{r}}_v =$$

$$= \ddot{u}\vec{r}_u + \dot{u}\frac{d\vec{r}_u}{ds} + \ddot{v}\vec{r}_v + \dot{v}\frac{d\vec{r}_v}{ds} =$$

$$= \ddot{u}\vec{r}_u + \dot{u}(\frac{du}{ds}\frac{\partial\vec{r}_u}{\partial u} + \frac{dv}{ds}\frac{\partial\vec{r}_u}{\partial v}) + \ddot{v}\vec{r}_v + \dot{v}(\frac{dv}{ds}\frac{\partial\vec{r}_v}{\partial v} + \frac{du}{ds}\frac{\partial\vec{r}_v}{\partial u}) =$$

$$= \ddot{u}\vec{r}_u + \dot{u}^2\vec{r}_{uu} + \dot{u}\dot{v}\vec{r}_{uv} + \ddot{v}\vec{r}_v + \dot{v}^2\vec{r}_{vv} + \dot{v}\dot{u}\vec{r}_{vu} =$$

$$= (\ddot{u}\vec{r}_u + \ddot{v}\vec{r}_v) + (\dot{u}^2\vec{r}_{uu} + 2\dot{u}\dot{v}\vec{r}_{uv} + \dot{v}^2\vec{r}_{vv}).$$

Εάν στη συνέχεια πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο της παραπάνω έκφρασης για το $\ddot{\vec{\gamma}}$ με το $\hat{n}$ και εφαρμόσουμε την επιμεριστική ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων, οι όροι από την πρώτη παρένθεση θα μηδενισθούν διότι $\hat{n} \perp \vec{r}_u, \vec{r}_v$, και οι εναπομείναντες όροι από την δεύτερη παρένθεση θα μας δώσουν το ζητούμενο. $\square$

Σημείωση 2: Για την *γεωδαισιακή καμπυλότητα* k_g ισχύει μια πιο πολύπλοκη έκφραση: με ανάλογο τρόπο μπορεί κανείς να υπολογίσει ότι

$$k_g = \sqrt{EG - F^2}(\dot{u}\ddot{v} - \ddot{u}\dot{v}) + (P\dot{u}^3 + Q\dot{u}^2\dot{v} + R\dot{u}\dot{v}^2 + S\dot{v}^3),$$

όπου οι ποσότητες P, Q, R, S είναι συναρτήσεις της πρώτης θεμελιώδους μορφής, δηλαδή συναρτήσεις των ποσοτήτων E, F και G.

Επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο $a = \vec{r}(u, v) \in A$ και μια τυχαία διεύθυνση στην επιφάνεια A στο σημείο a, που δίδεται, έστω, από το διάνυσμα $\xi\vec{r}_u + \eta\vec{r}_v$ (όπου $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ και προφανώς $\xi\vec{r}_u + \eta\vec{r}_v \in T_aA$). Από την σχέση

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2$$

προκύπτει ότι από όλες τις καμπύλες της επιφάνειας A που διέρχονται από το συγκεκριμένο τυχαίο σημείο $a \in A$ και οι οποίες στο σημείο a έχουν την συγκεκριμένη τυχαία διεύθυνση (δηλαδή το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμά τους στο σημείο a είναι συγγραμμικό με το διάνυσμα $\xi\vec{r}_u + \eta\vec{r}_v$), την *μικρότερη κάθετη καμπυλότητα* την έχει η *κάθετη διατομή*, δηλαδή η καμπύλη που σχηματίζεται από την τομή της επιφάνειας A με το επίπεδο που διέρχεται από το σημείο a και που παράγεται από τα διανύσματα $\hat{n}$ και $\xi\vec{r}_u + \eta\vec{r}_v$. Φανερά το μέτρο του διανύσματος $\xi\vec{r}_u + \eta\vec{r}_v$ δίδεται από την πρώτη θεμελιώδη μορφή της επιφάνειας A και θα είναι $|\xi\vec{r}_u + \eta\vec{r}_v| = E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2$.

Αυτό που θέλουμε να κάνουμε στην συνέχεια είναι το εξής: κρατώντας σταθερό το σημείο $a \in A$, θα μελετήσουμε πως μεταβάλλεται η κάθετη καμπυλότητα k_n των καμπυλών της επιφάνειας A που διέρχονται από το σημείο a σε σχέση με την αλλαγή της διεύθυνσης του διανύσματος $\xi\vec{r}_u + \eta\vec{r}_v$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το διάνυσμα $\xi\vec{r}_u + \eta\vec{r}_v$ είναι μοναδιαίο, δηλαδή $|\xi\vec{r}_u + \eta\vec{r}_v| = E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 = 1$. Με άλλα λόγια θέλουμε να μελετήσουμε τις τιμές της συνάρτησης $k_n = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2$, που υπόκειται στον περιορισμό (σύνδεσμο) $|\xi\vec{r}_u + \eta\vec{r}_v| = E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 = 1$.

Αρχικά κάνουμε μια αλλαγή βάσης στο εφαπτόμενο επίπεδο T_aA: από την αρχική βάση $\{\vec{r}_u, \vec{r}_v\}$ πηγαίνουμε σε μια ορθοκανονική βάση $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$. Τότε η τετραγωνική μορφή $L\xi^2+2M\xi\eta+N\eta^2$ θα μετασχηματισθεί στην τετραγωνική μορφή, έστω, $P\xi^2+2Q\xi\eta+R\eta^2$ και ταυτόχρονα ο σύνδεσμος θα γίνει $\xi^2+\eta^2=1$. Στη συνέχεια μπορούμε να περιστρέψουμε την βάση $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$, έτσι ώστε η τετραγωνική μορφή $P\xi^2+2Q\xi\eta+R\eta^2$ να *διαγωνιοποιηθεί* και θα πάρει την μορφή, έστω,

$$k_n = k_1\xi^2 + k_2\eta^2.$$

Συνεπώς καθώς μεταβάλλεται η διεύθυνση του διανύσματος $\xi\vec{r}_u + \eta\vec{r}_v$, δηλαδή καθώς μεταβάλλονται τα ξ και η, υποκείμενα στον περιορισμό $\xi^2+\eta^2=1$, η κάθετη καμπυλότητα μεταβάλλεται μεταξύ των τιμών k_1 και k_2. Εάν $k_1 \neq k_2$, τότε οι ιδιοδιευθύνσεις $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$, ορίζονται μονοσήμαντα.

Δίδουμε στη συνέχεια τους εξής ορισμούς:

Ορισμός 3.
(α). Οι ακρότατες τιμές k_1 και k_2 της κάθετης καμπυλότητας σε κάποιο σημείο μιας επιφάνειας λέγονται *κύριες καμπυλότητες* της επιφάνειας στο εν λόγω σημείο.
(β). Οι διευθύνσεις των καμπυλών με καμπυλότητες k_1 και k_2 λέγονται *κύριες διευθύνσεις* της επιφάνειας στο εν λόγω σημείο.
(γ). Το γινόμενο $K = k_1 k_2$ των κύριων καμπυλοτήτων λέγεται *καμπυλότητα Gauss* της επιφάνειας στο εν λόγω σημείο.
(δ). Η μέση τιμή των κύριων καμπυλοτήτων $K_m = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ λέγεται *μέση καμπυλότητα* της επιφάνειας στο εν λόγω σημείο. (Σε μερικά βιβλία δεν υπάρχει ο παράγοντας $1/2$ και η μέση καμπυλότητα ορίζεται απλά ως το άθροισμα των κύριων καμπυλοτήτων).

Παρατήρηση 1: Οι κύριες διευθύνσεις δεν ορίζονται στα σημεία μιας επιφάνειας για τα οποία ισχύει $k_1 = k_2$, δηλαδή για τα σημεία που οι κύριες καμπυλότητες είναι ίσες. Αυτά τα σημεία λέγονται *ομφάλια σημεία*.

Παρατήρηση 2: Εάν σε κάποιο σημείο μιας επιφάνειας οι κύριες καμπυλότητες είναι *ομόσημες*, τότε η καμπυλότητα Gauss είναι *θετική* και η επιφάνεια σε εκείνο το σημείο είναι *κυρτή*, δηλαδή παραμένει στην μια πλευρά του εφαπτόμενου επιπέδου στο εν λόγω σημείο.

Παρατήρηση 3: Εάν σε κάποιο σημείο μιας επιφάνειας οι κύριες καμπυλότητες είναι *ετερόσημες*, τότε η καμπυλότητα Gauss είναι *αρνητική* και η επιφάνεια σε εκείνο το σημείο είναι *σελοειδής*, δηλαδή τέμνει το εφαπτόμενο επίπεδο στο εν λόγω σημείο. (Παράβαλε με το Παράδειγμα 21.2.3)

21.4 Γεωμετρική ερμηνεία της καμπυλότητας Gauss

Πριν δούμε το γεωμετρικό νόημα της καμπυλότητας Gauss, θα θέλαμε να σημειώσουμε πως η αλλαγή βάσης στο εφαπτόμενο επίπεδο T_aA της επιφάνειας A σε κάποιο δοσμένο σημείο $a \in A$

$$\hat{e}_1 = \alpha_1 \vec{r}_u + \beta_1 \vec{r}_v$$

και

$$\hat{e}_2 = \alpha_2 \vec{r}_u + \beta_2 \vec{r}_v$$

η οποία μετασχηματίζει την μεν πρώτη θεμελιώδη μορφή $E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2$ στην διαγώνια μορφή (Ευκλείδεια μετρική) $\xi^2 + \eta^2$ ενώ την δεύτερη θεμελιώδη μορφή $L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2$ την μετασχηματίζει στην επίσης διαγώνια μορφή $k_1\xi^2 + k_2\eta^2$, μπορεί να γίνει σε ένα βήμα.

Δηλαδή οι 2×2 πραγματικοί τετραγωνικοί πίνακες $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ μπορούν να *διαγωνιοποιηθούν ταυτόχρονα* διότι τα διανύσματα $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ είναι τα *σχετικά ιδιοδιανύσματα* των δύο τετραγωνικών μορφών, δηλαδή τα διανύσματα που ικανοποιούν τη σχέση

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} = k_i \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix},$$

όπου $i = 1, 2$, κανονικοποιημένα έτσι ώστε $E\alpha_i^2 + 2F\alpha_i\beta_i + G\beta_i^2 = 1$. Έχουμε συνεπώς το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 1.
(α). Οι κύριες καμπυλότητες k_1 και k_2 προκύπτουν ως ρίζες της τετραγωνικής εξίσωσης

$$\det \left[\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \right] = 0.$$

(β). Η καμπυλότητα Gauss είναι ίση με

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

(γ). Η μέση καμπυλότητα είναι ίση με

$$K_m = \frac{1}{2} \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}.$$

Απόδειξη: Προκύπτουν μετά από πράξεις, βλέπε [22].

Σε μια καμπύλη, είδαμε ότι η *καμπυλότητα* εκφράζει την *μεταβολή της διεύθυνσης ανά μονάδα μήκους* του μοναδιαίου εφαπτόμενου διανύσματος της καμπύλης , δηλαδή $k = \frac{d\theta}{ds}$, όπου θ η γωνία που σχηματίζει το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης με μια καθορισμένη και σταθερή διεύθυνση στο χώρο.

Στην περίπτωση των επιφανειών του χώρου, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η $theta$ είναι η γωνία μεταξύ του θετικού μοναδιαίου κάθετου διανύσματος $\hat{n}$ με μια καθορισμένη και σταθερή διεύθυνση στο χώρο. Η αντίστοιχη διεργασία για τις επιφάνειες είναι να ορίσουμε την *καμπυλότητα Gauss* ως την *μεταβολή της στερεάς γωνίας ανά μονάδα επιφάνειας* που σαρώνει το θετικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\hat{n}$ στο χώρο.

Υπενθυμίζουμε από τον Ορισμό 19.2.3 ότι για μια προσανατολίσιμη επιφάνεια A του $\mathbb{R}^3$, η απεικόνιση Gauss $\hat{n} : A \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ (όπου S^2 η μοναδιαία σφαίρα διότι το διάνυσμα $\hat{n}$ είναι μοναδιαίο), απεικονίζει κάθε σημείο $a \in A$ στο θετικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\hat{n}_a$. Έστω $a \in U \subseteq A$ μια μικρή γειτονιά του σημείου a στην επιφάνεια A. Θα υπολογίσουμε το όριο, καθώς το U "συρρικνώνεται" και τείνει στο σημείο a, της ποσότητας

$$\frac{Area[\hat{n}(U)]}{Area[U]},$$

όπου το εμβαδό του κομματιού $\hat{n}(U) \subseteq S^2$ της μοναδιαίας σφαίρας που αντιστοιχεί στο $U \subseteq A$ θεωρείται θετικό ή αρνητικό, ανάλογα με το εάν η απεικόνιση Gauss διατηρεί ή αντιστρέφει τον προσανατολισμό αντίστοιχα.

Θεώρημα 2. Ισχύει ότι

$$K(a) = \lim_{U \to a} \frac{Area[\hat{n}(U)]}{Area[U]},$$

όπου $K(a)$ η καμπυλότητα Gauss της επιφάνειας A στο σημείο a.

Απόδειξη: Έστω A μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με (επιτρεπτή) παραμετρική παράσταση $\vec{r}(u, v) : V \to \mathbb{R}^3$, όπου $V \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $U = \vec{r}(V)$. Το εμβαδόν του χωρίου U θα είναι (βλέπε Ορισμό 20.5.1)

$$\int_V |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv = \int_V \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Το αντίτοιχο εμβαδό πάνω στην μοναδιαία σφαίρα του χωρίου $\hat{n}(U)$ θα είναι

$$\int_V |\hat{n}_u \times \hat{n}_v| du dv.$$

Όμως το διάνυσμα $\hat{n}_u \times \hat{n}_v$ είναι παράλληλο με το διάνυσμα $\hat{n}$, οπότε εάν λάβουμε υπόψιν μας και το πρόσημο, θα έχουμε

$$Area[\hat{n}(U)] = \int_V \hat{n} \cdot (\hat{n}_u \times \hat{n}_v) du dv.$$

Τώρα

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot (\hat{n}_u \times \hat{n}_v) &= \frac{(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot (\hat{n}_u \times \hat{n}_v)}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \\ &= \frac{(\vec{r}_u \cdot \hat{n}_u)(\vec{r}_v \cdot \hat{n}_v) - (\vec{r}_u \cdot \hat{n}_v)(\vec{r}_v \cdot \hat{n}_u)}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \\ &= \frac{LN - M^2}{\sqrt{EG - F^2}}, \end{aligned}$$

διότι $\vec{r}_u \cdot \hat{n}_u = -\vec{r}_{uu} \cdot \hat{n} = -L$, $\vec{r}_v \cdot \hat{n}_v = -\vec{r}_{vv} \cdot \hat{n} = -N$ και $\vec{r}_u \cdot \hat{n}_v = \vec{r}_v \cdot \hat{n}_u = \vec{r}_{uv} \cdot \hat{n} = -M$.

Συνεπώς καθώς το U συρρικνώνεται σε σημείο, το όριο του λόγου των εμβαδών γίνεται

$$\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K,$$

που είναι το ζητούμενο. □

Πόρισμα 1. Για μια κυρτή κλειστή (συμπαγή) επιφάνεια A του $\mathbb{R}^3$ ισχύει ότι

$$\int_A K dS = 4\pi,$$

όπου dS είναι το στοιχειώδες εμβαδόν της επιφάνειας A.

Απόδειξη: Για μια κυρτή επιφάνεια (δηλαδή για μια επιφάνεια με την ιδιότητα σε κάθε σημείο της, το εφαπτόμενο επίπεδο να έχει ολόκληρη την επιφάνεια στο ίδιο μέρος, ή ισοδύναμα, για μια επιφάνεια με την ιδιότητα σε κάθε σημείο αυτής, το εφαπτόμενο επίπεδο να μην τέμνει την επιφάνεια σε άλλο σημείο εκτός από το σημείο επαφής), η απεικόνιση Gauss $\hat{n} : A \to S^2$ είναι αμφειkόνιση (δηλαδή 1-1 και επί) και μόλις παραπάνω αποδείξαμε πως το εμβαδόν του χωρίου $\hat{n}(dS) = KdS$. Το εμβαδόν της επιφάνειας της μοναδιαίας σφαίρας είναι ως γνωστόν 4π. $\square$

Σημείωση 1: Το Πόρισμα αυτό είναι μια ειδική περίπτωση του περίφημου *Θεωρήματος Gauss-Bonnet* που αποτελεί το σημαντικότερο θεώρημα στην μελέτη γενικά των επιφανειών (πολλαπλοτήτων διάστασης 2), και που λέει ότι για κάθε συμπαγή επιφάνεια X (άσχετα με το εάν είναι εμφυτεύσιμη στον $\mathbb{R}^3$ ή όχι και άσχετα με το εάν είναι προσανατολίσιμη ή όχι), ισχύει ότι

$$\int_X K dS = 2\pi\chi,$$

όπου K είναι η καμπυλότητα Gauss και χ είναι η *χαρακτηριστική Euler* της επιφάνειας X.

Η μεν χαρακτηριστική Euler, όπως είδαμε στην παράγραφο 17, ορίζεται για κάθε συμπαγή επιφάνεια (εμφυτευμένη ή όχι στον $\mathbb{R}^3$, προσανατολίσιμη ή όχι), και μπορεί να υπολογισθεί, για παράδειγμα, με την χρήση μιας τοπολογικής υποδιαίρεσης, αλλά αποτελεί τοπολογική ιδιότητα της επιφάνειας (είναι ανεξάρτητη από την υποδιαίρεση). Για την καμπυλότητα Gauss θα πούμε πως στην μεν περίπτωση που η επιφάνεια είναι εμφυτευμένη στον $\mathbb{R}^3$, αυτή υπολογίζεται από το Θεώρημα 21.4.1(β). Εάν η επιφάνεια δεν είναι εμφυτευμένη στον $\mathbb{R}^3$, η καμπυλότητα Gauss υπολογίζεται μέσω μιας μετρικής Ρήμαν.

Ας σημειώσουμε με έμφαση πως η πρωταρχικής σημασίας γενικά για την θεωρία επιφανειών (πολλαπλότητες διάστασης 2), αξία του θεωρήματος Gauss-Bonnet, έγκειται στο γεγονός ότι συνδέει την σημαντικότερη τοπική ιδιότητα μιας επιφάνειας, που είναι η καμπυλότητα, με την σημαντικότερη ολική (ή τοπολογική) ιδιότητα μιας επιφάνειας που είναι η χαρακτηριστική Euler (υπενθυμίζουμε πως μέσω της χαρακτηριστικής Euler γίνεται η τοπολογική κατηγοριοποίηση των (συμπαγών) επιφανειών σύμφωνα με το θεώρημα 17.3).

Το Θεώρημα Gauss-Bonnet αποτελεί με την σειρά του ειδική περίπτωση ενός πολύ γενικότερου θεωρήματος, του *Θεωρήματος Δείκτου Atiyah-Singer* που αποδείχθηκε στα τέλη της δεκαετίας του 1960, αρχές 1970, και που αποτελεί το πιο κομβικό θεώρημα των μαθηματικών του δευτέρου μισού του 20ου αιώνα και που ενοποιεί γεωμετρία, τοπολογία και ανάλυση.

Σημείωση 2: Κάτω από έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων (ή ισοδύναμα αλλαγή παραμετρικής παράστασης, βλέπε παράγραφο 20.2), η πρώτη θεμελιώδης μορφή υπόκειται στον εξής μετασχηματισμό:

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E' & F' \\ F' & G' \end{pmatrix}.$$

Εάν όμως πάρουμε τις ορίζουσες των πινάκων, βλέπουμε ότι

$$(u_x v_y - u_y v_x)^2 (EG - F^2) = (E'G' - F'^2).$$

Η δεύτερη θεμελιώδης μορφή, που αποτελεί επίσης μια τετραγωνική μορφή στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας, υπόκειται στον ίδιο μετασχηματισμό κάτω από μια αλλαγή συντεταγμένων. Από το Θεώρημα 21.4.1(β) έχουμε ότι η καμπυλότητα Gauss είναι ίση με το πηλίκο των οριζουσών της πρώτης και της δεύτερης θεμελιώδους μορφής, συνεπώς *η καμπυλότητα Gauss είναι ανεξάρτητη από την επιλογή τοπικών συντεταγμένων* (η ισοδύναμα επιλογή παραμετρικής παράστασης) της επιφάνειας A του $\mathbb{R}^3$ διότι στο πηλίκο, ο παράγοντας $(u_x v_y - u_y v_x)^2$ θα απλοποιηθεί.

Παραδείγματα:

1. *Το επίπεδο* έχει $L = M = N = 0$, οπότε η καμπυλότητα Gauss $K = 0$. Μια επιφάνεια λέγεται *επίπεδη* εάν η καμπυλότητα Gauss μηδενίζεται.

2. *Η σφαίρα* ακτίνας a έχει δεύτερη θεμελιώδη μορφή ίση με $\frac{1}{a}$ επί την πρώτη θεμελιώδη μορφή, (βλέπε παράδειγμα 21.2.2), συνεπώς η καμπυλότητα Gauss της σφαίρας ακτίνας a θα είναι $K = \frac{1}{a^2}$.

21.5 Μέση Καμπυλότητα και Ελάχιστες Επιφάνειες

Ας δούμε τώρα την γεωμετρική σημασία της μέσης καμπυλότητας K_m μιας επιφάνειας A του $\mathbb{R}^3$.

Έστω A μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με (επιτρεπτή) παραμετρική παράσταση $\vec{r}(u,v) : V \to \mathbb{R}^3$, όπου $V \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό. Έστω $R \subset U$ ένα συμπαγές υποσύνολο. Το εμβαδόν α του χωρίου $\vec{r}(R) \subset A$ είναι

$$\alpha = \int_R |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv = \int_R \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Υποθέτουμε ότι η επιφάνεια κινείται με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε σημείο να μετακινείται με μοναδιαία ταχύτητα προς την κατεύθυνση του $\hat{n}$. Θα αποδείξουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού δίδεται από την σχέση

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt} = 2 \int_R K_m \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Εάν θεωρήσουμε μια μικρή περιοχή R στην οποία η μέση καμπυλότητα είναι περίπου σταθερή, αυτό σημαίνει πως ο ανάλογος ρυθμός μεταβολής του εμβαδού

$\frac{\alpha'}{\alpha} \sim K_m$. Εάν πάρουμε το όριο που το R συρρικνώνεται σε σημείο, παίρνουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1. Η μέση καμπυλότητα στο σημείο μιας επιφάνειας είναι ίση με το ήμισυ του ρυθμού μεταβολής του εμβαδού ανά μονάδα εμβαδού στο εν λόγω σημείο της επιφάνειας, όταν η επιφάνεια κινείται κάθετα στον εαυτό της με μοναδιαία ταχύτητα.

Στην πραγματικότητα θα αποδείξουμε ένα κάπως γενικότερο αποτέλεσμα: έστω ότι έχουμε μια μονο-παραμετρική οικογένεια επιφανειών με παράμετρο τον "χρόνο" $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Η επιφάνεια που αντιστοιχεί στην χρονική στιγμή t περιγράφεται από την παραμετρική παράσταση $(u, v) \mapsto \vec{r}(u, v; t)$, όπου $\vec{r} : V \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$ λεία απεικόνιση. Υποθέτουμε ότι η κίνηση γίνεται σε διεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια, δηλαδή υποθέτουμε πως σε κάθε σημείο της επιφάνειας ισχύει ότι $\vec{r'} = \frac{d\vec{r}}{dt} \perp \vec{r}_u, \vec{r}_v$. Έστω $\alpha(t)$ το εμβαδόν κατά την χρονική στιγμή t. Τότε:

Θεώρημα 1′.

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt} = 2\int_R K_m|\vec{r'}|\sqrt{EG - F^2}dudv,$$

όπου όλες οι ποσότητες στο ολοκλήρωμα αναφέρονται στην επιφάνεια στην χρονική στιγμή t.

Απόδειξη: Εξ ορισμού

$$\alpha(t) = \int |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv = \int \hat{n} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) dudv,$$

συνεπώς θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial t}[\hat{n} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)] = K_m|\vec{r'}||\vec{r}_u \times \vec{r}_v|.$$

Όμως

$$\frac{\partial}{\partial t}[\hat{n} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)] = \hat{n}' \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) + \hat{n} \cdot (\vec{r'}_u \times \vec{r}_v) + \hat{n} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r'}_v).$$

Τώρα

$$\hat{n}' \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|(\hat{n}' \cdot \hat{n}) = 0$$

διότι το $\hat{n}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα και

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|[\hat{n} \cdot (\vec{r'}_u \times \vec{r}_v)] = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot (\vec{r'}_u \times \vec{r}_v) = (\vec{r}_u \cdot \vec{r'}_u)(\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v) - (\vec{r}_v \cdot \vec{r'}_u)(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v).$$

Επειδή $\vec{r'} = |\vec{r'}|\hat{n}$, θα έχουμε

$$\vec{r'}_u = \frac{\partial|\vec{r'}|}{\partial u}\hat{n} + |\vec{r'}|\hat{n}_u,$$

έτσι ώστε

$$(\vec{r}_u \cdot \vec{r'}_u) = |\vec{r'}|(\vec{r}_u \cdot \hat{n}_u) = -L|\vec{r'}|,$$

και

$$(\vec{r}_v \cdot \vec{r'}_u) = |\vec{r'}|(\vec{r}_v \cdot \hat{n}_u) = -M|\vec{r'}|.$$

Συνεπώς

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|[\hat{n} \cdot (\vec{r'}_u \times \vec{r}_v)] = |\vec{r'}|(MF - LG),$$

και με ανάλογο τρόπο

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|[\hat{n} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r'}_v)] = |\vec{r'}|(MF - NE).$$

Μαζεύοντας όλα τα παραπάνω παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial t}[\hat{n} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)] = |\vec{r'}|\frac{2MF - LG - NE}{\sqrt{EG - F^2}} = 2K_m|\vec{r'}|\sqrt{EG - F^2}$$

χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 21.4.1(γ). □

Η σημασία του παραπάνω θεωρήματος έγκειται στην στενή του σχέση με τις *ελάχιστες επιφάνειες*. Δοθείσης μιας καμπύλης, το πρόβλημα της εύρεσης μιας επιφάνειας που να έχει ως σύνορο την δοσμένη καμπύλη αλλά να έχει ελάχιστο εμβαδό λέγεται *πρόβλημα Plateau* και οι λύσεις αυτού λέγονται ελάχιστες επιφάνειες. Παραδείγματα αποτελούν τα φιλμ σαπουνιού που εκτείνονται μεταξύ καμπυλών. Μια ελάχιστη επιφάνεια πρέπει να έχει την ιδιότητα το εμβαδόν της να είναι ακρότατο (ελάχιστο) εάν κανείς εφαρμόσει λογισμό μεταβολών πρώτης τάξης (οι μεταβολές είναι μετατοπίσεις της επιφάνειας που μηδενίζονται στο σύνορο). Το παραπάνω θεώρημα μας λέει πως ικανή και αναγκαία συνθήκη για να συμβαίνει αυτό (δηλαδή για να είναι μια επιφάνεια ελάχιστη επιφάνεια) είναι η μέση καμπυλότητα της επιφάνειας να είναι σε κάθε σημείο της μηδέν.

Μια γενικότερη κατηγορία επιφανειών που εμφανίζονται συχνά σε εφαρμογές στην φυσική, είναι αυτές που έχουν *σταθερή* (και όχι αναγκαστικά μηδενική όπως οι ελάχιστες επιφάνειες) *μέση καμπυλότητα*. Τέτοιες επιφάνειες είναι για παράδειγμα οι σαπουνόφουσκες που χωρίζουν περιοχές του χώρου με διαφορετική πίεση αλλά σε κάθε περιοχή η πίεση είναι σταθερή.

Θα κλείσουμε αυτή την παράγραφο με την εξής

Σημείωση 1: Η πρώτη και δεύτερη θεμελιώδης μορφή χαρακτηρίζουν μονοσήμαντα τις επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$ (με την ελευθερία μιας rigid motion).

Για να κάνουμε πιο εύχρηστο τον συμβολισμό, θα συμβολίζουμε τις τοπικές συντεταγμένες της επιφάνειας A με x^i, όπου $i = 1, 2$. Δηλαδή το u θα είναι το x^1 και το v θα είναι το x^2. (Το $i = 1, 2$ είναι δείκτης και όχι δύναμη). Οπότε και οι παράγωγοι των διανυσματικών συναρτήσεων θα συμβολίζονται $\vec{r}_u \mapsto \vec{r}_1$ και $\vec{r}_v \mapsto \vec{r}_2$. Ανάλογα θα αλλάξει και ο συμβολισμός των δεύτερων παραγώγων, δηλαδή $\vec{r}_{uu} \mapsto \vec{r}_{11}$, $\vec{r}_{uv} \mapsto \vec{r}_{12}$, $\vec{r}_{vu} \mapsto \vec{r}_{21}$ και $\vec{r}_{vv} \mapsto \vec{r}_{22}$.

Έστω A μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με (επιτρεπτή) παραμετρική παράσταση $\vec{r}(x^i) : V \to \mathbb{R}^3$, όπου $V \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $i = 1, 2$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\varpi : V \to M_3(\mathbb{R})$ με πεδίο ορισμού το $V \subseteq \mathbb{R}^2$ και πεδίο τιμών το σύνολο (πραγματικός διανυσματικός χώρος διάστασης 9) των 3×3 πραγματικών τετραγωνικών πινάκων που δίδεται από την σχέση $\varpi(x^i) = P(\vec{r}_1(x^i), \vec{r}_2(x^i), \hat{n}(x^i))$, όπου τα διανύσματα $\vec{r}_1(x^i)$, $\vec{r}_2(x^i)$ και $\hat{n}(x^i)$) αναπαρίστανται ως διανύσματα-στήλες (πίνακες 3×1). Ο πραγματικός 3×3 πίνακας P προκύπτει από την τοποθέτηση των 3 διανυσμάτων-στηλών με την σειρά που αναγράφονται στην παρένθεση).

Η συνάρτηση ϖ καθορίζει την επιφάνεια A *μονοσήμαντα* (με την ελευθερία μιας μετατόπισης στον χώρο $\mathbb{R}^3$). (Για την απόδειξη βλέπε [22]).

Ακόμη, η συνάρτηση ϖ ικανοποιεί τις παρακάτω γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (με μερικές παραγώγους) πρώτης τάξης

$$\frac{\partial P}{\partial x^1} = PA$$

και

$$\frac{\partial P}{\partial x^2} = PB,$$

όπου $A = C^{-1}D$, $B = C^{-1}H$, και

$$C = \begin{pmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{111} & a_{121} & -L \\ a_{211} & a_{221} & -M \\ L & M & 0 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} a_{112} & a_{122} & -M \\ a_{212} & a_{222} & -N \\ M & N & 0 \end{pmatrix},$$

ενώ $a_{ijk} := \vec{r}_i \cdot \vec{r}_{jk}$ (με $i, j, k = 1, 2$).

Με την βοήθεια των παραπάνω και την κρίσιμη παρατήρηση ότι $P^t P = C$, αποδεικνύεται ότι η επιφάνεια A καθορίζεται μονοσήμαντα από την πρώτη και την δεύτερη θεμελιώδη μορφή (με την ελευθερία μιας rigid motion στον χώρο $\mathbb{R}^3$). Για την απόδειξη βλέπε [22].

Σημείωση 3: Στη βιβλιογραφία αναφέρεται το εσωτερικό γινόμενο $d\hat{n} \cdot d\hat{n}$ ως *τρίτη θεμελιώδης μορφή*. Η αλήθεια βέβαια είναι ότι πραγματικά θεμελιώδης μορφή είναι μόνο η πρώτη (μετρική Ρήμαν). Γενικά μπορεί κανείς να αποδείξει την εξής σχέση (την γράφουμε σχηματικά):

$$(III) - 2K_m(II) + K(I) = 0,$$

όπου με (III), (II) και (I) συμβολίζουμε τις τρίτη, δεύτερη και πρώτη θεμελιώδεις μορφές αντίστροιχα, K είναι η καμπυλότητα Gauss και K_m είναι η μέση καμπυλότητα. (για την απόδειξη, βλέπε [25]).

22 Το "Theorema Egregium" του Gauss

22.1 Διατύπωση και Σχόλια

Από τον Ορισμό 21.3.3(γ) της καμπυλότητας Gauss μιας επιφάνειας του $\mathbb{R}^3$ ως το πηλίκο της ορίζουσας της δεύτερης θεμελιώδους μορφής δια την ορίζουσα της πρώτης θεμελιώδους μορφής, φαίνεται ότι η ποσότητα αυτή εξαρτάται από την πρώτη και την δεύτερη θεμελιώδη μορφή. Το 1828 ο Gauss όμως απέδειξε ότι η *καμπυλότητα* μιας επιφάνειας που φέρει τιμητικά το όνομά του, στην πραγματικότητα *εξαρτάται μόνο από την πρώτη θεμελιώδη μορφή* και άρα αποτελεί συμφυή (intrinsic) ιδιότητα της επιφάνειας. Ο ίδιος ο Gauss ήταν πολύ ευχαριστημένος με το αποτέλεσμά του αυτό και έτσι το χαρακτήρισε *Theorema Egregium*, δηλαδή *αξιόλογο θεώρημα*. Ο χαρακτηρισμός αυτός παραμένει δημοφιλής και στις μέρες μας.

Θεώρημα 1. (*"Theorema Egregium", Gauss 1828*) *Η καμπυλότητα Gauss μιας επιφάνειας εξαρτάται μόνο από την πρώτη θεμελιώδη μορφή της επιφάνειας, δηλαδή αποτελεί συμφυή (ή εσωτερική) ιδιότητα της επιφάνειας.*

Το γεγονός ότι η καμπυλότητα Gauss αποτελεί συμφυή ιδιότητα μιας επιφάνειας σημαίνει ότι εάν δύο επιφάνειες είναι τοπικά ισομετρικές, τότε η ισομετρία αυτή απεικονίζει την καμπυλότητα Gauss της μιας επιφάνειας στην καμπυλότητα Gauss της άλλης. Για παράδειγμα, η καμπυλότητα Gauss ενός λυγισμένου φύλλου χαρτιού είναι μηδέν διότι αυτό είναι ισομετρικό με το επίπεδο. Σημειώνουμε πως η καμπυλότητα Gauss ορίζεται και για επιφάνειες που δεν είναι εμφυτευμένες στον $\mathbb{R}^3$ με την χρήση μιας μετρικής Ρήμαν. Αποτελεί δε εξαιρετικά χρήσιμη ποσότητα διότι μέσω του Θεωρήματος Gauss-Bonnet, το επιφανειακό ολοκλήρωμα της καμπυλότητας Gauss δίδει ουσιαστικά την χαρακτηριστική Euler της επιφάνειας.

Λόγω της σπουδαιότητας του Αξιόλογου Θεωρήματος Gauss, θα δώσουμε δύο αποδείξεις για το θεώρημα αυτό στην παρούσα παράγραφο ενώ σε κάποιο σημείο παρακάτω, θα περιγράψουμε συνοπτικά και μια τρίτη. Επιπρόσθετα, οι μέθοδοι που θα αναπτύξουμε κατά τις αποδείξεις θα μας δώσουν την ευκαιρία για μια πρώτη επαφή με κάποιες πολύ βασικές έννοιες της σύγχρονης γεωμετρίας, όπως είναι η έννοια της *συνοχής* και της *συναλλοίωτης παραγώγου*, έννοιες που παίζουν πρωταρχικό ρόλο και στην θεωρητική φυσική (τόσο στην Γενική Θεωρία Σχετικότητας όσο και στις θεωρίες Yang-Mills).

22.2 Πρώτη Απόδειξη

Έστω A μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με (επιτρεπτή) παραμετρική παράσταση $\vec{r}(u,v) : V \to \mathbb{R}^3$, όπου $V \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό. Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο $\alpha \in A$ και έστω $T_\alpha A$ το εφαπτόμενο επίπεδο. Στην συνέχεια παίρνουμε τοπικά (σε μια μικρή περιοχή του σημείου α) μια λεία οικογένεια διανυσμάτων

$$\vec{a} = f\vec{r}_u + g\vec{r}_v,$$

όπου f και g λείες συναρτήσεις των (u,v). Η παράγωγος των διανυσμάτων αυτών $\vec{a}$ ως προς u ή ως προς v δεν αποτελούν αναγκαστικά εφαπτόμενα διανύσματα αλλά μπορεί να έχουν και κάθετη συνιστώσα (βλέπε για παράδειγμα τους ορισμούς 21.3.1 και 21.3.2). Με μια ειδική διαδικασία, που λέγεται *εφαπτομενική παράγωγος*, και την συμβολίζουμε ∇_u, ή ∇_v, ανάλογα με το εάν παραγωγίζουμε κατά την διεύθυνση της u συντεταγμένης ή της v συντεταγμένης, *απορρίπτουμε την κάθετη συνιστώσα οπότε το διάνυσμα που προκύπτει θα είναι εξ ορισμού εφαπτομενικό.* Αναλυτικότερα, ορίζουμε αυτή την εφαπτομενική παράγωγο ως εξής:

$$\nabla_u \vec{a} = \vec{a}_u - (\hat{n} \cdot \vec{a}_u)\hat{n} = \vec{a}_u + (\hat{n}_u \cdot \vec{a})\hat{n},$$

όπου κατά τα γνωστά $\vec{a}_u = \partial\vec{a}/\partial u$. Η δεύτερη ισότητα προκύπτει διότι τα $\vec{a}$ και $\hat{n}$ είναι κάθετα.

Αυτό που είναι σημαντικό να παρατηρήσει κάποιος είναι ότι αυτή η εφαπτομενική παραγώγηση εξαρτάται μόνο από τα E, F, G και τις παραγώγους τους, διότι παίρνουμε ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της επιφάνειας όπως το $\vec{r}_u$, το παραγωγίζουμε και παίρνουμε το $\vec{r}_{uu}$, και παίρνουμε την προβολή του τελευταίου στο εφαπτόμενο επίπεδο, που σημαίνει ότι παίρνουμε εσωτερικά γινόμενα όπως το $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_{uu} = \frac{1}{2}(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u) = \frac{1}{2}E_u$.

Στη συνέχεια παίρνουμε και πάλι την εφαπτομενική παράγωγο του διανύσματος $\nabla_u \vec{a}$ ως προς v:

$$\nabla_v \nabla_u \vec{a} = \vec{a}_{vu} - (\hat{n} \cdot \vec{a}_{vu})\hat{n} + \nabla_v[(\hat{n}_u \cdot \vec{a})\hat{n}].$$

Όμως αφού παίρνουμε μόνο την εφαπτομενική συνιστώσα, μπορούμε να ξεχάσουμε την παραγώγηση του συντελεστή μπροστά από το διάνυσμα $\hat{n}$. Επιπλέον, αφού το $\hat{n}$ είναι μοναδιαίο, το $\hat{n}_v$ είναι ήδη εφαπτομενικό διάνυσμα, οπότε παίρνουμε:

$$\nabla_v \nabla_u \vec{a} = \vec{a}_{vu} - (\hat{n} \cdot \vec{a}_{vu})\hat{n} + (\hat{n}_u \cdot \vec{a})\hat{n}_v.$$

Εναλλάσσοντας τους ρόλους των u και v και χρησιμοποιώντας την συμμετρία της δεύτερης παραγώγου $\vec{a}_{uv} = \vec{a}_{vu}$, παίρνουμε

$$\nabla_v \nabla_u \vec{a} - \nabla_u \nabla_v \vec{a} = (\hat{n}_u \cdot \vec{a})\hat{n}_v - (\hat{n}_v \cdot \vec{a})\hat{n}_u = (\hat{n}_u \times \hat{n}_v) \times \vec{a}.$$

Όμως τώρα

$$\hat{n}_u \times \hat{n}_v = \lambda \hat{n},$$

για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$, συνεπώς βλέπουμε ότι *η δράση του τελεστή* $\nabla_v \nabla_u - \nabla_u \nabla_v$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{a}$, έχει ως αποτέλεσμα την περιστροφή του διανύσματος $\vec{a}$ κατά γωνία $\pi/2$ στο εφαπτόμενο επίπεδο και το πολλαπλασιάζει βαθμωτά με κάποιο πραγματικό συντελεστή λ, όπου όμως ο συντελεστής αυτός λ είναι *συμφυής (εσωτερική) ποσότητα* της επιφάνειας.

Από την σχέση

$$\hat{n}_u \times \hat{n}_v = \lambda \hat{n},$$

παίρνουμε

$$\lambda \hat{n} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = (\hat{n}_u \times \hat{n}_v) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = (\hat{n}_u \cdot \vec{r}_u)(\hat{n}_v \cdot \vec{r}_v) - (\hat{n}_u \cdot \vec{r}_v)(\hat{n}_v \cdot \vec{r}_u) = LN - M^2.$$

Όμως επίσης

$$\hat{n} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = \sqrt{EG - F^2},$$

που δίδει ότι

$$\lambda = \frac{LN - M^2}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Έπεται λοιπόν ότι η ποσότητα $LN - M^2$, και άρα και η καμπυλότητα Gauss K, εξαρτάται μόνο από την πρώτη θεμελιώδη μορφή. $\square$

Σημείωση 1: Η παραπάνω απόδειξη, δεν μας έδειξε μόνο ότι η καμπυλότητα Gauss εξαρτάται μόνο από την πρώτη θεμελιώδη μορφή αλλά και ότι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή ουσιαστικά δεν είναι θεμελιώδης μιας και εξαρτάται και αυτή από την πρώτη θεμελιώδη μορφή, δηλαδή από τις ποσότητες E, F, G και τις παραγώγους αυτών. *Δηλαδή πραγματικά θεμελιώδης μορφή μιας επιφάνειας είναι μόνο η πρώτη (που είναι η μετρική Ρήμαν).* Ο όρος δεύτερη θεμελιώδης μορφή χρησιμοποιείται για ιστορικούς και μόνο λόγους. Σε κάποια παλαιότερα συγγράμματα (σαν το [25]), χρησιμοποιείται ο όρος τρίτη θεμελιώδης μορφή για τις παραγώγους $\hat{n}_u$ και $\hat{n}_u$ του θετικού μοναδιαίου κάθετου διανύσματος $\hat{n}$. Προφανώς και δεν είναι θεμελιώδης ούτε αυτή.

Σημείωση 2: Αυτό που αποκαλέσαμε εφαπτομενική παράγωγο κατά την απόδειξη παραπάνω, αποτελεί ουσιαστικά την λεγόμενη *συναλλοίωτη παράγωγο* που χρησιμοποιείται τόσο στην Ρημάνεια Γεωμετρία (και στην Γενική Θεωρία Σχετικότητας της φυσικής) αλλά και στην γενικότερη θεωρία των συνοχών πάνω σε μια διανυσματική (ή πρωτεύουσα) νηματική δέσμη (που έχει βαθειά εφαρμογή στις θεωρίες Yang-Mills, στην θεωρία υπερχορδών και στην M-Θεωρία της θεωρητικής φυσικής).

22.3 Δεύτερη Απόδειξη

Αυτή η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε τώρα για το Theorema Egregium του Gauss, θα την χαρακτηρίζαμε πιο "κλασική".

Έστω A μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με (επιτρεπτή) παραμετρική παράσταση $\vec{r}(x^i) : V \to \mathbb{R}^3$, όπου $V \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $i = 1, 2$. (Για ευκολία, θα συμβολίζουμε και πάλι τις τοπικές συντεταγμένες της επιφάνειας A με x^i, όπου $i = 1, 2$, δηλαδή το u θα είναι το x^1 και το v θα είναι το x^2). Σε κάθε σημείο της επιφάνειας επιλέγουμε μια ορθοκανονική βάση $\{\hat{e}_1(x^i), \hat{e}_2(x^i)\}$ του αντίστοιχου εφαπτόμενου επιπέδου στο εν λόγω σημείο, με τέτοιο τρόπο ώστε τα διανύσματα $\hat{e}_1, \hat{e}_2 : V \to \mathbb{R}^3$ να είναι λείες συναρτήσεις.

Ένας τρόπος για να επιλέξουμε τα $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ είναι να εφαρμόσουμε την μέθοδο ορθογωνιοποίησης Gram-Schmidt στην γνωστή βάση $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$ του εφαπτόμενου επιπέδου. Τότε η τριάδα των διανυσμάτων $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{n}\}$ αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$. Μπορούμε συνεπώς να εκφράσουμε τις μερικές παραγώγους αυτών ως προς αυτή την βάση ως εξής:

$$\hat{e}_{1,1} = a_1\hat{e}_2 + b_1\hat{n},$$

$$\hat{e}_{1,2} = a_2\hat{e}_2 + b_2\hat{n},$$

$$\hat{e}_{2,1} = -a_1\hat{e}_1 + c_1\hat{n},$$

$$\hat{e}_{2,2} = -a_2\hat{e}_1 + c_2\hat{n},$$

όπου οι συντελεστές a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 είναι πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το V και χρησιμοποιήσαμε τον συμβολισμό

$$\hat{e}_{i,j} := \frac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^j},$$

με $i, j = 1, 2$.

Ο αναγνώστης που βρίσκεται σε εγρήγορση θα έχει παρατηρήσει πως κάποια διανύσματα δεν εμφανίζονται στις παραπάνω εκφράσεις, εν γένει, το διάνυσμα $\hat{e}_{i,j}$ θα πρέπει να είναι γραμμικός συνδυασμός και των τριών διανυσμάτων της βάσης $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{n}\}$ του $\mathbb{R}^3$ που χρησιμοποιούμε. Για τις παραπάνω εκφράσεις, λάβαμε υπόψιν μας τις εξής, εύκολες να αποδειχθούν, ταυτότητες:

$$\hat{e}_{i,j} \cdot \hat{e}_i = 0$$

διότι το $\hat{e}_i$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα, και

$$\hat{e}_{1,j} \cdot \hat{e}_2 = -\hat{e}_{2,j} \cdot \hat{e}_1,$$

η οποία προκύπτει από την σχέση $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0$. Το κρίσιμο σημείο στην απόδειξη του θεωρήματος είναι το παρακάτω Λήμμα:

Λήμμα 1. Ισχύουν οι σχέσεις

$$\hat{e}_{1,1} \cdot \hat{e}_{2,2} - \hat{e}_{1,2} \cdot \hat{e}_{2,1} = b_1 c_2 - b_2 c_1 = a_{1,2} - a_{2,1} = \frac{LN - M^2}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Απόδειξη Λήμματος: Η πρώτη ισότητα είναι προφανής από τους ορισμούς. Για την δεύτερη έχουμε

$$a_{1,2} - a_{2,1} = \frac{\partial}{\partial u}(\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_{2,2}) - \frac{\partial}{\partial v}(\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_{2,1}) =$$

$$= (\hat{e}_{1,1} \cdot \hat{e}_{2,2}) + (\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_{2,21}) - (\hat{e}_{1,2} \cdot \hat{e}_{2,1}) - (\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_{2,12}) =$$

$$= (\hat{e}_{1,1} \cdot \hat{e}_{2,2}) - (\hat{e}_{1,2} \cdot \hat{e}_{2,1}).$$

Για να πάρουμε την τρίτη ισότητα, θυμίζουμε ότι κατά την απόδειξη του θεωρήματος 21.4.2 αποδείξαμε ότι

$$(\hat{n}_u \times \hat{n}_v) \cdot \hat{n} = (\hat{n}_1 \times \hat{n}_2) \cdot \hat{n} = \frac{LN - M^2}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Όμως $\hat{n} = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2$, οπότε

$$(\hat{n}_1 \times \hat{n}_2) \cdot \hat{n} = (\hat{n}_1 \times \hat{n}_2) \cdot (\hat{e}_1 \times \hat{e}_2) =$$

$$= (\hat{n}_1 \cdot \hat{e}_1)(\hat{n}_2 \cdot \hat{e}_2) - (\hat{n}_1 \cdot \hat{e}_2)(\hat{n}_2 \cdot \hat{e}_1) =$$

$$= (\hat{n} \cdot \hat{e}_{1,1})(\hat{n} \cdot \hat{e}_{2,2}) - (\hat{n} \cdot \hat{e}_{2,1})(\hat{n} \cdot \hat{e}_{1,2}) = b_1 c_2 - b_2 c_1.$$

□

Για να πάρουμε από το Λήμμα ότι η καμπυλότητα Gauss $K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$ μπορεί να εκφρασθεί μόνο σαν συνάρτηση των E, F και G, αρκεί να δείξουμε πως με κατάλληλη επιλογή της βάσης $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$, οι ποσότητες a_1 και a_2 μπορούν να εκφρασθούν σαν συνάρτηση των E, F και G. Ας κατασκευάσουμε την βάση $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$, από την αρχική βάση $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$, χρησιμοποιώντας την μέθοδο ορθογωνιοποίησης Gram-Schmidt. Τότε

$$\hat{e}_1 = k\vec{r}_1$$

και

$$\hat{e}_2 = l\vec{r}_1 + m\vec{r}_2,$$

όπου τα k, l, m εκφράζονται ως συναρτήσεις των E, F και G. Στην πραγματικότητα, $k = \frac{1}{\sqrt{E}}$, $l = -\frac{F}{\sqrt{E(EG-F^2)}}$, και $m = \sqrt{\frac{E}{EG-F^2}}$. Έτσι,

$$a_1 = (\hat{e}_{1,1} \cdot \hat{e}_2) = k(\vec{r}_{11} \cdot \hat{e}_2) + k_1(\vec{r}_1 \cdot \hat{e}_2) =$$

$$= kl(\vec{r}_{11} \cdot \vec{r}_1) + km(\vec{r}_{11} \cdot \vec{r}_2) =$$

$$= \frac{1}{2}klE_1 + km[F_1 - (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_{21})] = \frac{1}{2}klE_1 + km(F_1 - \frac{1}{2}E_2).$$

Ανάλογα, υπολογίζουμε

$$a_2 = (\hat{e}_{1,2} \cdot \hat{e}_2) = k(\vec{r}_{12} \cdot \hat{e}_2) + k_2(\vec{r}_1 \cdot \hat{e}_2) =$$

$$= kl(\vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_1) + km(\vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_2) =$$

$$= \frac{1}{2}klE_2 + \frac{1}{2}kmG_1.$$

□

Σχόλιο 1. Οι παραπάνω εξισώσεις είναι πιο εύχρηστες όταν οι συντεταγμένες καμπύλες της επιφάνειας είναι ορθογώνιες (βλέπε Ορισμό 20.7.3). Σύμφωνα με την Πρόταση 20.7.3 αυτό συμβαίνει όταν $F = 0$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $k = \frac{1}{\sqrt{E}}$, $l = 0$ και $m = \frac{1}{\sqrt{G}}$, οπότε

$$a_1 = \frac{1}{2}\frac{E_2}{\sqrt{EG}}$$

και

$$a_2 = \frac{1}{2}\frac{G_1}{\sqrt{EG}}.$$

Αν τις αντικαταστήσουμε στον τύπο

$$\frac{(a_{1,2} - a_{2,1})}{\sqrt{EG}}$$

που δίδει την καμπυλότητα Gauss, θα πάρουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2. Εάν $F = 0$, τότε η καμπυλότητα Gauss δίδεται από την σχέση

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}[\frac{\partial}{\partial u}(\frac{G_1}{\sqrt{EG}}) + \frac{\partial}{\partial v}(\frac{E_2}{\sqrt{EG}})].$$

23 Το Θεώρημα "Gauss-Bonnet"

23.1 Γενικά

Το πιο σημαντικό και το πιο όμορφο Θεώρημα της θεωρίας επιφανειών είναι το *Θεώρημα Gauss-Bonnet* που δηλώνει ότι μπορούμε να καθορίσουμε την τοπολογία μιας επιφάνειας μέσω της καμπυλότητας Gauss. Πιο συγκεκριμένα, το θεώρημα αυτό μας λέει πως το επιφανειακό ολοκλήρωμα της καμπυλότητας Gauss (τοπική ποσότητα) είναι ίσο με την χαρακτηριστική Euler (ολική ή τοπολογική ποσότητα) της επιφάνειας. Η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε για την απόδειξη του θεωρήματος σε πλήρη γενικότητα είναι να θεωρήσουμε αρχικά μια τοπολογική υποδιαίρεση (ή και μια τριγωνοποίηση) της επιφάνειας και θα αθροίσουμε τα επι μέρους επιφανειακά ολοκληρώματα της συνάρτησης της καμπυλότητας. Θα παρατηρήσουμε πως οι όροι στο σύνορο απαιτούν την χρήση και της γεωδαισιακής καμπυλότητας.

Η πραγματική αξία και η ισχύς αυτού του θεωρήματος φαίνεται μόνο εν μέρει στην συγκεκριμένη περίπτωση. Στην πραγματικότητα το θεώρημα Gauss-Bonnet αποτελεί το πρωτότυπο για μια ολόκληρη κλάση θεωρημάτων που λέγονται *Θεωρήματα Δείκτη* (όπως για παράδειγμα τα θεωρήματα Atiyah-Singer και Riemann-Roch-Grothendieck), τα οποία εφαρμόζονται σε περιπτώσεις πολλαπλοτήτων (αλλά και γενικότερων μαθηματικών χώρων) μεγαλύτερης διάστασης και που συσχετίζουν τοπικές και ολικές ιδιότητες.

23.2 Απλή Μορφή του Θεωρήματος

Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη μας με την πιο απλή έκδοση του θεωρήματος Gauss-Bonnet που είναι η ακόλουθη:

Θεώρημα 1. Έστω X μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με (επιτρεπτή) παραμετρική παράσταση $\vec{r}: V \to \mathbb{R}^3$, όπου $V \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $\vec{\gamma}(s)$ μια λεία, απλή κλειστή καμπύλη (με φυσική παράμετρο) πάνω στην επιφάνεια A που περικλείει μια περιοχή R της επιφάνειας. Τότε

$$\int_\gamma k_g ds = 2\pi - \int_R K dA,$$

όπου k_g η γεωδαισιακή καμπυλότητα της καμπύλης γ, ds το στοιχειώδες μήκος της καμπύλης γ, K η καμπυλότητα Gauss της επιφάνειας X και dA το στοιχειώδες εμβαδό της επιφάνειας X. (Υποθέτουμε επίσης πως η φορά διαγραφής της καμπύλης γίνεται αντίθετα από την φορά των δεικτών του ρολογιού).

Λόγω της σπουδαιότητας του Θεωρήματος αλλά και επειδή θα μας είναι χρήσιμες οι τεχνικές που θα αναπτύξουμε κατά την απόδειξη και σε άλλα σημεία παρακάτω, θα παραθέσουμε δύο αποδείξεις του θεωρήματος.

Απόδειξη Α: Υπενθυμίζουμε το θεώρημα Stokes στον $\mathbb{R}^3$:

$$\int_C \vec{a}\cdot d\vec{s} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{a})\cdot d\vec{S},$$

όπου $\vec{a}$ διανυσματική συνάρτηση και S επιφάνεια με σύνορο την καμπύλη C. Εάν θεωρήσουμε καρτεσιανές συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^3$ και περιοριστούμε στο Oxy επίπεδο, τότε έστω $\vec{a} = (P, Q, 0)$ οι συνιστώσες της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{a}$. Το θεώρημα Stokes ανάγεται στο θεώρημα Green:

$$\int_\gamma (P\dot{u} + Q\dot{v})ds = \int_R (Q_u - P_v)dudv.$$

Επιλέγουμε ένα εφαπτομενικό μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο, έστω για παράδειγμα $\hat{e} = \vec{r}_u/\sqrt{E}$. Τότε τα μοναδιαία διανύσματα $\{\hat{e}, \hat{n}\times\hat{e}\}$ αποτελούν μια ορθοκανονική βάση για κάθε εφαπτόμενο επίπεδο. Αφού το $\hat{e}$ είναι μοναδιαίο, τότε το διάνυσμα $\nabla_u\hat{e}$ είναι εφαπτομενικό και ορθογώνιο με το $\hat{e}$, συνεπώς υπάρχουν συναρτήσεις P και Q τέτοιες ώστε

$$\nabla_u\hat{e} = P\hat{n}\times\hat{e}$$

και

$$\nabla_v\hat{e} = Q\hat{n}\times\hat{e}.$$

Στο θεώρημα Green, θέτουμε $\vec{a} = (P, Q, 0)$, οπότε το αριστερό μέλος στον τύπο του Green γίνεται

$$\int_\gamma (\dot{u}\nabla_u\hat{e} + \dot{v}\nabla_v\hat{e})\cdot(\hat{n}\times\hat{e}) = \int_\gamma \dot{\hat{e}}\cdot(\hat{n}\times\hat{e}).$$

Έστω $\vec{t}$ το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης $\vec{\gamma}(s)$, το οποίο το γράφουμε ως προς την ορθοκανονική βάση $\{\hat{e}, \hat{n}\times\hat{e}\}$ ως εξής:

$$\vec{t} = \cos\theta\hat{e} + \sin\theta\hat{n}\times\hat{e}.$$

Έτσι,

$$\dot{\vec{t}}\cdot(\hat{n}\times\hat{e}) = \cos\theta\dot{\hat{e}}\cdot(\hat{n}\times\hat{e}) + \cos\theta\dot{\theta}.$$

Η γεωδαισιακή καμπυλότητα της καμπύλης γ ορίζεται ως γνωστόν από τη σχέση

$$k_g = \vec{\dot{t}} \cdot (\hat{n} \times \vec{t}),$$

(βλέπε παράγραφο 21.3), οπότε

$$\vec{\dot{t}} = \alpha\hat{n} + k_g\hat{n} \times \vec{t} = \alpha\hat{n} + k_g(\cos\theta\hat{n} \times \hat{e} - \sin\theta\hat{e}),$$

και συνεπώς

$$k_g = \dot{\hat{e}} \cdot (\hat{n} \times \hat{e}) + \dot{\theta}.$$

Μπορούμε συνεπώς να γράψουμε την σχέση

$$\int_\gamma (\dot{u}\nabla_u\hat{e} + \dot{v}\nabla_v\hat{e}) \cdot (\hat{n} \times \hat{e}) = \int_\gamma \dot{\hat{e}} \cdot (\hat{n} \times \hat{e})$$

ως

$$\int_\gamma (k_g - \dot{\theta})ds = \int_\gamma k_g ds - 2\pi.$$

Για να υπολογίσουμε τώρα το δεξί μέλος του τύπου Green

$$\int_\gamma (P\dot{u} + Q\dot{v})ds = \int_R (Q_u - P_v)dudv,$$

παρατηρούμε ότι

$$\nabla_v\nabla_u\hat{e} = \nabla_v(P\hat{n} \times \hat{e}) = P_v\hat{n} \times \hat{e} + P\hat{n} \times \nabla_v\hat{e} = P_v\hat{n} \times \hat{e} + PQ\hat{n} \times (\hat{n} \times \hat{e}),$$

αφού το διάνυσμα $\hat{n}_v \times \hat{e}$ είναι κάθετο. Εναλλάσσοντας τις θέσεις των παραγώγων ως προς u και v και αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$(\nabla_v\nabla_u - \nabla_u\nabla_v)\hat{e} = (P_v - Q_u)\hat{n} \times \hat{e},$$

παράσταση η οποία από την πρώτη απόδειξη του Θεωρήματος 22.1.1 (βλέπε τέλος της παραγράφου 22.2), είναι ίση με $K\sqrt{EG - F^2}$. Εάν εφαρμόσουμε το θεώρημα Green και θέσουμε $dA = \sqrt{EG - F^2}dudv$, παίρνουμε το ζητούμενο. □

Απόδειξη Β: Ξεκινάμε από το Θεώρημα Green που λέει ότι εάν P, Q : $V \to \mathbb{R}$ είναι δύο λείες συναρτήσεις όπου $V \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, γ είναι μια κατά τμήματα λεία απλή κλειστή γραμμή στο V η οποία αποτελεί το σύνορο μιας περιοχής S, τότε

$$\int_\gamma (Pdu + Qdv) = \int_S (Q_u - P_v)dudv.$$

Επιλέγουμε λεία εφαπτομενικά διανυσματικά πεδία $\hat{e}_1, \hat{e}_2 : V \to \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε να αποτελούν ορθοκανονική βάση για το εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε σημείο της επιφάνειας (βλέπε παράγραφο 22.3). Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Green στο ολοκλήρωμα

$$I = \int_\beta \hat{e}_1 \cdot \dot{\hat{e}}_2 ds,$$

όπου β είναι η καμπύλη στο V για την οποία ισχύει $\gamma = \vec{r} \circ \beta$ (υποθέτουμε ότι η γ παραμετροποιείται με τη χρήση του μήκους τόξου). Τότε

$$\dot{\hat{e}}_2 = \dot{u}\hat{e}_{2,1} + \dot{v}\hat{e}_{2,2},$$

όπου χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό της παραγράφου 22.3, οπότε

$$P = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_{2,1},$$

$$Q = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_{2,2},$$

και

$$Q_u - P_v = \hat{e}_{1,1} \cdot \hat{e}_{2,2} - \hat{e}_{1,2} \cdot \hat{e}_{2,1},$$

ποσότητα η οποία από το Λήμμα 22.3.1 είναι ίση με

$$\frac{LN - M^2}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Συνεπώς

$$I = \int_R K dA.$$

Έστω τώρα $\theta(s)$ η γωνία που σχηματίζει το εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{t}(s)$ της καμπύλης γ με το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{e}_1$, οπότε $\vec{t} = \hat{e}_1 \cos\theta + \hat{e}_2 \sin\theta$. Έστω $\hat{\eta} = \hat{n} \times \vec{t}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στο εφαπτόμενο επίπεδο που είναι κάθετο στο $\vec{t}$. Τότε

$$\hat{\eta} = -\hat{e}_1 \sin\theta + \hat{e}_2 \cos\theta$$

και

$$\dot{\vec{t}} = \dot{\theta}\hat{\eta} + \dot{\hat{e}}_1 \cos\theta + \dot{\hat{e}}_2 \sin\theta.$$

Η γεωδαισιακή καμπυλότητα δίδεται συνεπώς από την σχέση

$$k_g = \hat{\eta} \cdot \dot{\vec{t}} = \dot{\theta} - \hat{e}_1 \cdot \dot{\hat{e}}_2.$$

Έτσι $I = \int (\dot{\theta} - k_g) ds$, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος διότι $\int \dot{\theta} = 2\pi$. $\square$

Εάν η καμπύλη γ είναι μόνο *κατά τμήματα λεία*, (λόγου χάριν η περιοχή R της επιφάνειας είναι ένα καμπυλόγραμμο πολύγωνο), τότε η γωνία θ *πηδά* κατά μια εξωτερική γωνία, έστω δ_i σε κάθε κορυφή i του πολυγώνου, έτσι ώστε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\dot{\theta}$ που σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα είναι ίσο με 2π, θα αντικατασταθεί από την ποσότητα

$$\int_\gamma \dot{\theta} ds = 2\pi - \sum_i \delta_i = \sum_i \alpha_i - (n-2)\pi,$$

όπου $\alpha_i = \pi - \delta_i$ είναι οι εσωτερικές γωνίες του πολυγώνου. Τότε το θεώρημα Gauss-Bonnet δίδει:

Θεώρημα 2. Εάν γ είναι το σύνορο ενός λείου καμπυλόγραμμου πολυγώνου με n πλευρές και εσωτερικές γωνίες α_i, με $i = 1, ..., n$, πάνω σε μια λεία επιφάνεια, τότε

$$\sum_i^n \alpha_i = (n-2)\pi + \int_R K dA + \int_\gamma k_g ds$$

Σχόλιο 1: Υπενθυμίζουμε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός επίπεδου n-γωνου είναι $(n-2)\pi$.

Παραδείγματα:

1. Στο επίπεδο, $K = 0$ ενώ η γεωδαισιακή καμπυλότητα k_g μιας καμπύλης ταυτίζεται με την καμπυλότητα της καμπύλης $d\Psi/ds$, (όπου Ψ η κλίση του εφαπτόμενου διανύσματος της καμπύλης), οπότε το Θεώρημα 1 μας δίδει το προφανές αποτέλεσμα για μια κλειστή καμπύλη γ του επιπέδου

$$\int_\gamma \frac{d\Psi}{ds} = 2\pi.$$

2. Στην μοναδιαία σφαίρα, $K = 1$, οπότε το ολοκλήρωμα $\int_R K dA$ εκφράζει απλά το εμβαδό του χωρίου R. Εάν γ είναι ο ισημερινός, τότε $k_g = 0$ και το Θεώρημα 1 μας δίδει ότι το εμβαδό του βορείου ημισφαιρίου είναι 2π. (Εάν αλλάξουμε την φορά διαγραφής της καμπύλης γ, η γεωδαισιακή καμπυλότητα αλλάζει πρόσημο).

3. Από το Θεώρημα 2 προκύπτει ότι το άθροισμα των γωνιών ενός καμπυλόγραμμου τριγώνου είναι ίσο με

$$\pi + \int_R K dA + \int_\gamma k_g ds.$$

4. Στο επίπεδο, $K = 0$ ενώ οι ευθείες έχουν σταθερό μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα οπότε έχουν $k_g = 0$. Συνεπώς ο τύπος για το άθροισμα των γωνιών τριγώνου του παραδείγματος 3 δίδει ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου στο επίπεδο είναι π.

5. Ένας μέγιστος κύκλος στην μοναδιαία σφαίρα εχεί επίσης $k_g = 0$, για παράδειγμα εάν $\vec{\gamma}(s) = (\cos s, \sin s, 0)$, τότε $\vec{t} = (-\sin s, \cos s, 0)$ και $\vec{t} = -(\cos s, \sin s, 0)$, διάνυσμα που είναι κάθετο στην επιφάνεια της σφαίρας. Επειδή στην σφαίρα ισχύει ότι $K = 1$, τότε από τον τύπο του παραδείγματος 3 για το άθροισμα των γωνιών ενός καμπυλόγραμμου τριγώνου, προκύπτει ότι το άθροισμα των γωνιών ενός *σφαιρικού τριγώνου* υπερβαίνουν το π κατά ποσότητα ίση με το εμβαδόν του τριγώνου.

23.3 Γενικότερες Μορφές του Θεωρήματος

Η πιο χρήσιμη έκδοση του Θεωρήματος Gauss-Bonnet είναι η ακόλουθη:

Θεώρημα 1. Εάν η X είναι μια λεία, προσανατολίσιμη και κλειστή (δηλαδή συμπαγής) επιφάνεια εφοδιασμένη με μια μετρική Ρήμαν, τότε

$$\int_X K dA = 2\pi\chi(X).$$

Απόδειξη: Θεωρούμε μια τοπολογική υποδιαίρεση (βλέπε παράγραφο 17) στην επιφάνεια X έτσι ώστε αυτή να διαιρείται, μέσω λείων καμπυλών, σε καμπυλόγραμμα πολύγωνα. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 23.2.2 σε κάθε καμπυλόγραμμο πολύγωνο και αθροίζουμε τις εξισώσεις που προκύπτουν κατά μέλη. Το άθροισμα όλων των γωνιών όλων των πολυγώνων είναι ίσο με $2\pi V$, όπου V ο αριθμός των κορυφών της τοπολογικής υποδιαίρεσης που επιλέξαμε, διότι το άθροισμα των γωνιών που σχηματίζονται σε κάθε κορυφή είναι 2π.

Επειδή κάθε πλευρά (ακμή) ανήκει σε δύο πολύγωνα, το άθροισμα των συνεισφορών $(n-2)\pi$ θα είναι $2\pi(E - F)$, όπου E και F είναι το πλήθος των ακμών και των εδρών αντίστοιχα της τοπολογικής υποδιαίρεσης.

Το άθροισμα των συνεισφορών των όρων που περιέχουν την γεωδαισιακή καμπυλότητα είναι μηδέν διότι κάθε ακμή προσμετράται δύο φορές και η γεωδαισιακή καμπυλότητα k_g αλλάζει πρόσημο εάν αλλάξει η φορά διαγραφής της καμπύλης, οπότε η συνεισφορά αναιρείται (βλέπε και παρατήρηση παρακάτω). Επειδή τώρα $\chi(X) = V - E + F$ είναι η χαρακτηριστική Euler της επιφάνειας

X, έπεται το ζητούμενο. $\square$

Παρατηρήσεις:

(1). Στο Πόρισμα 21.4.1 αποδείξαμε το ίδιο αποτέλεσμα για μια κυρτή επιφάνεια χρησιμοποιώντας ένα πιο προφανές επιχείρημα.

(2). Δεχόμαστε χωρίς απόδειξη ότι κάθε λεία επιφάνεια επιδέχεται μια τοπολογική υποδιαίρεση.

(3). Η παραπάνω απόδειξη αφορά μόνο *προσανατολίσιμες* επιφάνειες και αυτό γιατί εάν η επιφάνεια δεν είναι προσανατολίσιμη, τότε οι συνεισφορές στο άθροισμα από τους όρους $\int k_g ds$ *δεν συμβαίνουν κατά αντίθετα ζεύγη* ώστε τελικά η συνεισφορά τους συνολικά να είναι μηδέν. *Το Θεώρημα Gauss-Bonnet όμως ισχύει και για μη-προσανατολίσιμες επιφάνειες, δηλαδή ισχύει σε πλήρη γενικότητα για κάθε συμπαγή λεία επιφάνεια,* όπως μπορεί κανείς να δει εάν επιλέξουμε μια τοπολογική υποδιαίρεση με την ιδιότητα οι ακμές να είναι τμήματα γεωδαισιακών (βλέπε [22]).

(4). Σημειώνουμε πως στην περίπτωση που η επιφάνεια είναι εμφυτευμένη στον $\mathbb{R}^3$, χρησιμοποιούμε την πρώτη θεμελιώδη μορφή για τον υπολογισμό της καμπυλότητας Gauss που εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα. Στην περίπτωση που έχουμε μια γενικευμένη επιφάνεια, δηλαδή επιφάνεια που δεν μπορεί να εμφυτευθεί στον $\mathbb{R}^3$, όπως για παράδειγμα η φιάλη Klein, η επιφάνεια Boy ή η δέσμη Möbius, τότε το θεώρημα Gauss-Bonnet ισχύει και πάλι αλλά για τον υπολογισμό της καμπυλότητας Gauss θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια μετρική Ρήμαν (θα δούμε πώς γίνεται αυτό σε σχετική παράγραφο παρακάτω). Το Θεώρημα Gauss-Bonnet είναι πραγματικά εκπληκτικό θεώρημα!

(5). Η σημασία του Θεωρήματος Gauss-Bonnet είναι μεγάλη: πρώτα-πρώτα διότι συνδέει ολικές ιδιότητες με τοπικές ιδιότητες μιας επιφάνειας. Από την μία πλευρά της σχέσης έχουμε την χαρακτηριστική Euler της επιφάνειας που είναι η σημαντικότερη τοπολογική (ολική) ιδιότητα αυτής. Από την άλλη πλευρά της σχέσης έχουμε την καμπυλότητα Gauss της επιφάνειας που είναι μια τοπική ιδιότητα και που είναι σχετικά εύκολο να υπολογισθεί. Στην πράξη το Θεώρημα Gauss-Bonnet χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της χαρακτηριστικής Euler μιας επιφάνειας διότι ο υπολογισμός αυτής με την χρήση τοπολογικών υποδιαιρέσεων είναι συνήθως δύσκολος.

23.4 Ροές Διανυσματικών Πεδίων

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε έναν άλλο τρόπο υπολογισμού της χαρακτηριστικής Euler μιας επιφάνειας.

Έστω ότι σε μια λεία, κλειστή (συμπαγή) επιφάνεια X του $\mathbb{R}^3$, δίδεται ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $\xi_x \in T_xX$ σε κάθε σημείο $x \in X$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το ξ_x είναι το διάνυσμα της ταχύτητας στο σημείο x, ενός ρευστού που ρέει πάνω στην επιφάνεια. Τα σημεία στα οποία το διάνυσμα ξ_x μηδενίζεται λέγονται *στατικά σημεία* (stationary points) της ροής. Είναι γνωστό για παράδειγμα πως στη σφαίρα, κάθε ροή έχει τουλάχιστον 1 στατικό σημείο. Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε το εξής Θεώρημα:

Θεώρημα 1. Εάν μια ροή ξ ενός διανυσματικού πεδίου πάνω στην επιφάνεια X έχει πεπερασμένο πλήθος στατικών σημείων, τότε το πλήθος των στατικών σημείων, εάν προσμετρηθούν με κατάλληλες προσημασμένες πολλαπλότητες (multiplicities), είναι ίσο με την χαρακτηριστική Euler της επιφάνειας.

Πριν περάσουμε στην απόδειξη, πρέπει να δούμε πως ορίζεται η προσημασμένη πολλαπλότητα ενός στατικού σημείου. Έστω ότι το $x \in X$ αποτελεί ένα στατικό σημείο του διανυσματικού πεδίου ξ. Τότε μπορούμε να βρούμε μια μικρή γειτονιά $U \subset X$ του x τέτοια ώστε $\xi_y \neq 0$, $\forall y \in U - \{x\}$. Τώρα έστω η ένα άλλο λείο διανυσματικό πεδίο που ορίζεται στην U και που είναι παντού (εντός του U) μη-μηδενικό. (Για παράδειγμα σκεφτείτε το η ως ένα διανυσματικό πεδίο που δίδει μια διεύθυνση αναφοράς, ας πούμε $\eta = \vec{r}_u$, εάν η επιφάνεια X έχει την γνωστή παραμέτρηση). Έστω γ μια μικρή απλή κλειστή καμπύλη εντός του U η οποία περικλείει το x με φορά αντίθετη από αυτή των δεικτών του ρολογιού. Τότε τα ξ και η θα είναι και τα δύο μη-μηδενικά πάνω στην καμπύλη γ και ορίζουμε την πολλαπλότητα (multiplicity) του σημείου x ως τον αριθμό στροφής του ξ ως προς το η καθώς η καμπύλη γ διαγράφεται μια φορά, δηλαδή
πολλαπλότητα

$$= \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{d\psi}{ds} ds,$$

όπου $\psi(s)$ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\xi(s)$ και $\eta(s)$ στο σημείο $\gamma(s)$. Σημειώνουμε εδώ πως αν και η γωνία ψ ορίζεται με μια απροσδιοριστία σε ακέραια πολλαπλάσια του 2π, η παράγωγός της $d\psi/ds$ είναι καλά ορισμένη. Αποδεικνύεται πως η πολλαπλότητα ενός στατικού σημείου δεν εξαρτάται από την εκλογή του βοηθητικού διανυσματικού πεδίου η (βλέπε [11]).

Παράδειγμα 1: Οι πιο κοινοί τύποι στατικών σημείων ροών είναι οι πηγές με πολλαπλότητα $+1$, οι καταβόθρες με πολλαπλότητα $+1$, οι στρόβιλοι με πολλαπλότητα $+1$, οι διακλαδώσεις με πολλαπλότητα -1 και τα στατικά σημεία που μοιάζουν με δίπολο που έχουν πολλαπλότητα $+2$.

Απόδειξη: Έστω $\{x_i\}$ το σύνολο των στατικών σημείων. Επιλέγουμε μια μικρή απλή κλειστή γραμμή γ_i γύρω από κάθε στατικό σημείο x_i και συμβολίζουμε με R_i την περιοχή της επιφάνειας X που περικλείεται από την κλειστή καμπύλη γ_i ενώ με Y συμβολίζουμε το τμήμα της X εκτός όλων των γραμμών γ_i, δηλαδή $Y = X - \bigcup_i \gamma_i$.

Σε κάθε σημείο $y \in Y$, μπορούμε να επιλέξουμε μια ορθοκανονική βάση $\{\hat{e}_1(y), \hat{e}_2(y)\}$ του εφαπτόμενου επιπέδου, έτσι ώστε το $\hat{e}_1(y)$ να είναι στην διεύθυνση του $\xi(y)$. Εφαρμόζουμε τώρα το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε για την δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 23.2.1 στην περιοχή Y που έχει σύνορο τις καμπύλες γ_i και παίρνουμε:

$$\int_Y KdA = -\sum_i \int_{\gamma_i} \hat{e}_1 \cdot \dot{\hat{e}}_2 ds$$

(το αρνητικό πρόσημο προκύπτει διότι το σύνορο του Y συνίσταται από τις καμπύλες γ_i με φορά ίδια με τη φορά των δεικτών του ρολογιού).

Στη συνέχεια επιλέγουμε μια παρόμοια ορθοκανονική βάση $\{\hat{f}_1, \hat{f}_2\}$ για τα εφαπτόμενα επίπεδα στα σημεία των περιοχών R_i. Υπολογίζουμε

$$\int_{R_i} KdA = \int_{\gamma_i} \hat{f}_1 \cdot \dot{\hat{f}}_2 ds.$$

Άν προσθέσουμε τις σχέσεις

$$\int_Y KdA = -\sum_i \int_{\gamma_i} \hat{e}_1 \cdot \dot{\hat{e}}_2 ds$$

και

$$\int_{R_i} KdA = \int_{\gamma_i} \hat{f}_1 \cdot \dot{\hat{f}}_2 ds$$

θα πάρουμε

$$\int_X KdA = \sum_i \int_{\gamma_i} (\hat{f}_1 \cdot \dot{\hat{f}}_2 - \hat{e}_1 \cdot \dot{\hat{e}}_2) ds.$$

Όμως στην Απόδειξη Β του Θεωρήματος 23.2.1 αποδείξαμε τη σχέση

$$k_g = \hat{\eta} \cdot \vec{t} = \dot{\theta} - \hat{e}_1 \cdot \dot{\hat{e}}_2,$$

από την οποία προκύπτουν οι σχέσεις

$$\hat{e}_1 \cdot \dot{\hat{e}}_2 = \dot{\theta} - k_g$$

και

$$\hat{f}_1 \cdot \dot{\hat{f}}_2 = \dot{\phi} - k_g,$$

όπου θ και ϕ είναι οι γωνίες που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{t}$ με τα διανύσματα $\hat{e}_1$ και $\hat{f}_1$ αντίστοιχα. Συνεπώς

$$\frac{1}{2\pi}\int_X KdA = \sum_i \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_i} \dot{\psi} ds,$$

όπου ψ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\hat{e}_1$ και $\hat{f}_1$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος διότι το μεν αριστερό μέλος της τελευταίας σχέσης, από το θεώρημα 23.3.1, δίδει την χαρακτηριστική Euler, ενώ το δεξί μέλος δεν είναι παρά το άθροισμα των στατικών σημείων με τις πολλαπλότητές τους όπως ορίσθηκαν παραπάνω. □

23.5 Κριτικά Σημεία

Σε αυτή την παράγραφο θα δώσουμε και έναν τρίτο τρόπο υπολογισμού της χαρακτηριστικής Euler χρησιμοποιώντας τα κριτικά σημεία μιας λείας συνάρτησης. Σημειώνουμε με έμφαση ότι τόσο αυτή η μέθοδος όσο και αυτή με την χρήση στατικών σημείων ροών διανυσματικών πεδίων γενικεύονται εύκολα και σε περιπτώσεις πολλαπλοτήτων μεγαλύτερης διάστασης από 2 που είναι οι επιφάνειες.

Έστω λοιπόν κατά τα γνωστά, X μια κλειστή (συμπαγής) επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με (επιτρεπτή) παραμετρική παράσταση $\vec{r} : V \to \mathbb{R}^3$, όπου $V \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f : X \to \mathbb{R}$ μια λεία συνάρτηση.

Ορισμός 1. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f όπως παραπάνω έχει ένα *κριτικό σημείο* στο σημείο $x \in X$ εάν η βαθμίδα (gradient) $\nabla_X f$ της f μηδενίζεται στο σημείο x.

Σημείωση 1: Για απλοποίηση του συμβολισμού γράφουμε $\nabla_X f$ αλλά για να είμαστε ακριβείς εννοούμε την βαθμίδα της σύνθεσης $\nabla(f \circ \vec{r})$.

Εάν η επιφάνεια X έχει τοπικές συντεταγμένες (u, v), τότε η συνάρτηση f έχει ένα κριτικό σημείο στο σημείο $x \in X$ εάν

$$f_u(x) = f_v(x) = 0.$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας, αυτή η συνθήκη είναι ανεξάρτητη από την επιλογή τοπικών συντεταγμένων (επιλογή επιτρεπτής παραμετρικής παράστασης της επιφάνειας): εάν $u = u(x,y)$ και $v = v(x,y)$, τότε

$$f_x = f_u u_x + f_v v_x,$$

και

$$f_y = f_u u_y + f_v v_y,$$

οπότε οι f_u και f_v μηδενίζονται τότε και μόνο τότε όταν οι f_x και f_y μηδενίζονται, πράγμα που σημαίνει ότι μπορούμε χωρίς καμία αμφιβολία να μιλάμε για τα κριτικά σημεία μιας συνάρτησης που ορίζεται πάνω σε μια επιφάνεια X.

Μπορούμε στη συνέχεια να ορίσουμε την Hessian της συνάρτησης f που είναι ο συμμετρικός 2×2 πίνακας

$$\begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix}.$$

Σε ένα κριτικό σημείο, η Hessian, κάτω από μια αλλαγή τοπικών συντεταγμένων, μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix},$$

συνεπώς

$$(f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2) = (u_x v_y - u_y v_x)^2 (f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2)$$

οπότε το εάν η ορίζουσα της Hessian είναι μη-μηδενική, θετική ή αρνητική, είναι επίσης κάτι που δεν εξαρτάται από την επιλογή τοπικού συστήματος συντεταγμένων.

Ορισμός 2. Θα λέμε ότι η λεία συνάρτηση f, που ορίζεται όπως παραπάνω σε μια επιφάνεια X, έχει ένα *μη-εκφυλισμένο κριτικό σημείο* στο σημείο $x \in X$, εάν η Hessian στο σημείο αυτό είναι *αντιστρέψιμος πίνακας* (ισοδύναμα έχει μη-μηδενική ορίζουσα).

Γνωρίζουμε από την ανάλυση ότι:
(α). εάν $f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2 > 0$ (ορίζουσα της Hessian θετική) και $f_{uu} > 0$, τότε η συνάρτηση έχει *τοπικό ελάχιστο* (η Hessian είναι θετικά ορισμένη),
(β). εάν $f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2 > 0$ και $f_{uu} < 0$, τότε η συνάρτηση έχει *τοπικό μέγιστο* (η Hessian είναι αρνητικά ορισμένη), ενώ
(γ). εάν $f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2 < 0$, τότε έχουμε *σημείο σάγματος*.

Επειδή η X είναι συμπαγής, η f σίγουρα έχει ένα μέγιστο (max) και ένα ελάχιστο (min) σημείο, αλλά μπορεί να έχει και άλλα κριτικά σημεία. Μπορεί κανείς να σκεφτεί ότι η συνάρτηση f είναι το ύψος των σημείων της X πάνω από ένα επίπεδο στο χώρο. Για παράδειγμα εάν X είναι ένα τόρους, και η f είναι το ύψος, τότε αυτή θα έχει 1 ελάχιστο σημείο, 1 μέγιστο σημείο και 2 σαγματικά σημεία.

Με βάση τα παραπάνω, θα αποδείξουμε το εξής Θεώρημα:

Θεώρημα 1. Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μια λεία συνάρτηση σε μια κλειστή (συμπαγή) επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$. Υποθέτουμε ότι η f έχει πεπερασμένο πλήθος κριτικών σημείων και είναι όλα μη-εκφυλισμένα. Τότε η χαρακτηριστική Euler $\chi(X)$ της επιφάνειας X είναι ίση με τον αριθμό των τοπικών ελαχίστων συν τον αριθμό των τοπικών μεγίστων πλην τον αριθμό των σαγματικών σημείων της συνάρτησης f.

Βλέπουμε πως για παράδειγμα στο τόρους, εάν υποθέσουμε ότι η f είναι το "ύψος", ο υπολογισμός είναι σωστός διότι έχουμε 1 ελάχιστο, 1 μέγιστο και δύο σαγματικά σημεία, άρα $1 + 1 - 2 = 0$, που είναι το σωστό για την χαρακτηριστική Euler του τόρους όπως είδαμε στα παραδείγματα 17.B

Απόδειξη: Η απόδειξη ουσιαστικά στηρίζεται στο να θεωρήσουμε το διανυσματικό πεδίο $\nabla_X f$ και να εφαρμόσουμε σε αυτό το Θεώρημα 23.4.1.

Δοθείσης μιας συνάρτησης f στην επιφάνεια X όπως παραπάνω, ορίζουμε το διανυσματικό πεδίο της βαθμίδας της συνάρτησης:

$$\nabla_X f = \vec{a} = \frac{1}{EG - F^2}[(Gf_u - Ff_v)\vec{r}_u + (Ef_v - Ff_u)\vec{r}_v].$$

Μακριά από τα κριτικά σημεία της f, μπορούμε να κανονικοποιήσουμε το $\vec{a}$ ώστε να πάρουμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{e}$. Περικυκλώνουμε κάθε κριτικό σημείο με μια μικρή κλειστή γραμμή γ_i που περικλείει ένα δίσκο R_i. Έστω Y το συνολοθεωρητικό συμπλήρωμα αυτών των δίσκων (ως προς X). Τότε από το επιχείρημα για την απόδειξη Α του Θεωρήματος 23.2.1 θα πάρουμε

$$\int_Y K dA = -\sum_i \int_{\gamma_i} \dot{\hat{e}} \cdot (\hat{n} \times \hat{e}) ds,$$

χρησιμοποιώντας αρνητικό πρόσημο διότι το Y βρίσκεται εκτός των R_i.

Εντός των R_i, επιλέγουμε ένα μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο $\hat{f}$ και τότε παίρνουμε:

$$\int_{R_i} KdA = \int_{\gamma_i} \dot{\hat{f}} \cdot (\hat{n} \times \hat{f}) ds,$$

οπότε αν αθροίσουμε τις δύο τελευταίες σχέσεις θα πάρουμε

$$\int_X KdA = \sum_i \int_{\gamma_i} [\dot{\hat{f}} \cdot (\hat{n} \times \hat{f}) - \dot{\hat{e}} \cdot (\hat{n} \times \hat{e})] ds.$$

Από την απόδειξη Α του θεωρήματος 23.2.1 είχαμε υπολογίσει ότι

$$k_g = \dot{\hat{e}} \cdot (\hat{n} \times \hat{e}) + \dot{\theta} = \dot{\hat{f}} \cdot (\hat{n} \times \hat{f}) + \dot{\phi},$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ του εφαπτόμενου της καμπύλης γ και του $\hat{e}$ ενώ ϕ είναι η γωνία μεταξύ του εφαπτόμενου της καμπύλης γ και του $\hat{f}$. Έτσι, η συνεισφορά είναι απλά οι μεταβολές στην γωνία μεταξύ του διανυσματικού πεδίου $\hat{e}$ και ενός καθορισμένου διανυσματικού πεδίου $\hat{f}$. Αυτή η συνεισφορά είναι ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π, οπότε μπορούμε να την υπολογίσουμε θεωρώντας ένα συνεχή ανασχηματισμό (continuous deformation) στην γνωστή Ευκλείδεια περίπτωση. Ένα τοπικό ελάχιστο είναι το $f = x^2 + y^2$, που δίδει

$$\hat{e} = (\cos\theta, \sin\theta)$$

και συνεισφέρει $+1$, όσο και το τοπικό ελάχιστο $-(\cos\theta, \sin\theta)$. Για ένα σαγματικό σημείο $f = x^2 - y^2$, που δίδει

$$\hat{e} = (\cos\theta, -\sin\theta) = (\cos(-\theta), \sin(-\theta)),$$

θα πάρουμε συνεισφορά -1. $\square$

Σημείωση 2: Στα κριτικά σημεία που η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο, τοπικό μέγιστο ή σημείο σάγματος, η ροή του αντίστοιχου διανυσματικού πεδίου $\nabla_X f$ έχει στατικά σημεία που είναι πηγή, καταβόθρα και σημείο διακλάδωσης αντίστοιχα.

24 Γεωδαισιακές Καμπύλες μιας Επιφάνειας

24.1 Γενικός Χαρακτηρισμός Γεωδαισιακών

Οι γεωδαισιακές καμπύλες σε μια επιφάνεια παίζουν ανάλογο ρόλο με αυτόν των ευθειών στο επίπεδο. Γνωρίζουμε ότι μεταξύ των κάθε είδους γραμμών που μπορούν να υπάρξουν στο επίπεδο (ευθείες, τεθλασμένες, καμπύλες, κ.λ.π.), οι ευθείες χαρακτηρίζονται με δύο ισοδύναμους τρόπους:
♣ είναι οι γραμμές *ελαχίστου μήκους* μεταξύ δύο τυχαίων σημείων του επιπέδου
♣ είναι οι πιο *"ίσιες"* γραμμές, με την έννοια ότι η διεύθυνση του μοναδιαίου εφαπτόμενου διανύσματος κατά μήκος της γραμμής μεταβάλλεται ελάχιστα (στην πραγματικότητα, όπως γνωρίζουμε, στις ευθείες, το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα δεν μεταβάλλεται καθόλου, παραμένει σταθερό).

Γενικεύοντας τις δύο παραπάνω ιδιότητες κλειδιά των ευθειών του επιπέδου στις καμπύλες μιας επιφάνειας, θα ορίσουμε τις γεωδαισιακές με δύο ισοδύναμους τρόπους:
(α). είτε ως καμπύλες ελαχίστου μήκους
(β). είτε (ισοδύναμα) ως τις πιο ίσιες καμπύλες της επιφάνειας, δηλαδή τις καμπύλες κατά μήκος των οποίων η διεύθυνση του μοναδιαίου εφαπτόμενου διανύσματος μεταβάλλεται ελάχιστα. Πιο συγκεκριμένα θα δούμε ότι σε μια γεωδαισιακή καμπύλη, *η παράγωγος του μοναδιαίου εφαπτόμενου διανύσματος αυτής παραμένει πάντα κάθετο στην επιφάνεια* (δηλαδή είναι παράλληλο με το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}$ της επιφάνειας), γεγονός που αμέσως συνεπάγεται, από τον ορισμό 21.3.1, ότι η *γεωδαισιακή καμπυλότητα μηδενίζεται.*

Ο πρώτος τρόπος χαρακτηρισμού των γεωδαισιακών είναι εσωτερικός (συμφυής) διότι χρησιμοποιεί την πρώτη θεμελιώδη μορφή της επιφάνειας. Ο δεύτερος τρόπος είναι εξωτερικός. Για λόγους ευκολίας όμως, αλλά και επειδή θέλουμε για παράδειγμα να θεωρούμε κάθε τόξο ενός μεγίστου κύκλου μιας σφαίρας ως γεωδαισιακή, στην πρώτη περίπτωση, θα ορίσουμε τις γεωδαισιακές κάπως γενικότερα, δηλαδή δεν θα ορίσουμε τις γεωδαισιακές ως καμπύλες ελαχίστου μήκους αλλά ως καμπύλες με *ακρότατο μήκος* (ελάχιστο ή μέγιστο).

24.2 Εξισώσεις Γεωδαισιακών

Έστω λοιπόν κατά τα γνωστά, X μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με (επιτρεπτή) παραμετρική παράσταση $\vec{r}(u,v) : V \to \mathbb{R}^3$, όπου $V \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό. Μια λεία καμπύλη γ πάνω στην επιφάνεια X ορίζεται μέσω μιας λείας απεικόνισης $\vec{\gamma}(t) : [a,b] \subset \mathbb{R} \to X$ (θεωρούμε ότι η καμπύλη έχει τυχαία παράμετρο t).

Ορισμός 1. Μια *συνεχής οικογένεια λείων καμπυλών* $\vec{\gamma}_q(t)$ στην επιφάνεια X που παραμετροποιείται με την χρήση μιας συνεχούς παραμέτρου έστω $q \in (-\epsilon, \epsilon)$, με $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, σημαίνει ότι η $\vec{\gamma}_q(t)$ είναι μια λεία καμπύλη της επιφάνειας X για κάθε τιμή της συνεχούς παραμέτρου q, ότι όλες οι καμπύλες της οικογένειας έχουν τα ίδια άκρα (δηλαδή $\vec{\gamma}_q(a) =$ σταθερό $\forall q$ και ότι $\vec{\gamma}_q(b) =$ σταθερό $\forall q$), και ότι η απεικόνιση $(q, t) \mapsto \vec{\gamma}_q(t)$ είναι μια λεία απεικόνιση από το $(-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \to X$.

Από την παράγραφο 20.1 γνωρίζουμε πως για τον υπολογισμό του μήκους μιας καμπύλης πάνω στην επιφάνεια X απαιτείται η χρήση της πρώτης θεμελιώδους μορφής της επιφάνειας, πιο συγκεκριμένα είχαμε δει τον εξής τύπο για τον υπολογισμό του μήκους $l(\gamma)$ μιας καμπύλης γ πάνω στην επιφάνεια X:

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{E(\frac{du}{dt})^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G(\frac{dv}{dt})^2}dt.$$

Ορισμός 2. Μια λεία καμπύλη $\vec{\gamma}(t) : [a, b] \to X$ πάνω στην επιφάνεια X είναι μια *γεωδαισιακή* εάν για κάθε οικογένεια καμπυλών $\vec{\gamma}_q(t)$ της επιφάνειας X, τα μέλη της οποίας (οικογένειας) έχουν τα ίδια άκρα με την καμπύλη $\vec{\gamma}(t)$ (δηλαδή για κάθε q να ισχύει ότι $\vec{\gamma}_q(a) = \vec{\gamma}(a)$ και $\vec{\gamma}_q(b) = \vec{\gamma}(b)$), και τέτοιας ώστε $\vec{\gamma}_0(t) = \vec{\gamma}(t), \forall t \in [a, b]$, (δηλαδή η καμπύλη $\vec{\gamma}(t)$ να ταυτίζεται με την καμπύλη της οικογένειας που αντιστοιχεί στην τιμή της παραμέτρου $q = 0$), ισχύει ότι

$$\frac{d}{dq}l(\gamma_q)|_{q=0} = 0.$$

Η παραπάνω συνθήκη του ορισμού πραγματικά σημαίνει πως οι γεωδαισιακές είναι καμπύλες με *ακρότατο* (μέγιστο ή ελάχιστο) μήκος.

Φανερά οι γεωδαισιακές δεν μεταβάλλονται εάν λυγίσουμε την επιφάνεια. Για να βρούμε την διαφορική εξίσωση των γεωδαισιακών θα χρησιμοποιήσουμε λογισμό μεταβολών:

Θεωρούμε ότι η συνεχής οικογένεια γ_q των λείων καμπυλών πάνω στην επιφάνεια X παραμετροποιείται μέσω της απεικόνισης $t \mapsto (u(q, t), v(q, t))$ και διαφορίζουμε την έκφραση που δίδει το μήκος μιας καμπύλης ως προς την συνεχή παράμετρο q (βλέπε παράγραφο 20.1):

$$l(\gamma_q) = \int_a^b \sqrt{R}dt,$$

όπου $R = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2$, $u' = du/dt$, $v' = dv/dt$ ενώ E, F, G είναι οι ποσότητες που εμφανίζονται στην πρώτη θεμελιώδη μορφή της επιφάνειας

X του $\mathbb{R}^3$.

Συνεπώς
$$\frac{d}{dq}l(\gamma_q) = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{1}{\sqrt{R}}\frac{\partial R}{\partial q}dt.$$
Όμως
$$\frac{\partial R}{\partial q} = [E_u(u')^2 + 2F_u u'v' + G_u(v')^2]\frac{\partial u}{\partial q} +$$
$$+[E_v(u')^2 + 2Fuv + G_v v']\frac{\partial v}{\partial q} + 2(Eu' + Fv')\frac{\partial u'}{\partial q} + 2(Fu' + Gv')\frac{\partial v'}{\partial q},$$
όπου $E_u = \partial E/\partial u$, $E_v = \partial E/\partial v$, $F_u = \partial F/\partial u$, $F_v = \partial F/\partial v$, $G_u = \partial G/\partial u$, $G_v = \partial G/\partial v$. Παρατηρώντας ότι όταν $t = a, b$, ισχύει ότι
$$\frac{\partial u}{\partial q} = \frac{\partial v}{\partial q} = 0,$$
και ολοκληρώνοντας κατά μέρη την τελευταία σχέση, προκύπτει ότι
$$\frac{dl}{dq}|_{q=0} = \int_a^b [P\frac{\partial u}{\partial q} + Q\frac{\partial v}{\partial q}]dt,$$
όπου θέσαμε
$$P = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{R}}[E_u(u')^2 + 2F_u u'v' + G_u(v')^2] - \frac{\partial}{\partial t}[\frac{1}{\sqrt{R}}(Eu' + Fv')],$$
και
$$Q = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{R}}[E_v(u')^2 + 2F_v u'v' + G_v(v')^2] - \frac{\partial}{\partial t}[\frac{1}{\sqrt{R}}(Fu' + Gv')].$$

Στη σχέση
$$\frac{dl}{dq}|_{q=0} = \int_a^b [P\frac{\partial u}{\partial q} + Q\frac{\partial v}{\partial q}]dt,$$
οι συναρτήσεις P και Q υπολογίζονται στο $q = 0$ όπου είναι συναρτήσεις του t που εξαρτώνται μόνο από την αρχική καμπύλη γ και όχι από την συνεχή οικογένεια των καμπυλών γ_q. Η καμπύλη γ είναι γεωδαισιακή εάν και μόνο εάν η παράγωγος που δίδει η παραπάνω σχέση μηδενίζεται *για κάθε* συνεχή οικογένεια καμπυλών που περιέχουν την καμπύλη γ. Η αναγακαία και ικανή συνθήκη για να συμβαίνει αυτό είναι να ισχύει
$$P = Q = 0.$$

Το ότι η συνθήκη αυτή είναι ικανή είναι προφανές. Το ότι είναι αναγκαία αποδεικνύεται από το ακόλουθο επιχείρημα: Έστω για παράδειγμα ότι η P δεν μηδενίζεται για την τιμή $t = t_0$, όπου $a < t_0 < b$. Εάν $P(t_0) > 0$, τότε μπορούμε να βρούμε ένα διάστημα $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ στο οποίο $P(t) > \frac{1}{2}P(t_0) > 0$. Επιλέγουμε μια λεία συνάρτηση με θετικές τιμές $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $\phi(t_0) = 1$ αλλά $\phi(t) = 0$ όταν το t βρίσκεται εκτός του διαστήματος $(t_0-\delta, t_0+\delta)$. Τότε θεωρούμε την οικογένεια των καμπυλών που περιγράφονται από τις εξισώσεις

$$u(q, t) = u(t) + q\phi(t)$$

$$v(q, t) = v(t)$$

για $|q| < \epsilon$. Η παράσταση

$$\frac{dl}{dq}|_{q=0} = \int_a^b [P\frac{\partial u}{\partial q} + Q\frac{\partial v}{\partial q}]dt,$$

παίρνει την τιμή

$$\int_a^b P(t)\phi(t)dt \geq \frac{1}{2}P(t_0)\int_a^b \phi(t)dt > 0,$$

κάτι που αποτελεί *αντίφαση*. Συνεπώς $P = 0$ και ανάλογα $Q = 0$.

Για να θέσουμε το αποτέλεσμα σε μια πιο κομψή μορφή, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η καμπύλη γ περιγράφεται μέσω της φυσικής παραμέτρου, οπότε τότε $R = 1$. Σημειώνουμε πάντως ότι για να εφαρμοστεί το παραπάνω επιχείρημα δεν πρέπει να υποθέσουμε ότι οι καμπύλες γ_q της συνεχούς οικογένειας καμπυλών παραμετροποιούνται με τη φυσική παράμετρο για $q \neq 0$ διότι τότε οι ποσότητες $\partial u/\partial q$ και $\partial v/\partial q$ δεν μπορεί να είναι τυχαίες συναρτήσεις του t.

Αποδείξαμε λοιπόν το παρακάτω Θεώρημα:

Θεώρημα 1. Εάν μια καμπύλη παραμετροποιείται με την φυσική παράμετρο, τότε αποτελεί γεωδαισιακή εάν και μόνο εάν ικανοποιεί τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\frac{d}{ds}(E\dot{u} + F\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2)$$

και

$$\frac{d}{ds}(F\dot{u} + G\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2).$$

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει το εξής Πόρισμα:

Πόρισμα 1. Μια καμπύλη στην επιφάνεια X είναι γεωδαισιακή εάν και μόνο εάν η παράγωγος του μοναδιαίου εφαπτόμενου διανύσματος της καμπύλης είναι κάθετο στην επιφάνεια X σε κάθε σημείο της καμπύλης.

Απόδειξη: Έστω $\vec{\gamma}(s)$ μια καμπύλη της επιφάνειας X που παραμετροποιείται με την φυσική παράμετρο. Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης είναι $\dot{\vec{\gamma}} = \dot{u}\vec{r}_u + \dot{v}\vec{r}_v$. Συνεπώς το διάνυσμα $\ddot{\vec{\gamma}}$ είναι κάθετο στην επιφάνεια X εάν και μόνο εάν

$$[\frac{d}{ds}(\dot{u}\vec{r}_u + \dot{v}\vec{r}_v)] \cdot \vec{r}_u = 0$$

και

$$[\frac{d}{ds}(\dot{u}\vec{r}_u + \dot{v}\vec{r}_v)] \cdot \vec{r}_v = 0.$$

Όμως αυτές είναι ακριβώς οι εξισώσεις του θεωρήματος 1 διότι:

$$[\frac{d}{ds}(\dot{u}\vec{r}_u + \dot{v}\vec{r}_v)] \cdot \vec{r}_u = \frac{d}{ds}[(\dot{u}\vec{r}_u + \dot{v}\vec{r}_v) \cdot \vec{r}_u] - (\dot{u}\vec{r}_u + \dot{v}\vec{r}_v) \cdot \frac{d\vec{r}_u}{ds} =$$

$$= \frac{d}{ds}(E\dot{u} + F\dot{v}) - [\dot{u}^2\vec{r}_u \cdot \vec{r}_{uu} + \dot{u}\dot{v}(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_{uv} + \vec{r}_v \cdot \vec{r}_{uu}) + \dot{v}^2\vec{r}_v \cdot \vec{r}_{uv}] =$$

$$= \frac{d}{ds}(E\dot{u} + F\dot{v}) - \frac{1}{2}(\dot{u}^2E_u + 2\dot{u}\dot{v}F_u + \dot{v}^2G_u).$$

Ανάλογα αποδεικνύεται ο ισχυρισμός και για την δεύτερη εξίσωση. □

Σημείωση 1: Το παραπάνω πόρισμα μας λέει ότι οι γεωδαισιακές μιας επιφάνειας είναι οι τροχιές που θα διαγράψουν τα σωμάτια που κινούνται *ελεύθερα*, χωρίς την επίδραση καμίας δύναμης, με μόνο περιορισμό την συνθήκη να βρίσκονται πάντα πάνω στην επιφάνεια. Η αρχή αυτή γενικεύεται και για την περίπτωση πολλαπλοτήτων διάστασης μεγαλύτερης από 2. Για παράδειγμα, αυτό έχει μεγάλη σημασία στην περίπτωση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας στην φυσική, (περίπτωση πολλαπλοτήτων διάστασης 4), διότι μας λέει ότι τα σώματα που πέφτουν ελεύθερα (δηλαδή κινούνται υπό την επίδραση μόνο της βαρύτητας), η τροχιά τους θα είναι μια γεωδαισιακή καμπύλη, υιοθετώντας βέβαια την ερμηνεία του A. Einstein ότι η βαρύτητα έχει γεωμετρική υπόσταση (η βαρύτητα νοείται ως καμπύλωση του χωρόχρονου, που αποτελεί πολλαπλότητα διάστασης 4. Η καμπύλωση δε του χωρόχρονου προέρχεται είτε από την γεωμετρία είτε επιπρόσθετα από την ύπαρξη μάζας και έτσι ερμηνεύεται γεωμετρικά για παράδειγμα ο νόμος της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα).

Σημείωση 2: Είναι επίσης φανερό από το παραπάνω πόρισμα ότι οι γεωδαισιακές εξαρτώνται μόνο από την πρώτη θεμελιώδη μορφή της επιφάνειας, συνεπώς μπορούν να ορισθούν και για κάθε γενικευμένη επιφάνεια (δηλαδή επιφάνεια που δεν είναι εμφυτευμένη στον $\mathbb{R}^3$), αλλά που είναι εφοδιασμένη με μια μετρική Ρήμαν. Επιπλέον *οι ισομετρίες απεικονίζουν γεωδαισιακές σε γεωδαισιακές.*

Σημείωση 3: Το πόρισμα αυτό εξηγεί γιατί το μέτρο της εφαπτομενικής συνιστώσας του διανύσματος $\ddot{\vec{\gamma}}$ ονομάζεται γεωδαισιακή καμπυλότητα (ορισμός 21.3.1): αυτή η συνιστώσα μετρά το κατά πόσο η καμπύλη $\vec{\gamma}$ αποτυγχάνει να είναι γεωδαισιακή.

Παραδείγματα:

1. Για το επίπεδο, ισχύει ότι $E = G = 1$ και $F = 0$ σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες, συνεπώς οι εξισώσεις των γεωδαισιακών είναι

$$\ddot{x} = 0 = \ddot{y},$$

οι οποίες εάν επιλυθούν δίδουν *ευθείες*

$$x = a_1 s + b_1$$

και

$$y = a_2 s + b_2.$$

2. Για τον κύλινδρο με παραμετρική παράσταση (βλέπε παράδειγμα 19.1.5)

$$\vec{r}(u, v) = a(\cos v\hat{i} + \sin v\hat{j}) + u\hat{k},$$

υπολογίσαμε την πρώτη θεμελιώδη μορφή (βλέπε παράδειγμα 20.3.2)

$$du^2 + a^2 dv^2 = du^2 + d(av)^2,$$

που είναι ισομετρική με το επίπεδο, συνεπώς οι γεωδαισιακές είναι της μορφής

$$u = a_1 s + b_1$$

και

$$v = a_2 s + b_2,$$

εξισώσεις που περιγράφουν *κυκλοειδείς έλικες* (βλέπε παράδειγμα 3.2.3)

$$\vec{\gamma} = a[\cos(a_2 s + b_2)\hat{i} + \sin(a_2 s + b_2)\hat{j}] + (a_1 s + b_1)\hat{k}.$$

Οι διαφορικές εξισώσεις που ικανοποιούν οι γεωδαισιακές δίδουν το παρακάτω γενικό συμπέρασμα:

Πρόταση 1. Από κάθε σημείο x μιας επιφάνειας X και σε κάθε διεύθυνση στο σημείο $x \in X$, διέρχεται μοναδική γεωδαισιακή.

Απόδειξη: Από το θεώρημα 1 παραπάνω, είναι φανερό πως επειδή η ορίζουσα της πρώτης θεμελιώδους μορφής $EG - F^2$ είναι μη-μηδενική, οι εξισώσεις των γεωδαισιακών μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$\ddot{u} = A(u, v, \dot{u}, \dot{v})$$

και

$$\ddot{v} = B(u, v, \dot{u}, \dot{v}),$$

όπου τα A και B είναι τετραγωνικές μορφές στις συναρτήσεις $\dot{u}$ και $\dot{v}$ των οποίων οι συντελεστές είναι συναρτήσεις των u και v. Από την θεωρία που γνωρίζουμε για τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (θεώρημα επέκτασης του Cauchy), εάν δίδονται οι αρχικές συνθήκες $\dot{u}(0)$, $\dot{v}(0)$, $u(0)$ και $v(0)$, τότε οι εξισώσεις έχουν μια λύση $(u(t), v(t))$ που ορίζεται για t σε μια περιοχή του 0. Με άλλα λόγια, υπάρχει πάντα μια γεωδαισιακή που διέρχεται από ένα δοσμένο τυχαίο σημείο της επιφάνειας και από μια δεδομένη διεύθυνση. $\square$

Σημείωση 4: Στην πραγματικότητα, ισχύει μια πιο ισχυρή πρόταση από αυτή που αποδείξαμε, την οποία την δίδουμε χωρίς απόδειξη: εάν η επιφάνεια X είναι πλήρης ως μετρικός χώρος (δηλαδή κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει), τότε οι γεωδαισιακές μπορούν να επεκταθούν επ΄ άπειρον και στις δύο διευθύνσεις, δηλαδή η λύση επεκτείνεται για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και όχι απλά για μια περιοχή του μηδενός.

Παράδειγμα 3. Δοθέντων ενός σημείου με διάνυσμα θέσης $\vec{a}$ και μιας εφαπτομενικής διεύθυνσης $\vec{b}$ πάνω στην μοναδιαία σφαίρα, το επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα αυτά είναι ένα επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας (που ταυτίζεται με την αρχή του Καρτεσιανού Συστήματος Συντεταγμένων του $\mathbb{R}^3$), το οποίο τέμνει τη σφαίρα κατά μήκος ενός μεγίστου κύκλου που διέρχεται από το σημείο $\vec{a}$ και έχει εφαπτόμενο διάνυσμα στη διεύθυνση του $\vec{b}$. Συνεπώς κάθε γεωδαισιακή είναι μέγιστος κύκλος και εύκολα βλέπει κανείς ότι ισχύει και το αντίστροφο (δηλαδή κάθε μέγιστος κύκλος έχει γεωδαισιακή καμπυλότητα $k_g = 0$ όπως έχουμε δει, άρα είναι γεωδαισιακή).

24.3 Γεωδαισιακές Συντεταγμένες

Δεν είναι πάντα εύκολη υπόθεση (αλλά ούτε και δυνατή) η εκπεφρασμένη αναλυτική επίλυση των εξισώσεων των γεωδαισιακών, όμως η ύπαρξη γεωδαισιακών από κάθε σημείο και σε κάθε διεύθυνση μιας επιφάνειας που μας εγγυάται η πρόταση 24.2.1, μας δίδει, ως εφαρμογή, την δυνατότητα να θεωρήσουμε κάποια *φυσικά* συστήματα συντεταγμένων πάνω στις επιφάνειες, κατά το πρότυπο των Καρτεσιανών Συντεταγμένων, τα οποία προσφέρουν σημαντικά πλεονεκτήματα όσον αφορά την απλοποίηση των διάφορων υπολογισμών.

Ένα τέτοιο σύστημα συντεταγμένων κατασκευάζεται ως εξής: επιλέγουμε μια γεωδαισιακή καμπύλη $\vec{\gamma}(s)$ πάνω στην επιφάνεια με παράμετρο το μήκος τόξου. Από το τυχαίο σημείο $\vec{\gamma}(v)$ της γεωδαισιακής, θεωρούμε την γεωδαισιακή $\vec{\gamma}_v(s)$ που τέμνει την $\vec{\gamma}$ *κάθετα* (δηλαδή τα εφαπτόμενα διανύσματά τους είναι κάθετα στο σημείο τομής) και ορίζουμε

$$\vec{r}(u, v) := \vec{\gamma}_v(u).$$

Αφού τα διανύσματα $\vec{r}_u$ και $\vec{r}_v$ είναι κάθετα στο $u = 0$, έπεται πως είναι και γραμμικά ανεξάρτητα σε μια γειτονιά, συνεπώς είναι καλές συντεταγμένες. Για προφανείς λόγους ονομάζονται *γεωδαισιακές συντεταγμένες*.

Τώρα οι καμπύλες $v =$σταθ παραμετροποιούνται με την φυσική παράμετρο, οπότε $E = 1$. Αυτές οι καμπύλες είναι επίσης γεωδαισιακές και το u είναι η φυσική παράμετρος, συνεπώς στην δεύτερη γεωδαισιακή εξίσωση

$$\frac{d}{ds}(F\dot{u} + G\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2)$$

θέτουμε $v =$σταθ και $u = s$, κάτι που επειδή $E = 1$, δίδει τελικά ότι $F_u = 0$. Όμως το F μηδενίζεται στο $u = 0$ διότι οι δύο γεωδαισιακές είναι ορθογώνιες σε αυτό το σημείο, συνεπώς $F = 0$, οπότε η πρώτη θεμελιώδης μορφή παίρνει την εξής απλή μορφή:

$$du^2 + G(u, v)dv^2.$$

Τότε, η καμπυλότητα Gauss παίρνει την εξής επίσης απλή μορφή:

Πρόταση 1. Η καμπυλότητα Gauss της μετρικής (πρώτης θεμελιώδους μορφής) $du^2 + G(u, v)dv^2$ είναι

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{uu}.$$

Απόδειξη: Υπενθυμίζουμε την εφαπτομενική παράγωγο ∇ που δίδει την εφαπτομενική συνιστώσα της συνήθους παραγώγου. Τότε, αφού εκ κατασκευής το $\vec{r}_u$ είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα μιας γεωδαισιακής, εξ ορισμού της γεωδαισιακής, η παράγωγος ως προς u θα είναι ορθογώνια στην επιφάνεια, συνεπώς $\nabla_u \vec{r}_u = 0$.

Θεωρούμε τώρα την παράγωγο $\nabla_v \vec{r}_u = A\vec{r}_u + B\vec{r}_v$. Το εσωτερικό γινόμενο με $\vec{r}_u$ δίδει
$$\frac{E_v}{2} = \vec{r}_{vu} \cdot \vec{r}_u = A.$$
Αλλά $E = 1$, οπότε $A = 0$.
Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $E = 1$ και $F = 0$, το εσωτερικό γινόμενο με $\vec{r}_v$ δίδει
$$\frac{G_u}{2} = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_{vu} = BG.$$
Τώρα από την σχέση
$$\lambda = \frac{LN - M^2}{\sqrt{EG - F^2}}$$
που αποδείξαμε στην παράγραφο 22.2 (πρώτη απόδειξη του Θεωρήματος 22.1.1), προκύπτει ότι

$$(\nabla_v \nabla_u - \nabla_u \nabla_v)\vec{r}_u = K\sqrt{EG - F^2}\hat{n} \times \vec{r}_u = K\sqrt{G}(\frac{1}{\sqrt{G}}\vec{r}_v) = K\vec{r}_v.$$

Όμως το αριστερό μέλος (χρησιμοποιώντας την σχέση $\nabla_u \vec{r}_v = \nabla_v \vec{r}_u$ η οποία προκύπτει από την σχέση $\vec{r}_{uv} = \vec{r}_{vu}$), είναι ίσο με

$$(-\nabla_u \frac{G_u}{2G})\vec{r}_v = -[(G_u/2G)_u + (G_u/2G)^2]\vec{r}_v,$$

από την οποία έπεται το ζητούμενο. □

Παραδείγματα:
1. Για το *επίπεδο*, γνωρίζουμε πως η πρώτη θεμελιώδης μορφή είναι $dx^2 + dy^2$, $G = 1$ και $K = 0$.

2. Για την μοναδιαία *σφαίρα*, με πρώτη θεμελιώδη μορφή $du^2 + \sin^2 u dv^2$, έχουμε ότι $G = \sin^2 u$, συνεπώς

$$K = -\frac{1}{\sin u}(\sin u)_{uu} = \frac{1}{\sin u}\sin u = 1.$$

3. Για το *άνω ημιεπίπεδο* με μετρική (πρώτη θεμελιώδη μορφή)

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

θέτουμε $u = \log y$ και $v = x$, οπότε τότε έχουμε την μετρική στην ισοδύναμη μορφή

$$du^2 + e^{-2u}dv^2,$$

έτσι ώστε

$$K = -e^u(e^{-u})_{uu} = -e^u e^{-u} = -1.$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το σύστημα συντεταγμένων, μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τις επιφάνειες σταθερής καμπυλότητας Gauss:

Θεώρημα 1. Μια επιφάνεια με $K = 0$ είναι τοπικά ισομετρική με το επίπεδο, με $K = 1$ είναι τοπικά ισομετρική με την μοναδιαία σφαίρα και με $K = -1$ είναι τοπικά ισομετρική με το λεγόμενο *υπερβολικό επίπεδο* (δηλαδή με το άνω ημιεπίπεδο εφοδιασμένο με την μετρική $(dx^2 + dy^2)/y^2$).

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε την πρόταση 1 και την μορφή της μετρικής $du^2 + Gdv^2$ και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(α). Εάν $K = 0$, τότε $(\sqrt{G})_{uu} = 0$, οπότε $G = A(v)u + B(v)$. Όμως στο σημείο $u = 0$, τα $\vec{r}_u$ και $\vec{r}_v$ είναι μοναδιαία, οπότε $B(v) = 1$. Επίσης η καμπύλη $u = 0$ είναι γεωδαισιακή (η αρχική καμπύλη $\vec{\gamma}$), με v το μήκος τόξου. Συνεπώς η εξίσωση των γεωδαισιακών

$$\frac{d}{ds}(E\dot{u} + F\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2)$$

δίδει $0 = G_u(0, v)/2$, πράγμα το οποίο στην περίπτωσή μας σημαίνει ότι $A(v) = 0$. Συνεπώς η πρώτη θεμελιώδης μορφή είναι $du^2 + dv^2$ και άρα η επιφάνεια είναι ισομετρική με το επίπεδο (βλέπε παράδειγμα 20.3.1).

(β). Εάν $K = 1$, τότε $(\sqrt{G})_{uu} + \sqrt{G} = 1$, οπότε $\sqrt{G} = A(v)\sin u + B(v)\cos u$. Οι συνοριακές συνθήκες δίδουν $G = \cos^2 u$, συνεπώς η πρώτη θεμελιώδης μορφή είναι $du^2 + \cos^2 u dv^2$ και άρα η επιφάνεια είναι ισομετρική με την μοναδιαία σφαίρα (βλέπε παράδειγμα 20.3.4).

(γ). Εάν $K = -1$, τότε η πρώτη θεμελιώδης μορφή είναι $du^2 + \cosh^2 u dv^2$. Ο μετασχηματισμός $x = v \tanh u$ και $y = v \sec hu$ δίδει στην πρώτη θεμελιώδη μορφή την προσφιλή μορφή $(dx^2 + dy^2)/y^2$, συνεπώς η επιφάνεια είναι ισομετρική με το υπερβολικό επίπεδο. $\square$

25 Τύποι Weingarten-Gauss

25.1 Το Κίνητρο

Είχαμε δει στη θεωρία καμπυλών στον $\mathbb{R}^3$ ότι σε κάθε σημείο μιας, έστω λείας, καμπύλης με μη-μηδενική καμπυλότητα, ορίζονται τα μοναδιαία ορθοκανονικά διανύσματα $\vec{t}$, $\vec{p}$ και $\vec{b}$, τα οποία αποτελούν το λεγόμενο *(κινούμενο) τρίεδρο Frenet* της καμπύλης και αποτελούν μια *(κινούμενη) βάση* του $\mathbb{R}^3$. *Οι εξισώσεις Frenet-Seret* που είδαμε στην συνέχεια, *ουσιαστικά εκφράζουν τις πρώτες παραγώγους (έστω ως προς το μήκος τόξου s της καμπύλης) των διανυσμάτων αυτών* $\dot{\vec{t}}$, $\dot{\vec{p}}$ *και* $\dot{\vec{b}}$, *ως γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων* $\{\vec{t}, \vec{p}, \vec{b}\}$ *του κινούμενου τριέδρου Frenet, όπου ως συντελεστές εμφανίζονται η καμπυλότητα και η στρέψη της καμπύλης.*

Μια αντίστοιχη εικόνα υπάρχει και στην περίπτωση των επιφανειών του $\mathbb{R}^3$: σε κάθε *κανονικό σημείο* μιας επιφάνειας A που είναι εμφυτευμένη στον $\mathbb{R}^3$ μέσω μιας επιτρεπτής παραμετρικής παράστασης $\vec{r}(u, v)$, ορίζονται τα διανύσματα $\vec{r}_u = \partial\vec{r}/\partial u$, $\vec{r}_v = \partial\vec{r}/\partial v$ και $\hat{n}$. Τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, συνεπώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως *βάση* του $\mathbb{R}^3$, αλλά φυσικά *δεν αποτελούν ορθοκανονική βάση*. Εκτός του $\hat{n}$ που είναι μοναδιαίο και κάθετο στα $\vec{r}_u$ και $\vec{r}_v$, το γεγονός ότι βρισκόμαστε σε κανονικό σημείο της επιφάνειας εγγυάται ότι $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$, άρα τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αλλά δεν είναι κατ΄ ανάγκη ούτε μοναδιαία ούτε κάθετα μεταξύ τους.

Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε το αντίστοιχο των εξισώσεων Frenet-Seret: δηλαδή *θα θέλαμε να εκφράσουμε τις πρώτες μερικές παραγώγους* $\vec{r}_{uu}$, $\vec{r}_{uv}$, $\vec{r}_{vv}$, $\hat{n}_u$ *και* $\hat{n}_u$ *των διανυσμάτων της βάσης* $\{\vec{r}_u, \vec{r}_v, \hat{n}\}$, *ως γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων της ίδιας βάσης*. Οι εκφράσεις αυτές λέγονται *τύποι Weingarten-Gauss* και αποτελούν το αντικείμενο μελέτης του παρόντος κεφαλαίου. Οι συντελεστές των γραμμικών αυτών συνδυασμών είναι τα λεγόμενα *σύμβολα Christoffel.*

25.2 Η εξαγωγή των τύπων

Για ευκολία στον συμβολισμό αλλά και για εξοικείωση με αυτή τη χρήσιμη γλώσσα, θα χρησιμοποιήσουμε *τανυστικό φορμαλισμό* στην εξαγωγή των τύπων Weingarten-Gauss.

Αντί του συμβολισμού (u, v) για τις τοπικές συντεταγμένες της επιφάνειας A του $\mathbb{R}^3$ θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό u^i, (τανυστής τύπου $(1, 0)$), όπου $i = 1, 2$, δηλαδή $u = u^1$ και $v = u^2$.

Επειδή $\hat{n}$ μοναδιαίο, έπεται ότι $\hat{n} \cdot \hat{n} = 1$ οπότε εάν διαφορίσουμε ως προς μια μεταβλητή θα πάρουμε

$$\hat{n}_i \cdot \hat{n} = 0,$$

όπου $i = 1, 2$ και

$$\hat{n}_i = \frac{\partial \hat{n}}{\partial u^i}.$$

Συνεπώς τα διανύσματα $\hat{n}_1$ και $\hat{n}_2$ βρίσκονται στο εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε σημείο της επιφάνειας A. Όμως το εφαπτόμενο επίπεδο παράγεται από τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\vec{r}_i = \partial \vec{r} / \partial u^i$, όπου $i = 1, 2$, (προφανώς στο νέο συμβολισμό $\vec{r}_1 = \vec{r}_u$ και $\vec{r}_2 = \vec{r}_v$), συνεπώς

$$\hat{n}_i = c_i^j \vec{r}_j,$$

όπου $i, j = 1, 2$ και υιοθετούμε την λεγόμενη *σύμβαση Einstein*, δηλαδή επαναλαμβανόμενοι δείκτες αθροίζονται, άρα η παραπάνω σχέση αναλυτικά σημαίνει

$$\hat{n}_1 = c_1^1 \vec{r}_1 + c_1^2 \vec{r}_2$$

και

$$\hat{n}_2 = c_2^1 \vec{r}_1 + c_2^2 \vec{r}_2.$$

Οι ποσότητες c_i^j (4 ποσότητες), αποτελούν τα στοιχεία ενός 2×2 πίνακα αλλαγής βάσεων στο εφαπτόμενο επίπεδο: $\{\hat{n}_i\} \to \{\vec{r}_j\}$.

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά τα διανύσματα $\hat{n}_i$ επί τα διανύσματα $\vec{r}_k$ και θα πάρουμε:

$$\hat{n}_i \cdot \vec{r}_k = c_i^j \vec{r}_j \cdot \vec{r}_k = c_i^j g_{jk} \tag{25}$$

όπου $i, j, k = 1, 2$ και g_{jk} είναι η πρώτη θεμελιώδης μορφή (μετρική Ρήμαν, βλέπε παράγραφο 20.4 για την τανυστική περιγραφή της πρώτης θεμελιώδους μορφής).

Εδώ σημειώνουμε πως η ανταλλοίωτη μορφή της μετρικής g^{kl} εκφράζει τον αντίστροφο πίνακα, γεγονός που γράφεται ως εξής

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k, \tag{26}$$

όπου δ_i^k το γνωστό δέλτα του Kronecker (ουσιαστικά ο μοναδιαίος πίνακας).

Συμβολίζουμε με b_{ij} την δεύτερη θεμελιώδη μορφή της επιφάνειας, η οποία υπενθυμίζουμε πως ορίζεται από την σχέση $b_{ij} = \vec{r}_{ij} \cdot \hat{n}$, όπου $i, j = 1, 2$ και

$$\vec{r}_{ij} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j}.$$

Από την σχέση ορθογωνιότητας $\vec{r}_i \cdot \hat{n} = 0$, διαφορίζοντας, παίρνουμε

$$\vec{r}_{ij} \cdot \hat{n} + \vec{r}_i \cdot \hat{n}_j = 0 \Leftrightarrow \vec{r}_{ij} \cdot \hat{n} = -\vec{r}_i \cdot \hat{n}_j \tag{27}$$

Χρησιμοποιώντας την (27) και την γνωστή σχέση (26) που ικανοποιεί η μετρική, βρίσκουμε ότι η (25) δίδει

$$\hat{n}_i \cdot \vec{r}_j g^{jk} = -b_{ij} g^{jk} = -b_i^k = c_i^j g_{jl} g^{lk} = c_i^k$$

δηλαδή παίρνουμε ότι

$$c_i^j = -b_i^j. \tag{28}$$

Έτσι αποκτάμε τις *εξισώσεις Weingarten* που δίδουν τις μερικές παραγώγους του κάθετου μοναδιαίου διανύσματος της επιφάνειας

$$\hat{n}_i = -b_i^j \vec{r}_j,$$

όπου b_{ij} η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της επιφάνειας, ενώ $b_i^j = g^{jk} b_{ik}$ (σχέση που εκφράζει τον γενικό κανόνα πως *"ανεβοκατεβάζουμε δείκτες με την μετρική"*) ενώ υπενθυμίζουμε πως $g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους $\vec{r}_{ij}$ των διανυσμάτων $\vec{r}_i$ $(i, j = 1, 2)$. Χρησιμοποιούμε το εξής ansatz $(i, j, k = 1, 2)$:

$$\vec{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^l \vec{r}_l + a_{ij} \hat{n} \tag{29}$$

Θα προσδιορίσουμε τις ποσότητες a_{ij} και μετά τις ποσότητες Γ_{ij}^k (οι ποσότητες Γ_{ij}^k έχουν τρεις δείκτες διότι τα διανύσματα $\vec{r}_i$ δεν είναι μοναδιαία).

Ορισμός 1. Οι ποσότητες Γ_{ij}^k λέγονται *σύμβολα Christoffel δευτέρου είδους.*

Σημείωση 1: Τα σύμβολα Christoffel δεν αποτελούν τανυστές αλλά συνιστώσες ενός άλλου γεωμετρικού αντικειμένου που λέγεται *συνοχή.* Στη Γενική

Θεωρία Σχετικότητας τα σύμβολα Christoffel αποτελούν το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου.

Για τον υπολογισμό των ποσοτήτων a_{ij} εργαζόμαστε ως εξής: παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο (που αντιστοιχεί στην πράξη της *συστολής* στην τανυστική άλγεβρα, βλέπε παράρτημα) και στα δύο μέλη της σχέσης (29) με το διάνυσμα $\hat{n}$. Επειδή λόγω ορθογωνιότητας $\vec{r}_i \cdot \hat{n} = 0$, ενώ αφού το $\hat{n}$ είναι μοναδιαίο θα έχουμε $\hat{n} \cdot \hat{n} = 1$, και ορίσαμε την δεύτερη θεμελιώδη μορφή από τη σχέση $b_{ij} = \vec{r}_{ij} \cdot \hat{n}$, παίρνουμε τελικά ότι

$$a_{ij} = b_{ij},$$

δηλαδή οι συντελεστές του $\hat{n}$ στη σχέση (29) είναι απλά τα στοιχεία της δεύτερης θεμελιώδους μορφής της επιφάνειας.

Στη συνέχεια, για να υπολογίσουμε τα σύμβολα Christoffel, παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο και στα δύο μέλη της (29) με το διάνυσμα $\vec{r}_k$. Επειδή και πάλι $\vec{r}_k \cdot \hat{n} = 0$, θα πάρουμε

$$\vec{r}_{ij} \cdot \vec{r}_k = \Gamma^l_{ij} \vec{r}_l \cdot \vec{r}_k = \Gamma^l_{ij} g_{lk}.$$

Ορισμός 2. Οι ποσότητες Γ_{ijk} που ορίζονται από τη σχέση

$$\Gamma_{ijk} := \vec{r}_{ij} \cdot \vec{r}_k,$$

λέγονται *σύμβολα Christoffel πρώτου είδους*.

Η σχέση των συμβόλων Christoffel πρώτου και δευτέρου είδους προκύπτει μέσω της μετρικής (ανεβοκατεβάζουμε δείκτες μέσω της μετρικής)

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma^l_{jk} g_{li}.$$

Συνεπώς (όλοι οι δείκτες παίρνουν τις τιμές $1, 2$)

$$\Gamma^l_{jk} = \vec{r}_{jk} \cdot \vec{r}_k g^{lk}.$$

Τα σύμβολα Christoffel μιας επιφάνειας είναι $2^3 = 8$ συνολικά ποσότητες. Επειδή όμως $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_{ji}$, τα σύμβολα Christoffel είναι συμμετρικά στους δύο πρώτους δείκτες (τα πρώτου είδους) και στους κάτω δείκτες (τα δευτέρου είδους), άρα διαφορετικά μεταξύ τους είναι 6.

Αυτή η περιγραφή των συμβόλων Christoffel είναι ξεκάθαρη όσον αφορά τον γεωμετρικό τους ρόλο, αλλά δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τον υπολογισμό τους, διότι ορίζονται μέσω των παραγώγων $\vec{r}_{ij}$ των διανυσμάτων $\vec{r}_i$, τη στιγμή που εισάγαμε τα σύμβολα Christoffel ακριβώς για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τα διανύσματα $\vec{r}_{ij}$.

Θα ακολουθήσουμε λοιπόν άλλη πορεία για τον υπολογισμό των συμβόλων Christoffel: Ξεκινάμε από την σχέση $g_{ij} = \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j$ την οποία διαφορίζουμε ως προς u^k και παίρνουμε (όλοι οι δείκτες παίρνουν τις τιμές $1, 2$)

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \vec{r}_{ik} \cdot \vec{r}_j + \vec{r}_i \cdot \vec{r}_{jk},$$

οπότε

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki}. \tag{30}$$

Ανάλογα αποκτάμε

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} = \Gamma_{jik} + \Gamma_{kij} \tag{31}$$

και

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{kji}. \tag{32}$$

Εάν προσθέσουμε τις σχέσεις (30), (31) κατά μέλη, αφαιρέσουμε την (32), και λάβουμε υπόψιν μας και τις συμμετρίες στους δείκτες των συμβόλων Christoffel, τελικά θα πάρουμε

$$\Gamma_{ikj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}\right). \tag{33}$$

Άρα λοιπόν τώρα η σχέση (29) μας δίδει

$$\vec{r}_{ij} = \Gamma^l_{ij}\vec{r}_l + b_{ij}\hat{n},$$

όπου τα σύμβολα Christoffel δευτέρου είδους υπολογίζονται από την σχέση

$$\Gamma^l_{ij} = \Gamma_{ijk} g^{kl}$$

και τα σύμβολα Christoffel πρώτου είδους υπολογίζονται από τη σχέση (33). Οι σχέσεις (29) λέγονται *τύποι Gauss*.

Ανακεφαλαιώνοντας λοιπόν έχουμε τους τύπους Weingarten

$$\hat{n}_i = -b^j_i \vec{r}_j,$$

και τους τύπους του Gauss

$$\vec{r}_{ij} = \Gamma^l_{ij}\vec{r}_l + b_{ij}\hat{n}$$

μιας επιφάνειας.

25.3 Τύποι Mainardi-Codazzi

Από το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας καμπυλών στον χώρο $\mathbb{R}^3$ (θεώρημα 10.1), είδαμε πως για την περίπτωση των καμπυλών του $\mathbb{R}^3$, το πρόβλημα της πραγματοποίησης έχει πάντα λύση, δηλαδή: Δοθέντων δύο τυχαίων συνεχών συναρτήσεων ορισμένων σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b] \subset \mathbb{R}$, υπάρχει πάντα μια καμπύλη του χώρου κλάσης ≥ 2, μοναδική με μια ελευθερία στροφών και μετατοπίσεων, της οποίας η καμπυλότητα και η στρέψη δίδονται από τις δύο δοσμένες συνεχείς συναρτήσεις αντίστοιχα. Ισοδύναμα, δοθέντων δύο τυχαίων συνεχών συναρτήσεων $k(s)$ και $\tau(s)$ ορισμένων σε ένα διάστημα $[a, b] \subset \mathbb{R}$, οι εξισώσεις Frenet-Seret έχουν πάντα (μοναδική) λύση στο διάστημα αυτό (κλάσης τουλάχιστον 2).

Έχει νόημα να υποβάλλουμε το ίδιο ερώτημα και στην περίπτωση των επιφανειών του $\mathbb{R}^3$: Δοθέντων δύο τυχαίων συμμετρικών διγραμμικών μορφών, υπάρχει λεία επιφάνεια (μοναδική με την ελευθερία πιθανώς κάποιας ομάδας μετασχηματισμών του χώρου), η οποία να έχει ως πρώτη και δεύτερη θεμελιώδη μορφή τις δοσμένες συμμετρικές διγραμμικές μορφές αντίστοιχα; Ισοδύναμα, ζητάμε να δούμε εάν οι εξισώσεις Weingarten-Gauss έχουν πάντα (μοναδική) λύση, όπως συμβαίνει με τις εξισώσεις Frenet-Seret των καμπυλών του $\mathbb{R}^3$.

Η γενική απάντηση στο παραπάνω ερώτημα για τις επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$ είναι καταφατική μόνο τοπικά αλλά εν γένει είναι αρνητική ολικά (βλέπε και παράγραφο 20.7). Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν κάποιες συνθήκες ολοκληρωσιμότητας που θα πρέπει να ικανοποιούν οι συμμετρικές διγραμμικές μορφές, που λέγονται *τύποι Mainardi-Codazzi*, και οι οποίες αποτελούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να έχει το ερώτημα της πραγματοποίησης των επιφανειών του $\mathbb{R}^3$ και ολικά καταφατική απάντηση. Με άλλα λόγια, δοθέντων δύο τυχαίων συμμετρικών διγραμμικών μορφών, υπάρχει πάντα μια λεία επιφάνεια (μοναδική με την ελευθερία μιας rigid motion στο χώρο), η οποία *τοπικά* (δηλαδή στη γειτονία ενός σημείου) έχει ως πρώτη και δεύτερη θεμελιώδη μορφή τις δοσμένες συμμετρικές διγραμμικές μορφές. Μόνο όμως εάν οι συμμετρικές διγραμμικές μορφές ικανοποιούν τις συνθήκες Mainardi-Codazzi (και μόνο για αυτές τις συμμετρικές διγραμμικές μορφές), η κατασκευή επεκτείνεται σε όλο το ανοικτό $V \subseteq \mathbb{R}^2$. Οι συνθήκες αυτές αποτελούν το αντικείμενο μελέτης αυτής της παραγράφου. Δεν θα αποδείξουμε την πρόταση ότι οι τύποι Mainardi-Codazzi αποτελούν ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει καταφατική απάντηση και ολικά το ερώτημα της πραγματοποίησης στις επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$, απλώς θα αναφέρουμε ποιες είναι αυτές οι εξισώσεις. Για την απόδειξη της πρότασης παραπέμπουμε στο [22] και στο [25].

Έστω λοιπόν A μια επιφάνεια που είναι εμφυτευμένη στον $\mathbb{R}^3$ μέσω μιας επιτρεπτής παραμετρικής παράστασης $\vec{r}(u^i)$, με $i = 1, 2$, κλάσης τουλάχιστον 3. Τότε (όλοι οι δείκτες παίρνουν τις τιμές $1, 2$)

$$\frac{\partial \vec{r}_{ij}}{\partial u^k} = \frac{\partial \vec{r}_{ik}}{\partial u^j},$$

δηλαδή $\vec{r}_{ijk} = \vec{r}_{ikj}$. Από τους τύπους Gauss, παραγωγίζοντας, παίρνουμε

$$\vec{r}_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial u^k}\vec{r}_l + \Gamma^l_{ij}\vec{r}_{kl} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k}\hat{n} + b_{ij}\hat{n}_k.$$

Στην παραπάνω σχέση αντικαθιστούμε τις ποσότητες $\hat{n}_k$ με τις ίσες από τους τύπους Weingarten και τις ποσότητες $\vec{r}_{kl}$ με τις ίσες τους από τους τύπους Gauss και εκτελώντας κάποιες πράξεις παίρνουμε

$$\vec{r}_{ijk} = (\frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma^m_{ij}\Gamma^l_{mk} - b_{ij}b^l_k)\vec{r}_l + (\Gamma^q_{ij}b_{qk} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k})\hat{n} \tag{34}$$

Εναλλάσσοντας τους δείκτες j και k παίρνουμε

$$\vec{r}_{ikj} = (\frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial u^j} + \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{mj} - b_{ik}b^l_j)\vec{r}_l + (\Gamma^q_{ik}b_{qj} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial u^j})\hat{n} \tag{35}$$

Όμως $\vec{r}_{ijk} = \vec{r}_{ikj}$ και τα διανύσματα $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ και $\hat{n}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς για να ισχύει η ισότητα $\vec{r}_{ijk} = \vec{r}_{ikj}$, εάν αφαιρέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (34) και (35) παραπάνω και βγάλουμε τα διανύσματα $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ και $\hat{n}$ κοινό παράγοντα, θα πρέπει οι συντελεστές που προκύπτουν μπροστά από τα 3 αυτά διανύσματα να μηδενίζονται. Τότε για τον συντελεστή που προκύπτει μπροστά από το διάνυσμα $\hat{n}$ από την αφαίρεση κατά μέλη των (34) και (35) παίρνουμε

$$\Gamma^l_{ij}b_{kl} - \Gamma^m_{ik}b_{mj} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial u^j} = 0 \tag{36}$$

Οι εξισώσεις (36) είναι οι *τύποι Mainardi-Codazzi.*

Ορισμός 1. Οι ποσότητες

$$R^l_{ikj} := b_{ij}b^l_k - b_{ik}b^l_j$$

αποτελούν τις συνιστώσες ενός τανυστή τύπου (1,3) που λέγεται *μικτή τανυστική καμπυλότητα Riemann.*

Από τον Ορισμό 1, την αφαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (34) και (35), και επειδή θέσαμε τον συντελεστή που προκύπτει μπροστά από το διάνυσμα $\vec{r_l}$ (αφού το βγάλουμε κοινό παράγοντα) ίσο με μηδέν, προκύπτει ότι

$$R^l_{ikj} = \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial u^j} + \Gamma^m_{ij}\Gamma^l_{mk} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{mj}. \tag{37}$$

Ορισμός 2. Με τη βοήθεια της μετρικής ορίζουμε και την *συναλλοίωτη τανυστική καμπυλότητα Riemann*:

$$R_{ijkl} = R^m_{jkl} g_{im}.$$

Σημείωση 1: Τόσο τα σύμβολα Christoffel, σχέση (33), όσο και η τανυστική καμπυλότητα Riemann, σχέση (37), είναι ποσότητες που ορίζονται μέσω της μετρικής Ρήμαν (πρώτη θεμελιώδης μορφή της επιφάνειας). Συνεπώς μπορούν, χωρίς αλλαγές στους αντίστοιχους τύπους, άμεσα να ορισθούν τόσο και για γενικευμένες επιφάνειες (δηλαδή επιφάνειες που δεν είναι κατ΄ ανάγκη εμφυτευμένες στον χώρο $\mathbb{R}^3$), αλλά και για πολλαπλότητες διάστασης μεγαλύτερης από 2, που όμως όλες (και οι γενικευμένες επιφάνειες και οι πολλαπλότητες μεγαλύτερης από 2 διάστασης), είναι εφοδιασμένες με μια μετρική Ρήμαν.

Σημείωση 2: Η συναλλοίωτη τανυστική καμπυλότητα Ρήμαν μιας επιφάνειας αποτελείται από $2^4 = 16$ ποσότητες. Όμως υπάρχουν συμμετρίες μεταξύ ζευγών δεικτών και αντισυμμετρίες μεταξύ δεικτών στο ίδιο ζεύγος. Συνεπώς τελικά σε μια επιφάνεια μόνο 4 συνιστώσες είναι μη-μηδενικές και μόνο 2 είναι διαφορετικές (αλλά αντίθετες) μεταξύ τους:

$$R_{1212} = R_{2121} = b_{22}b_{11} - (b_{12})^2 = det(b)$$

και

$$R_{2112} = R_{1221} = (b_{12})^2 - b_{22}b_{11} = -det(b).$$

Για λόγους πληρότητας αλλά και για ευκολία στον αναγνώστη, παραθέτουμε τον τύπο που δίδει εκπεφρασμένα την καμπυλότητα Gauss σαν συνάρτηση της μετρικής Ρήμαν (πρώτη θεμελιώδη μορφή):

Πρόταση 2. Η καμπυλότητα Gauss K μιας επιφάνειας Ρήμαν δίδεται από την παρακάτω σχέση μεταξύ οριζουσών:

$$K = \frac{1}{(\det g)^2} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & (\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}) \\ g_{12} & g_{22} & \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} & (\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}) & [-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{(\partial u^2)^2} + \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial u^1)^2}] \end{vmatrix} -$$

$$-\frac{1}{(\det g)^2}\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \\ g_{12} & g_{22} & \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} & \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} & 0 \end{vmatrix}$$

Απόδειξη: Η απόδειξη της πρότασης ουσιαστικά είναι μια επανάληψη των αποδείξεων του θεωρήματος του Gauss (θεώρημα 22.1.1) χρησιμοποιώντας τανυστικό φορμαλισμό (βλέπε [26]). □

Σημείωση 3. Από την πρόταση φαίνεται ξεκάθαρα πως η καμπυλότητα Gauss δεν εξαρτάται από την δεύτερη θεμελιώδη μορφή καθώς στον τύπο εμφανίζεται μόνο η πρώτη θεμελιώδης μορφή και οι παράγωγοι αυτής. Ο τύπος ισχύει για κάθε Ρημάνεια επιφάνεια (όχι κατ΄ ανάγκη εμφυτευμένη στον $\mathbb{R}^3$ αλλά εφοδιασμένη με μια μετρική Ρήμαν).

26 Το Υπερβολικό Επίπεδο

Είδαμε στο θεώρημα 24.3.1 ότι μια μετρική με σταθερή αρνητική καμπυλότητα Gauss $K = -1$, μοντελοποιείται στο άνω ημιεπίπεδο $H \subset \mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με την μετρική

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

που λέγεται *μετρική Poincaré*. Το άνω ημιεπίπεδο H εφοδιασμένο με την μετρική Poincaré λέγεται *υπερβολικό επίπεδο*.

Το υπερβολικό επίπεδο έχει μεγάλη σημασία για την γεωμετρία διότι αποτελεί το πρώτο ιστορικά παράδειγμα μιας γεωμετρίας, στην οποία οι γεωδαισιακές παίζουν τον ρόλο των ευθειών, η οποία ικανοποιεί όλα τα αξιώματα του Ευκλείδη εκτός από το *αίτημα της παραλληλίας*.

Θα αρχίσουμε την μελέτη του υπερβολικού επιπέδου με την εξής σημαντική παρατήρηση:

Έστω $D = \{u + iv \in \mathbb{C} | u^2 + v^2 < 1\}$ ο μοναδιαίος δίσκος στο επίπεδο (Argand), εφοδιασμένος με την εξής πρώτη θεμελιώδη μορφή (μετρική)

$$\frac{4(du^2 + dv^2)}{(1 - u^2 - v^2)^2}.$$

Έστω επίσης $H \subset \mathbb{C}$ το άνω ημιεπίπεδο του επιπέδου (Argand), δηλαδή $H = \{x + iy \in \mathbb{C} | y > 0\}$, εφοδιασμένο με την μετρική Poincaré

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει μια *ισομετρία* από το H στο D που δίδεται από την σχέση (μετασχηματισμός Möbius)

$$w \mapsto z = \frac{w - i}{w + i},$$

όπου $w = x + iy \in H$ και $z = u + iv \in D$ και $|dw|^2 = dx^2 + dy^2$ ενώ $|dz|^2 = du^2 + dv^2$. Εάν $w = f(z)$, όπου η $f : D \to H$ είναι ολόμορφη (δηλαδή ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy-Riemann), τότε

$$f'(z) = x_u + iy_u = y_v - ix_v,$$

οπότε

$$|f'(z)|^2 |dz|^2 = (x_u^2 + y_u^2)(du^2 + dv^2) = (x_u du + x_v dv)^2 + (y_u du + y_v dv)^2 = dx^2 + dv^2 = |dw|^2.$$

Συνεπώς μπορούμε να κάνουμε την αντικατάσταση

$$|dw|^2 = |\frac{dw}{dz}|^2|dz|^2$$

για να δούμε πως μετασχηματίζεται η πρώτη θεμελιώδης μορφή κάτω από μια τέτοια απεικόνιση. Ο μετασχηματισμός Möbius

$$w \mapsto z = \frac{w-i}{w+i},$$

περιορίζεται σε μια λεία αμφεικόνιση από το H στο D διότι $w \in H \Leftrightarrow |w-i| < |w+i|$ ενώ η αντίστροφη απεικόνιση αποτελεί επίσης μετασχηματισμό Möbius, οπότε είναι επίσης λεία. Από τις δύο παραπάνω σχέσεις υπολογίζουμε:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{w+i} - \frac{w-i}{(w+i)^2} = \frac{2i}{(w+i)^2}$$

την οποία αντικαθιστούμε στην μετρική Poincaré

$$\frac{|dw|^2}{y^2}$$

του H και χρησιμοποιώντας και τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε τελικά

$$\frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2},$$

που είναι ακριβώς η μετρική του D, συνεπώς ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός Möbius) δίδει την επιθυμητή ισομετρία από το H στο D.

26.1 Ισομετρίες του Υπερβολικού Επιπέδου

Θα μελετήσουμε στη συνέχεια τις ισομετρίες του υπερβολικού επιπέδου H.

Υπενθυμίζουμε από την μιγαδική ανάλυση πως οι μετασχηματισμοί Möbius του μιγαδικού επιπέδου (επίπεδο Argand)

$$z \mapsto w = \frac{az+b}{cz+d},$$

όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ και $ad - bc > 0$, έχουν τις εξής ιδιότητες:
(α). απεικονίζουνε ευθείες και κύκλους σε ευθείες και κύκλους

(β). είναι σύμμορφοι μετασχηματισμοί, δηλαδή διατηρούν τις γωνίες.

Εάν $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ και $ad - bc > 0$, τότε οι γενικοί μετασχηματισμοί Möbius ολόκληρου του επιπέδου

$$z \mapsto w = \frac{az + b}{cz + d},$$

περιορίζονται σε λείες αμφεικονίσεις από το H στον εαυτό του με λείες αντίστροφες απεικονίσεις

$$w \mapsto z = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Εάν αντικαταστήσουμε τις

$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

και

$$dw = [\frac{a}{cz + d} - \frac{c(az + b)}{(cz + d)^2}]dz = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}dz$$

στην, $(w = u + iv)$,

$$\frac{du^2 + dv^2}{v^2} = \frac{4|dw|^2}{|w - \bar{w}|^2}$$

θα πάρουμε, $(z = x + iy)$:

$$\frac{4(ad - bc)^2|dz|^2}{|(az + b)(c\bar{z} + d) - (a\bar{z} + b)(cz + d)|^2} = \frac{4(ad - bc)^2|dz|^2}{|(ad - bc)(z - \bar{z})|^2} =$$

$$= \frac{4|dz|^2}{|z - \bar{z}|^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Συνεπώς οι μετασχηματισμοί Möbius αποτελούν ισομετρίες του H, όπως επίσης και ο μετασχηματισμός $z \mapsto -\bar{z}$, (οι μετασχηματισμοί $z \mapsto \bar{z}$ και $z \mapsto -z$ μας πάνε στο κάτω ημιεπίπεδο), συνεπώς η σύνθεση

$$z \mapsto \frac{b - a\bar{z}}{d - c\bar{z}}$$

αποτελεί επίσης ισομετρία του H. Οι παραπάνω περιπτώσεις εξαντλούν όλες τις ισομετρίες του H όπως θα δούμε.

Είδαμε όμως στην αρχή του κεφαλαίου ότι το υπερβολικό επίπεδο H είναι ισομετρικό με τον μοναδιαίο δίσκο D εφοδιασμένο με την μετρική

$$\frac{4(du^2 + dv^2)}{(1 - u^2 - v^2)^2},$$

συνεπώς κάθε πρόταση που αφορά τις ισομετρίες του H ισχύει και για το D. Μερικές φορές η εικόνα είναι ευκολότερη στο ένα μοντέλο και μερικές φορές στο άλλο. Οι ισομετρίες του μοντέλου του μοναδιαίου δίσκου D για το υπερβολικό επίπεδο, αποτελούνται επίσης από μετασχηματισμούς Möbius εάν διατηρούν τον προσανατολισμό ή από την σύνθεση μετασχηματισμών Möbius με τον μετασχηματισμό $z \mapsto -\bar{z}$ εάν αντιστρέφουν τον προσανατολισμό. Οι μετασχηματισμοί Möbius που απεικονίζουν το D στον εαυτό του είναι εκείνοι της μορφής

$$z \mapsto w = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

όπου $a \in D$ και $\theta \in \mathbb{R}$. Αποτελούν ισομετρίες διότι εάν αντικαταστήσουμε τα w και dw αντίστοιχα, από τις σχέσεις

$$w = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

και

$$dw = e^{i\theta}\frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}dz$$

στην μετρική ($w = u + iv$)

$$\frac{4|dw|^2}{(1-|w|^2)^2},$$

θα πάρουμε

$$\frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}.$$

Σημειώνουμε πως η ομάδα $Isom(H)$ των ισομετριών του H δρα μεταβατικά (transitively) στο H διότι εάν $a+ib \in H$, τότε $b > 0$, οπότε ο μετασχηματισμός

$$z \mapsto bz + a$$

αποτελεί ισομετρία του H που απεικονίζει το i στο $a + ib$. Όμοια, η ομάδα $Isom(D)$ των ισομετριών του D δρα μεταβατικά στο D αφού εάν $a \in D$, τότε η ισομετρία

$$z \mapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

απεικονίζει το a στο 0. Σημειώνουμε επίσης ότι η υποομάδα $Isom(D)$ που αποτελείται από εκείνες τις ισομετρίες που σταθεροποιούν το 0, περιέχει όλες τις στροφές

$$z \mapsto e^{i\theta}z$$

γύρω από το 0 καθώς και τις ισομετρίες $z \mapsto \bar{z}$.

26.2 Γεωδαισιακές του Υπερβολικού Επιπέδου

Στο υπερβολικό επίπεδο, οι εξισώσεις των γεωδαισιακών επιλύονται εύκολα: έχουμε ότι $E = G = 1/y^2$ και $F = 0$ ενώ ταυτόχρονα είναι ανεξάρτητα του x, συνεπώς η πρώτη εξίσωση των γεωδαισιακών

$$\frac{d}{ds}(E\dot{u} + F\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2)$$

δίδει

$$\frac{d}{ds}(\frac{\dot{x}}{y^2}) = 0,$$

οπότε

$$\dot{x} = cy^2.$$

Γνωρίζουμε επίσης πως η παράμετρος είναι το μήκος τόξου, συνεπώς

$$\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2} = 1.$$

Εάν $c = 0$, παίρνουμε $x =$σταθ., εξίσωση που περιγράφει μια *κάθετη* (παράλληλη στον άξονα $y'y$) *ευθεία* του επιπέδου (ακριβέστερα μια κάθετη ημιευθεία διότι ασχολούμστε με το άνω ημιεπίπεδο).
Εάν υποθέσουμε ότι $c \neq 0$, τότε από τις σχέσεις

$$\dot{x} = cy^2.$$

και

$$\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2} = 1$$

θα πάρουμε

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y^2 - c^2y^4}{c^2y^4}},$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{cydy}{\sqrt{1 - c^2y^2}} = dx,$$

την οποία εάν ολοκληρώσουμε θα πάρουμε

$$-\frac{1}{c}\sqrt{1 - c^2y^2} = x - a,$$

ή ισοδύναμα

$$(x - a)^2 + y^2 = 1/c^2,$$

εξίσωση που περιγράφει ένα ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου, του οποίου το κέντρο βρίσκεται πάνω στον πραγματικό άξονα.

Συνεπώς οι γεωδαισιακές του υπερβολικού επιπέδου είναι κάθετες ημιευθείες και ημικύκλια των οποίων τα κέντρα βρίσκονται στον πραγματικό άξονα.

Η ισομετρία που δίδεται από τον μετασχηματισμό

$$w \mapsto z = \frac{w-i}{w+i},$$

απεικονίζει γεωδαισιακές σε γεωδαισιακές, (αφού είναι ισομετρία), και αποτελεί τον περιορισμό στο H ενός μετσχηματισμού Möbius $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ο οποίος απεικονίζει κύκλους και ευθείες σε κύκλους και ευθείες, διατηρεί τις γωνίες και απεικονίζει τον πραγματικό άξονα στον μοναδιαίο κύκλο του $\mathbb{C}$. Έπεται συνεπώς ότι οι γεωδαισιακές του D είναι οι κύκλοι και οι ευθείες στο D που τέμνουν τον μοναδιαίο κύκλο σε ορθές γωνίες.

Χρησιμοποιώντας τις γεωδαισιακές, μπορούμε να δείξουμε πως κάθε ισομετρία είναι μετασχηματισμός Möbius όπως οι παραπάνω: Υποθέτουμε ότι η $F : D \to D$ είναι μια ισομετρία. Θεωρούμε μια ισομετρία Möbius G η οποία αντιστοιχεί το $F(0)$ στο 0, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι η GF είναι Möbius. Αυτή είναι μια ισομετρία που σταθεροποιεί το 0, συνεπώς απεικονίζει γεωδαισιακές που διέρχονται από το 0 σε γεωδαισιακές που διέρχονται από το 0. Διατηρεί τις γωνίες, συνεπώς δρα σε εκείνες τις γεωδαισιακές μέσω στροφής ή ανάκλασης. Επίσης διατηρεί τις αποστάσεις, οπότε αντιστοιχεί ένα σημείο που απέχει απόσταση r από το 0 σε κάποιο άλλο σημείο που επίσης απέχει απόσταση r από το 0. Όμως, όπως σημειώσαμε πιο πάνω, κάθε στροφή $R : z \mapsto e^{i\theta} z$ αποτελεί ισομετρία Möbius, συνεπώς θεωρώντας την σύνθεση με αυτήν, βλέπουμε πως $RGF = 1$ και η $F = (RG)^{-1}$ αποτελεί ισομετρία Möbius.

Σημείωση 1: Υπενθυμίζουμε ότι σε κάποιον τυχαίο μετρικό χώρο (X, d), το μήκος μιας συνεχούς καμπύλης $\gamma : [a, b] \to X$ ορίζεται ως το ελάχιστο άνω φράγμα (supremum) της ποσότητας

$$\sum_{i=1}^{n} d[\gamma(a_{i-1}), \gamma(a_i)],$$

όπου το $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ διατρέχει όλες τις διαμερίσεις του διαστήματος $[a, b]$. Έπεται πως η καμπύλη γ αποτελεί γεωδαισιακή εάν το μήκος της είναι ίσο με $d[\gamma(a), \gamma(b)]$.

26.3 Γωνίες και Αποστάσεις

Οι υπερβολικές γωνίες στο H και στο D είναι ίδιες με τις Ευκλείδειες γωνίες, αφού οι πρώτες θεμελιώδεις μορφές και των δύο αυτών μετρικών ικανοποιούν τις σχέσεις $E = G$ και $F = 0$. Οι αποστάσεις μεταξύ σημείων δίδονται από τα μήκη των γεωδαισιακών που ενώνουν τα σημεία. Αφού το διάστημα $(-1, 1)$ αποτελεί γεωδαισιακή του μοναδιαίου δίσκου D, η απόσταση από το 0 μέχρι κάποιο τυχαίο σημείο $x \in (0, 1)$, δίδεται από το υπερβολικό μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $[0, x]$, το οποίο είναι ίσο με

$$\int_0^x \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}ds = \int_0^x \frac{ds}{1 - s^2} = 2\tanh^{-1} x,$$

όπου $u(s) = s$, $v(s) = 0$, $E = G = (1 - u^2 - v^2)^{-2}$ και $F = 0$. Δοθέντων δύο τυχαίων $a, b \in D$, μπορούμε να επιλέξουμε κάποιο $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η ποσότητα

$$e^{i\theta}\frac{b - a}{1 - \bar{a}b} = |\frac{b - a}{1 - \bar{a}b}|$$

να είναι πραγματική και θετική, οπότε η απόσταση από το 0 να είναι

$$2\tanh^{-1}|\frac{b - a}{1 - \bar{a}b}|.$$

Αφού η ισομετρία

$$z \mapsto e^{i\theta}\frac{b - a}{1 - \bar{a}b}$$

διατηρεί τις αποστάσεις και απεικονίζει το a στο 0 και το b στο $e^{i\theta}(b - a)/(1 - \bar{a}b)$, έπεται πως η υπερβολική απόσταση από το a στο b εντός του D είναι

$$d_D(a, b) = 2\tanh^{-1}|\frac{b - a}{1 - \bar{a}b}|.$$

Μπορούμε να βρούμε τις υπερβολικές αποστάσεις στο H με παρόμοιο τρόπο: υπολογίζουμε πρώτα την απόσταση μεταξύ των i και λi, για $\lambda \in [1, \infty)$ ως το μήκος της γεωδαισιακής από το i στο λi που δίδεται από τον φανταστικό άξονα, η οποία είναι

$$\int_1^\lambda \frac{ds}{s} = \log \lambda,$$

και στην συνέχεια, δοθέντων των $a, b \in H$, βρίσκουμε μια ισομετρία του H η οποία απεικονίζει το a στο i και το b στο λi, για κάποιο $\lambda \in [1, \infty)$. Εναλλακτικά, αφού έχουμε μια ισομετρία από το H στο D που δίδεται από την σχέση

$$w \mapsto z = \frac{w - i}{w + i},$$

η υπερβολική απόσταση μεταξύ των σημείων $a, b \in H$ είναι ίση με την υπερβολική απόσταση μεταξύ των αντίστοιχων σημείων $(a-i)/(a+i)$ και $(b-i)/(b+i)$ εντός του D, η οποία είναι

$$d_H(a,b) = d_D(\frac{a-i}{a+i}, \frac{b-i}{b+i}) = 2\tanh^{-1}|\frac{(b-i)(a+i)-(a-i)(b+i)}{\overline{(a+i)}(b+i)-\overline{(a-i)}(b-i)}| =$$

$$= 2\tanh^{-1}|\frac{b-a}{b-\bar{a}}|.$$

Ορισμός 1. Οι τύποι που δίδουν τις αποστάσεις

$$d_D(a,b) = 2\tanh^{-1}|\frac{b-a}{1-\bar{a}b}|$$

και

$$d_H(a,b) = 2\tanh^{-1}|\frac{b-a}{b-\bar{a}}|$$

μεταξύ δύο σημείων a, b στο μοναδιαίο δίσκο D και στο άνω μιγαδικό ημιεπίπεδο H αντίστοιχα, λέγονται *αποστάσεις Poincaré.*

Σημείωση 1: Παρατηρούμε ότι έαν εφαρμόσουμε τον τύπο που δίδει την απόσταση Poincaré μεταξύ δύο σημείων z, $z+\Delta z \in D$ που είναι απειροστά κοντά, θα πάρουμε

$$d_D(z, z+\Delta z) \simeq \frac{2|\Delta z|}{1-|z|^2}.$$

Συνεπώς εάν $\vec{\gamma}(s) : [a,b] \to D$ είναι μια λεία καμπύλη, όπου s το μήκος τόξου της καμπύλης, τότε το μήκος Poincaré της καμπύλης θα είναι

$$L(\gamma) = \int_a^b \frac{2|\dot{\vec{\gamma}}|}{1-|\vec{\gamma}|^2} ds = \int_a^b \frac{2\sqrt{\dot{u}^2+\dot{v}^2}}{1-u^2-v^2} ds,$$

όπου $\vec{\gamma}(s) = u(s) + iv(s)$. Συνεπώς το $L(\gamma)$ δίδεται από την γνωστή σχέση της παραγράφου 20.1 που περιγράφει το μήκος μιας καμπύλης σε μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$, εάν θεωρήσουμε ως πρώτη θεμελιώδη μορφή της επιφάνειας την

$$\frac{4(du^2+dv^2)}{(1-u^2-v^2)^2}.$$

Η παρατήρηση αυτή εξηγεί πως την σκεφτήκαμε αυτή τη μετρική στον μοναδιαίο δίσκο. Σημειώνουμε πάντως πως αυτή είναι μια αφηρημένη μετρική του μοναδιαίου δίσκου η οποία, μέχρι στιγμής, δεν προκύπτει από κάποια συγκεκριμένη εμφύτευση $\vec{r}(u,v) : D \to \mathbb{R}^3$! Παρά ταύτα, μπορούμε να υπολογίσουμε την καμπυλότητα Gauss από το θεώρημα 22.3.2 (διότι η παραπάνω μετρική έχει $E = G$ και $F = 0$), και θα πάρουμε

$$K = -\frac{1}{2}E^{-1} \triangle (\log E),$$

όπου

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

είναι ο τελεστής Laplace. Επειδή η συγκεκριμένη μετρική έχει $E = 4(1-u^2-v^2)^2$, βλέπουμε πως $K = -1$, σε συμφωνία με το θεώρημα 24.3.1.

26.4 Υπερβολικά Τρίγωνα

Ένα υπερβολικό τρίγωνο Δ δίδεται από τρία διαφορετικά σημεία στο H ή στο D που ενώνονται με γεωδαισιακές. Βλέπουμε άμεσα από το θεώρημα Gauss-Bonnet (θεώρημα 23.2.2, παράδειγμα 23.2.2) ότι το άθροισμα των γωνιών ενός υπερβολικού τριγώνου είναι

$$A + B + C = \pi - Area(\Delta).$$

Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε υπερβολικά τρίγωνα που έχουν μία ή περισσότερες κορυφές *στο άπειρο*, δηλαδή στο σύνορο του H ή του D. Αυτά τα τρίγωνα λέγονται *ασυμπτωτικά*, *διασυμπτωτικά* και *τριασυμπτωτικά*, ανάλογα με το πόσες κορυφές στο άπειρο έχουν. Η γωνία σε μια κορυφή στο άπειρο είναι πάντα 0.

Για τα υπερβολικά τρίγωνα έχουμε τα εξής θεωρήματα:

Θεώρημα 1. (*Νόμος συνημιτόνου για υπερβολικά τρίγωνα*). Εάν Δ είναι ένα υπερβολικό τρίγωνο στο D με κορυφές a, b, c και πλευρές $\alpha = d_D(b,c), \beta = d_D(a,c)$ και $\gamma = d_D(a,b)$, τότε

$$\cosh\gamma = \cosh\alpha\cosh\beta - \sinh\alpha\sinh\beta\cos\theta,$$

όπου θ η εσωτερική γωνία του Δ στην κορυφή c.

Απόδειξη: Επειδή η ομάδα ισομετριών του D δρα μεταβατικά στο D, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε πως $c = 0$. Επιπλέον, αφού οι στροφές $z \mapsto e^{i\phi}z$ αποτελούν ισομετρίες που σταθεροποιούν το 0, μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι το a είναι πραγματικό και θετικό. Τότε $\beta = 2\tanh^{-1} a$, οπότε

$$a = \tanh(\beta/2)$$

και όμοια
$$b = e^{i\theta}\tanh(\alpha/2)$$
ενώ
$$\tanh(\gamma/2) = |\frac{b-a}{1-\bar{a}b}|.$$
Υπενθυμίζουμε ότι
$$\frac{1+\tanh^2(\gamma/2)}{1-\tanh^2(\gamma/2)} = \cosh\gamma$$
οπότε
$$\cosh\gamma = \frac{|1-\bar{a}b|^2 + |b-a|^2}{|1-\bar{a}b|^2 - |b-a|^2} = \frac{(1+|a|^2)(1+|b|^2) - 2(\bar{a}b + a\bar{b})}{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}.$$
Τώρα
$$\frac{1+|a|^2}{1-|a|^2} = \frac{1+\tanh^2(\beta/2)}{1-\tanh^2(\beta/2)} = \cosh\beta$$
όπως παραπάνω, και όμοια
$$\frac{1+|b|^2}{1-|b|^2} = \cosh\alpha$$
ενώ
$$\frac{2(\bar{a}b + a\bar{b})}{(1-|a|^2)(1-|b|^2)} = \frac{2\tanh(\alpha/2)\tanh(\beta/2)(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{sech^2(\alpha/2)sech^2(\beta/2)} = \sinh\alpha\sinh\beta\cos\theta,$$
και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Σημείωση 1: Ο όρος νόμος συνημιτόνου δικαιολογείται από το γεγονός ότι εάν οι πλευρές α, β γ του υπερβολικού τριγώνου είναι μικρές, χρησιμοποιούμε τις προσεγγίσεις $\sinh\alpha \simeq \alpha$, $\cosh\alpha \simeq 1 + 1/2\alpha^2$ κ.λ.π. οπότε ο υπερβολικός τύπος του συνημιτόνου δίδει τον γνωστό Ευκλείδειο τύπο $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta$.

Θεώρημα 2. (*Νόμος ημιτόνου για υπερβολικά τρίγωνα*). Εάν Δ είναι ένα υπερβολικό τρίγωνο στο D με κορυφές a, b, c, εσωτερικές γωνίες A, B, C και πλευρές $\alpha = d_D(b,c), \beta = d_D(a,c)$ και $\gamma = d_D(a,b)$, τότε
$$\frac{\sin A}{\sinh\alpha} = \frac{\sin B}{\sinh\beta} = \frac{\sin C}{\sinh\gamma}.$$

Απόδειξη: Υπάρχουν δύο τρόποι για την απόδειξη:
(α). Χρησιμοποιούμε τον νόμο του συνημιτόνου για να βρούμε μια έκφραση

για το $\sinh^2\alpha\sinh^2\beta\sin^2 C$ σαν συνάρτηση των $\cosh\alpha, \cosh\beta$ και $\cosh\gamma$ που να είναι συμμετρική στα α, β και γ και κατόπιν συνάγουμε ότι

$$\sinh^2\alpha\sinh^2\beta\sin^2 C = \sinh^2\alpha\sinh^2\gamma\sin^2 B = \sinh^2\gamma\sinh^2\beta\sin^2 A$$

(β). Αποδεικνύουμε πρώτα ότι εάν $C = \pi/2$, τότε $\sin A\sinh\gamma = \sinh\alpha$, εφαρμόζοντας τον νόμο συνημιτόνου στο Δ με δύο τρόπους. Κατόπιν το γενικό αποτέλεσμα συνάγεται φέροντας μια κάθετη από μια κορυφή του Δ στην απέναντι πλευρά. $\square$

Η απόσταση Poincaré του μοναδιαίου δίσκου D (βλέπε ορισμό 26.3.1) αποτελεί μια θετική συμμετρική συνάρτηση των $a, b \in D$ η οποία μηδενίζεται όταν $a = b$. Για να δικαιολογήσουμε τον όρο *απόσταση*, θα πρέπει να ικανοποιεί την *τριγωνική ανισότητα*. Επειδή εκ κατασκευής είναι αναλλοίωτη κάτω από την δράση της ομάδας των ισομετριών του D, αρκεί να αποδείξουμε την τριγωνική ανισότητα για την εξής ειδική περίπτωση:

Θεώρημα 3. Εάν $a, b \in D$, τότε

$$d_D(0, a) + d_D(0, b) \geq d_D(a, b),$$

με το σημείο της ισότητας να ισχύει εάν και μόνο εάν ο λόγος a/b είναι πραγματικός και αρνητικός.

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε τον νόμο του συνημιτόνου (Θεώρημα 1 αυτής της παραγράφου) για την περίπτωση του υπερβολικού τριγώνου με κορυφές τα σημεία a, b και 0 και πλευρές τις $\alpha = d_D(0, a)$, $\beta = d_D(0, b)$ και $\gamma = d_D(a, b)$. Η απόδειξη έπεται από τον νόμο του συνημιτόνου διότι $\cos\theta \geq 1$, $(\theta = arg(b/a))$, οπότε

$$\cosh\gamma \leq \cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta = \cosh(\alpha + \beta),$$

με το σημείο της ισότητας να ισχύει όταν $\theta = \pi$. $\square$

Σημείωση 2: Για την απόσταση Poincaré που ορίσαμε στον μοναδιαίο δίσκο D μέσω του ορισμού 26.3.1, από το Θεώρημα 3 παραπάνω έπεται πως κάθε ευθύγραμμο τμήμα του πραγματικού άξονα αποτελεί γεωδαισιακή και επίσης είναι η μοναδική καμπύλη *ελάχιστου μήκους* που ενώνει δύο τυχαία σημεία. Όμως μέσω της ομάδας των ισομετριών του D, μπορούμε να μετακινούμε δύο οποιαδήποτε σημεία του D πάνω στον πραγματικό άξονα, συνεπώς καταλήγουμε στην εξής πρόταση:
Υπάρχει μοναδική γεωδαισιακή που ενώνει δύο τυχαία σημεία του D.

26.5 Εμβαδά στο Υπερβολικό Επίπεδο

Θεωρώντας στο μοναδιαίο δίσκο D την πρώτη θεμελιώδη μορφή

$$\frac{4(du^2 + dv^2)}{(1 - u^2 - v^2)^2},$$

ορίζουμε το εμβαδόν ενός χωρίου $R \subset D$ μέσω της παρακάτω σχέσης:

$$Area(R) = \int_R \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2} du dv.$$

Σε αυτή την παράγραφο θα υπολογίσουμε το εμβαδόν υπερβολικών τριγώνων.

♠ Δύο τυχαία τριασυμπτωτικά υπερβολικά τρίγωνα είναι μεταξύ τους *σύμφωνα (congruent)* διότι η ομάδα των ισομετριών του D (που όπως είδαμε δεν είναι άλλη από την ομάδα των μετασχηματισμών Möbius του επιπέδου Argand περιορισμένων στο μοναδιαίο δίσκο D), θα μετακινήσουν μια τυχαία τριάδα σημείων του κύκλου $|z| = 1$ σε δύο άλλα τυχαία σημεία.

♠ Δύο τυχαία διασυμπτωτικά υπερβολικά τρίγωνα είναι μεταξύ τους *σύμφωνα* εάν οι γωνίες τους είναι ίσες (στην μοναδική κορυφή τους που δεν είναι στο άπειρο), διότι μέσω μιας ισομετρίας μπορούμε να μετακινήσουμε δυο γραμμές που τέμνονται υπό γωνία έστω a σε δύο άλλες γραμμές που τέμνονται υπό την ίδια γωνία.

Με μια σχετική έκπληξη θα δούμε πως τα εμβαδά όλων αυτών των άπειρων τριγώνων είναι πεπερασμένα:

Θεώρημα 1. (*Εμβαδά Υπερβολικών Τριγώνων*)
(α). Το εμβαδόν ενός τριασυμπτωτικού υπερβολικού τριγώνου είναι π.
(β). Το εμβαδόν ενός διασυμπτωτικού υπερβολικού τριγώνου με εσωτερική γωνία a είναι $\pi - a$.
(γ). Το εμβαδόν ενός ασυμπτωτικού υπερβολικού τριγώνου με εσωτερικές γωνίες a, b είναι $\pi - a - b$.
(δ). Το εμβαδόν ενός υπερβολικού τριγώνου με εσωτερικές γωνίες a, b και c είναι $\pi - a - b - c$.

Απόδειξη: Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Gauss-Bonnet (διάφορες εκδόσεις). Θα αποδείξουμε ότι **(α).** $\Rightarrow$ **(β).** $\Rightarrow$ **(δ).** (όμοια και το **(γ).**) και θα αποδείξουμε το **(α).** με απευθείας υπολογισμό.

Έστω A_a το εμβαδόν ενός διασυμπτωτικού υπερβολικού τριγώνου με εσωτερική γωνία a. Από το σχήμα βλέπουμε πως το A_a αποτελεί φθίνουσα συνάρτηση της γωνίας a. Από σχήμα βλέπουμε επίσης ότι

$$A_a + A_b = A_{a+b} + \pi,$$

υποθέτοντας πως το εμβαδόν ενός τριασυμπτωτικού τριγώνου είναι π. Εάν $F(a) = \pi - A_a$, έπεται πως

$$F(a) + F(b) = F(a + b).$$

Επειδή η F είναι αύξουσα και προσθετική, συμπεραίνουμε ότι $F(a) = \lambda a$, για κάποιο $\lambda > 0$ το οποίο δεν εξαρτάται από το a και συνεπώς $A_a = \pi - \lambda a$. Όμως από σχήμα βλέπουμε ότι $A_a + A_{\pi-a} = \pi$, από το οποίο έπεται το επιθυμητό ότι $\lambda = 1$.

Για να αποδείξουμε ότι **(β).** $\Rightarrow$ **(δ).**, και πάλι καταφεύγουμε σε σχήμα από το οποίο βλέπουμε ότι

$$area(ABC) + area(A'CB') + area(A'B'C') = area(AB'C') + area(A'BC'),$$

οπότε

$$area(ABC) + [\pi - (\pi - c)] + \pi = (\pi - a) + (\pi - b)$$

και

$$area(ABC) = \pi - a - b - c.$$

Τελικά, για να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός τριασυμπτωτικού υπερβολικού τριγώνου, είναι καλύτερα να θεωρήσουμε το μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου H για το υπερβολικό επίπεδο. Θεωρούμε το τρίγωνο που έχει ως σύνορο τις ευθείες $y = -1$, $y = +1$ και το ημικύκλιο $x^2 + y^2 = 1$. Από την πρώτη θεμελιώδη μορφή $(dx^2 + dy^2)/y^2$ βλέπουμε ότι το στοιχειώδες εμβαδόν είναι $dxdy/y^2$, οπότε το τριασυμπτωτικό υπερβολικό τρίγωνο έχει εμβαδόν

$$\int_{-1}^{+1} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{a} \frac{dy}{y^2} = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

□

26.6 Μη-Ευκλείδεια Γεωμετρία

Το εναρκτήριο σημείο της Ευκλείδειας γεωμετρίας του επιπέδου ήταν μια συλλογή από αξιώματα σχετικά με την δυνατότητα ματακίνησης πραγμάτων στο επίπεδο. Έτσι, η βάση του ορισμού του μήκους για παράδειγμα είναι ότι η απόσταση AB είναι ίση με την απόσταση $A'B'$ εάν όταν εφαρμόσουμε το ευθύγραμμο τμήμα AB πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $A'B'$ έτσι ώστε το σημείο A να συμπέσει (να *συμφωνήσει*) με το σημείο A', τότε το σημείο B θα συμπέσει με το σημείο B'. Στην σύγχρονη γλώσσα της γεωμετρίας (πρόγραμμα Erlangen του Felix Klein στις αρχές του 20ου αιώνα), υποθέτουμε πως δίδεται μια ομάδα μετασχηματισμών του επιπέδου η οποία μεταφέρει κάποιο τυχαίο σημείο P του επιπέδου σε κάποιο άλλο σημείο Q του επιπέδου και κάθε τυχαία ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το P σε μια συγκεκριμένη ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο Q και στη συνέχεια αποδεικνύουμε πως υπάρχει μοναδική μετρική στο επίπεδο που να είναι αναλλοίωτη κάτω από την συγκεκριμένη ομάδα μετασχηματισμών.

Όπως είδαμε πιο πάνω, οι ομοιότητες της Ευκλείδειας γεωμετρίας και της γεωμετρίας του υπερβολικού επιπέδου είναι μεγάλες, εάν αντικαταστήσουμε τις ευθείες με τις γεωδαισιακές και τις Ευκλείδειες ισομετρίες (που αποτελούνται από μετατοπίσεις, στροφές και ανακλάσεις) με τις ισομετρίες του άνω ημιεπιπέδου Argand H ή του μοναδιαίου δίσκου D (που βασικά αποτελούνται από τους μετασχηματισμούς Möbius).

Για αιώνες η ανθρωπότητα θεωρούσε πως η εξαγωγή των θεωρημάτων της Ευκλείδειας γεωμετρίας από αυταπόδεικτες κοινές έννοιες και αξιώματα, δεν αντιπροσωπεύει απλά ένα μοντέλο του φυσικού χώρου που ζούμε αλλά ταυτόχρονα αντιπροσωπεύει και μια απόλυτη λογική δομή. Παρά ταύτα, ένα αξίωμα, το λεγόμενο αξίωμα της παραλληλίας, δημιουργούσε προβλήματα: Ήταν πράγματι αυτονόητο; Μήπως μπορούσε να συναχθεί από τα υπόλοιπα αξιώματα; Να πως διατύπωσε ο ίδιος ο Ευκλείδης στο περίφημο και μνημειώδες σύγγραμμά του *"Στοιχεία"* το εν λόγω αξίωμα:

Εάν μια ευθεία που τέμνει δύο άλλες ευθείες σχηματίζει εσωτερική γωνία στην ίδια πλευρά που να είναι μικρότερη από δύο ορθές, τότε οι δύο ευθείες εάν προεκταθούν θα συναντηθούν στην πλευρά στην οποία οι γωνίες είναι μικρότερες από δύο ορθές.

Διάφορες ισοδύναμες διατυπώσεις παρουσιάστηκαν κατά καιρούς, ίσως η πιο γνωστή διατύπωση είναι αυτή του Playfair το 1795: *Από δοσμένο σημείο P εκτός μιας ευθείας ϵ, φέρεται μοναδική ευθεία παράλληλη στην ϵ.*

Αρκετά νωρίς, διάφοροι σχολιαστές των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, όπως ο Ποσειδώνιος, ο Γέμινος (1ος αιώνας π.Χ.), ο Πτολεμαίος (2ος αιώνας μ.Χ.), ο Πρόκλος (410-485), κ.ά. είχαν την εντύπωση πως το αξίωμα της παραλληλίας δεν ήταν προφανές για να γίνει αποδεκτό χωρίς απόδειξη. Γι΄ αυτό και χαρακτηρίστηκε *αίτημα της παραλληλίας*.

Η διαμάχη συνεχίστηκε για πολλούς αιώνες με διάφορους Έλληνες και Ισλαμιστές μαθηματικούς να επιχειρηματολογούν υπερ της μιας ή της άλλης άποψης. Ο Johann Lambert (1728-1777) συνειδητοποίησε πρώτος πως εάν το αξίωμα της παραλληλίας δεν ισχύει, τότε το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από δύο ορθές και το *έλλειμα* αντιστοιχεί στο εμβαδό του τριγώνου. Θεώρησε το αποτέλεσμά του αυτό ανησυχητικό για πολλούς λόγους, μεταξύ αυτών και για το ότι ως επακόλουθο, προκύπτει η ύπαρξη *απόλυτης κλίμακας* (δηλαδή οι έννοιες όμοια και σύμφωνα (ίσα) τρίγωνα ταυτίζονται). (βλέπε παράγραφο 26.5 πριν το Θεώρημα 1).

Τελικά οι Janos Bolyai (1802-1860) και Nikolai Lobachevsky (1793-1856), σχεδόν ταυτόχρονα και ανεξάρτητα μεταξύ τους, ανακάλυψαν την μη-Ευκλείδεια γεωμετρία , η οποία ικανοποιεί όλα τα αξιώματα του Ευκλείδη εκτός από το αξίωμα της παραλληλίας. Αυτή η γεωμετρία δεν είναι άλλη από την γεωμετρία του υπερβολικού επιπέδου που περιγράψαμε παραπάνω.

Ο Bolyai επέδειξε ενδιαφέρον για το αίτημα της παραλληλίας υπό την επίδραση του πατέρα του Farkas Bolyai, ο οποίος κατανάλωσε μεγάλο διάστημα της ζωής του προσπαθώντας, ανεπιτυχώς, να αποδείξει το αίτημα της παραλληλίας. Από σχετική σωζόμενη αλληλογραφία μεταξύ πατρός και υιού Bolyai, μαθαίνουμε πως σε κάποιο σημείο ο πατέρας προσπάθησε να αποτρέψει τον υιό του από την ενασχόληση με το συγκεκριμένο θέμα, επισημαίνοντας πως πρόκειται για κάτι το οποίο θα μπορούσε να έχει καταστροφικές συνέπειες για την ζωή του:

"...Σε παρακαλώ παράτα το θέμα του αιτήματος της παραλληλίας! Θα πρέπει να το φοβάσαι όπως τα πάθη των αισθήσεων. Θα σου στερήσει την υγεία σου, την ευχαρίστηση και την γαλήνη–θα σου καταστρέψει όλη τη χαρά της ζωής!"

Ένα άλλο *"μυθικό"* πρόσωπο στον χώρο της γεωμετρίας το οποίο ασχολήθηκε με το αίτημα της παραλληλίας ήταν και ο Karl Friedrich Gauss (1777-1855), που ήταν και ο θεμελιωτής της γεωμετρίας των επιφανειών, και ο οποίος ήταν ο πρώτος που μελέτησε την πιθανότητα ύπαρξης μιας γεωμετρίας στην οποία δεν θα ισχύει το αξίωμα της παραλληλίας. Όμως από τον φόβο της γελοιοποίησής του από την επιστημονική κοινότητα, κράτησε τις σχετικές μελέτες του χωρίς να τις εκδόσει! Όταν βέβαια έμαθε για τις ανακαλύψεις του Janos Bolyai, έγραψε στον πατέρα του Farkas:

..."Εάν άρχιζα λέγοντας πως δεν πρέπει να εξυμνήσω αυτή την εργασία, σίγουρα θα εκπλαγείτε. Δεν μπορώ όμως να κάνω διαφορετικά. Αν την εξυμνήσω, θα είναι σαν να εξυμνώ τον εαυτό μου. Το όλο περιεχόμενο της εργασίας του υιού σας και τα αποτελέσματά της, σχεδόν ταυτίζονται με τους συλλογισμούς που είχαν καταλάβει το μυαλό μου κατά τα τελευταία 30-35 χρόνια."

Τα αξιώματα του Ευκλείδη παρουσιάστηκαν σε αυστηρή μορφή από τον David Hilbert. Αρχικά εισάγονται κάποιες βασικές έννοιες που αποτελούν *ενοράσεις* και δεν μπορούν να ορισθούν. Οι έννοιες αυτές (ενοράσεις) είναι οι εξής:

- *το σημείο*,
- *η ευθεία*,
- *ευρίσκεται πάνω σε*, (για παράδειγμα "ένα σημείο *βρίσκεται πάνω σε* μια ευθεία"),
- *ανάμεσα*,
- *συμφωνία ζεύγους σημείων*,
- *συμφωνία ζεύγους γωνιών*.

Στη συνέχεια, η Ευκλείδεια γεωμετρία καθορίζεται μέσω λογικής επαγωγής από τα παρακάτω **Αξιώματα του Ευκλείδη**:

I. Αξιώματα Περίστασης (Axioms of Incidence)
1. Δύο σημεία έχουν μόνο μια κοινή ευθεία.
2. Κάθε ευθεία περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία.
3. Υπάρχουν τουλάχιστον τρία σημεία που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

II. Αξιώματα Διάταξης (Axioms of Order)
1. Από τρία τυχαία σημεία πάνω σε μια ευθεία, μόνο ένα εξ αυτών βρίσκεται μεταξύ των άλλων δύο.
2. Εάν A και B είναι δύο τυχαία σημεία σε μια ευθεία, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο C της ευθείας που βρίσκεται μεταξύ των σημείων A και B.
3. Κάθε ευθεία που τέμνει μια πλευρά ενός τριγώνου, είτε περνά και από την απέναντι (τρίτη) κορυφή του τριγώνου είτε τέμνει και κάποια άλλη πλευρά.

III. Αξιώματα Συμφωνίας (Axioms of Congruence)

1. Σε μια ευθεία, ένα δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να τοποθετηθεί και στις δύο μεριές ενός δοσμένου σημείου. Το ευθύγραμμο τμήμα που κατασκευάζεται με τον τρόπο αυτόν είναι *σύμφωνο* (congruent) με το δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα.

2. Εάν δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι σύμφωνα με κάποιο τρίτο, τότε είναι σύμφωνα και μεταξύ τους.

3. Εάν AB και $A'B'$ είναι δύο σύμφωνα ευθύγραμμα τμήματα και εάν τα σημεία C και C' που βρίσκονται στα AB και $A'B'$ αντίστοιχα είναι τέτοια ώστε ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα στα οποία το AB διαιρείται από το C να είναι σύμφωνο με ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα στα οποία το $A'B'$ διαιρείται από το C', τότε και το άλλο ευθύγραμμο τμήμα του AB είναι σύμφωνο με το άλλο ευθύγραμμο τμήμα του $A'B'$.

4. Μια δοθείσα γωνία μπορεί να τοποθετηθεί με μοναδικό τρόπο σε καθεμία από τις δύο μεριές μιας δοσμένης ημιευθείας, οπότε η γωνία που κατασκευάζεται με αυτόν τον τρόπο να είναι *σύμφωνη* (congruent) με τη δοσμένη γωνία.

5. Εάν δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες με τις αντίστοιχες δύο πλευρές ενός άλλου τριγώνου και εάν και οι περιεχόμενες στις δύο αυτές πλευρές αντίστοιχες γωνίες είναι ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι *σύμφωνα* (congruent).

IV. Αξίωμα Παραλληλίας (Axiom of Parallelism)

Από κάθε σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική ευθεία που δεν τέμνει τη δοσμένη ευθεία.

V. Αξίωμα Συνέχειας (Axiom of Continuity)

Εάν AB και CD είναι δύο τυχαία ευθύγραμμα τμήματα, τότε στην ευθεία AB υπάρχουν σημεία A_1, A_2,...,A_n τέτοια ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα AA_1, A_1A_2, A_2A_3,...,$A_{n-1}A_n$ να είναι σύμφωνα με το CD και το σημείο B να βρίσκεται μεταξύ των σημείων A και A_n.

Σχόλιο (για τη μετάφραση): Η μετάφραση του όρου congruent ως *σύμφωνος* προκύπτει από το πολύτομο λεξικό Αγγλικής Γλώσσας της Οξφόρδης που γράφει στο λήμμα αυτό, ως πρώτη ερμηνεία, τα εξής: **congruence:** the fact or condition of according or agreeing. Στην ελληνική βιβλιογραφία συχνά χρησιμοποιείται ο όρος *όμοιος* για την απόδοση του congruent. Δεν υιοθετήσαμε αυτή τη μετάφραση για τρείς λόγους: ο πρώτος είναι αυτό που γράψαμε παραπάνω για την ερμηνεία του όρου στην Αγγλική. Ο δεύτερος λόγος είναι ότι με τον όρο όμοιος αποδίδεται στα ελληνικά η αγγλική λέξη similar. Ο τρίτος λόγος είναι ο εξής: από το γυμνάσιο είμαστε στην Ελλάδα εξοικοιωμένοι με τον όρο *όμοιος*, για παράδειγμα από τα τρίγωνα: εξ ορισμού, δύο τρίγωνα λέγονται όμοια εάν έχουν τις γωνίες τους μία προς μία ίσες. Από το Αξίωμα ΙΙΙ 5 φαίνεται ότι η χρήση του όρου congruent από τον Hilbert σημαίνει αυτό που στο γυμνάσιο καλούσαμε ισότητα τριγώνων και όχι ομοιότητα. Εξ ορισμού, δύο τρίγωνα λέγονται ίσα εάν οι πλευρές τους είναι ίσες μία προς μία. Το αξίωμα ΙΙΙ 5 του Hilbert στο γυμνάσιο στην Ελλάδα παρουσιάζεται ως ένα από τα λεγόμενα κριτήρια ισότητας των τριγώνων. Η ουσία πάντως είναι πως από τα παραπάνω φαίνεται πως ο όρος όμοιος δεν είναι σωστός για να αποδώσει την αγγλική λέξη congruent ενώ ταυτόχρονα δημιουργεί σύγχυση με αυτά που (ορθώς ή όχι) γνωρίζουμε από το γυμνάσιο αφού ουσιαστικά σημαίνει ίσος και όχι όμοιος (βέβαια δύο ίσα τρίγωνα είναι πάντοτε και όμοια αλλά το αντίστροφο φυσικά δεν ισχύει). Σημειώνουμε τέλος πως ο όρος congruence, congruent υπάρχει και στη θεωρία αριθμών και σημαίνει την ιδιότητα δύο ακέραιων αριθμών που αν διαιρεθούν και οι δύο με τον ίδιο τρίτο ακέραιο αριθμό αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο.

Ας δούμε τώρα γιατί η γεωμετρία του υπερβολικού επιπέδου δεν ικανοποιεί το αξίωμα της παραλληλίας:

Έστω l μια ευθεία (δηλαδή μια γεωδαισιακή) του μοναδιαίου δίσκου D εφοδιασμένου με την μετρική Poincaré, και έστω $P \in D$ σημείο που δεν ανήκει στην ευθεία l. Υπάρχει μοναδικό σημείο $O \in l$ του οποίου η απόσταση από το P είναι ελάχιστη και η ευθεία OP τέμνει την l κατά ορθές γωνίες (για να βεβαιωθείτε για αυτό, αρκεί να θεωρήσετε την περίπτωση όπου l είναι ο πραγματικός άξονας και το P ανήκει στον φανταστικό άξονα.

Ας υπολογίσουμε την γωνία θ μεταξύ των ευθειών PO και PQ, όπου το Q είναι ένα μεταβαλλόμενο σημείο της l σε απόσταση x από το O. Από τον νόμο ημιτόνου στο υπερβολικό τρίγωνο POQ θα πάρουμε

$$\sin\theta = \frac{\sinh x}{\sinh b},$$

όπου $b = \alpha(PQ)$, η πλευρά που ενώνει τις κορυφές P και Q του τριγώνου. Όμως από τον νόμο του συνημιτόνου παίρνουμε πως

$$\cosh b = \cosh a \cosh x,$$

οπότε

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 a \coth^2 x - cosech^2 x}}.$$

Καθώς $x \to \infty$, παίρνουμε $\coth x \to 1$ και $cosechx \to 0$, συνεπώς $\sin\theta \to secha < 1$. Αποδείξαμε λοιπόν το εξής:

Θεώρημα 1. Έστω l μια ευθεία (γεωδαισιακή) του υπερβολικού επιπέδου D και έστω P κάποιο σημείο του υπερβολικού επιπέδου που δεν ανήκει στην ευθεία l. Μια ευθεία που διέρχεται από το P, τέμνει την l εάν και μόνο εάν η γωνία που σχηματίζει με την PO είναι μικρότερη από $\sin^{-1} secha$.

Η γωνία $\sin^{-1} secha$ λέγεται *γωνία παραλληλισμού απόστασης a*.

Άρα λοιπόν, για γωνίες μεγαλύτερες από $\sin^{-1} secha$, οι ευθείες που διέρχονται από το P *δεν τέμνουν την l*, δηλαδή είναι παράλληλες με την l, και προφανώς υπάρχουν τόσες τέτοιες ευθείες όσες και οι τιμές της γωνίας που είναι μεγαλύτερες από $\sin^{-1} secha$, δηλαδή πιθανώς και άπειρες (υπεραριθμήσιμες, εξαρτάται από την τιμή της a). *Συνεπώς από το σημείο P που δεν ανήκει στην l, διέρχονται (πιθανώς) άπειρες ευθείες που είναι παράλληλες με την l.*

26.7 Μιγαδική Ανάλυση και Υπερβολικό Επίπεδο

Η περίπλοκη μετρική δομή του υπερβολικού επιπέδου, (γεωδαισιακές, τρίγωνα κ.λ.π.), στην πραγματικότητα μπορεί να καθορισθεί αποκλειστικά από τις ολόμορφες συναρτήσεις του επιπέδου, συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε την υπερβολική γεωμετρία ως ένα κομμάτι της μιγαδικής ανάλυσης. Αυτό το κεφάλαιο είναι προαιρετικό σε μια πρώτη ανάγνωση.

Το βασικό θεώρημα είναι το εξής:

Θεώρημα 1. Κάθε ολόμορφος ομοιομορφισμός $f : D \to D$ αποτελεί ισομετρία της υπερβολικής μετρικής.

Απόδειξη: Η απόδειξη ακολουθεί το Λήμμα Schwartz. Εάν εφαρμόσουμε μια ισομετρία, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $f(0) = 0$ και αφού η εικόνα της f είναι το D, έχουμε ότι $|f(z)| < 1$, εάν $z \in D$. Τώρα αφού $f(0) = 0$, τότε η $f_1(z) = f(z)/z$ είναι ολόμορφη και εφαρμόζοντας την αρχή του μεγίστου σε έναν δίσκο ακτίνας $r < 1$, παίρνουμε

$$|f_1(z)| \leq \frac{1}{r}$$

και στο όριο, όταν $r \to 1$, παίρνουμε $|f_1(z)| \leq 1$, ή ισοδύναμα

$$|f(z)| \leq z.$$

Αφού η f αποτελεί ομοιομορφισμό, η αντίστροφή της ικανοποιεί την ίδια ανισότητα, οπότε

$$|z| \leq |f(z)|$$

και $|f_1(z)| = 1$ παντού. Αφού αυτό ισχύει σε ένα εσωτερικό σημείο, η συνάρτηση πρέπει να είναι ίση με μια σταθερά c, οπότε $f(z) = cz$ και αφού $|f(z)| = |z|$, έπεται πως

$$f(z) = e^{i\theta} z$$

η οποία είναι ισομετρία. □

Στην πραγματικότητα, ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει και για ολόκληρο το $\mathbb{C}$:

Θεώρημα 2. Κάθε ολόμορφος ομοιομορφισμός $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι της μορφής $f(z) = az + b$ με $a \neq 0$.

Σημείωση 1: Εάν $|a| = 1$ έχουμε μια ισομετρία της Ευκλείδειας μετρικής του επιπέδου $dx^2 + dy^2$. Η επιπρόσθετη αλλαγή κλίμακας $z \mapsto \lambda z$ είναι αυτή που δίδει, με τους κλασικούς γεωμετρικούς όρους, όμοια αλλά όχι σύμφωνα (ίσα) τρίγωνα.

Απόδειξη: Για $|z| > R$, θεωρούμε την συνάρτηση $g(z) = f(1/z)$. Υποθέτουμε ότι η g έχει μια βασική ανωμαλία στο $z = 0$. Τότε το θεώρημα Casorati-Weierstrass μας λέει ότι το $g(z)$ πλησιάζει οσοδήποτε κοντά σε οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό εάν το z είναι αρκετά μικρό. Ειδικότερα αυτό συμβαίνει για τις τιμές της εικόνας του συνόλου $\{z : |z| \leq R\}$ υπό την f. Όμως υποθέσαμε ότι η f είναι αμφεικόνιση, κάτι που αποτελεί *άτοπο*. Συνεπώς η g έχει το πολύ έναν πόλο στο άπειρο οπότε η $f(z)$ πρέπει να αποτελεί πολυώνυμο κάποιου βαθμού έστω k.

Όμως τότε η εξίσωση $f(z) = c$ έχει k λύσεις για τις περισσότερες τιμές της c, και επίσης, αφού η f είναι αμφεικόνιση, θα πρέπει να έχουμε $k = 1$ και

$$f(z) = az + b.$$

□

Για λόγους πληρότητας, αναφέρουμε και το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 3. Κάθε ολόμορφος ομοιομορφισμός f μιας σφαίρας Ρήμαν στον εαυτό της αποτελεί μετασχηματισμό Möbius $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$.

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας έναν μετασχηματισμό Möbius μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(\infty) = \infty$ οπότε το προηγούμενο θεώρημα μας λέγει πως $f(z) = az + b$. $\square$

Τα παραπάνω αποτελέσματα αφορούν αποκλειστικά το επίπεδο Argand και τα υποσύνολά του. Όμως η υπερβολική γεωμετρία παίζει σημαντικό ρόλο στην γενικότερη μελέτη των συμπαγών επιφανειών Ρήμαν: Υπενθυμίζουμε ότι οι τοπικές ολόμορφες συντεταγμένες σε μια επιφάνεια Ρήμαν συνδέονται μέσω ολόμορφων μετασχηματισμών οι οποίοι διατηρούν τις γωνίες. Δοθέντων δύο λείων καμπυλών πάνω σε μια επιφάνεια Ρήμαν, έχει συνεπώς νόημα να ορισθεί η γωνία τομής αυτών (που είναι η γωνία που σχηματίζουν τα εφαπτόμενα διανύσματα των καμπυλών στο σημείο τομής τους), και που λέγεται *σύμμορφη δομή (conformal structure).* Μια μετρική επίσης μπορεί να ορίσει γωνίες, συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε τις μετρικές οι οποίες είναι συμβατές με την σύμμορφη δομή μιας επιφάνειας Ρήμαν. Σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων z, μια τέτοια μετρική θα έχει τη μορφή

$$f dz d\bar{z} = f(dx^2 + dy^2).$$

Το εντυπωσιακό αποτέλεσμα είναι το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 4. *Θεώρημα Ομοιομορφοποίησης (Uniformization Theorem)* Κάθε κλειστή (συμπαγής χωρίς σύνορο) επιφάνεια Ρήμαν X έχει μια μετρική σταθερής καμπυλότητας Gauss που είναι συμβατή με την σύμμορφη δομή της.

Σημείωση 2: Από το θεώρημα Gauss-Bonnet, το ότι $K > 0$ συνεπάγεται πως και $\chi(X) > 0$, δηλαδή πως η X αποτελεί σφαίρα, το ότι $K = 0$ συνεπάγεται πως και $\chi(X) = 0$, δηλαδή πως η X αποτελεί τόρους και το ότι $K < 0$ συνεπάγεται πως και $\chi(X) < 0$.

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει ως πόρισμα ενός δύσκολου θεωρήματος που λέγεται *θεώρημα απεικόνισης Ρήμαν (Riemann Mapping Theorem)*: Υπενθυμίζουμε πως ένας (τοπολογικός) χώρος λέγεται *απλά συνεκτικός* εάν είναι συνεκτικός και κάθε κλειστή τροχιά μπορεί να συρρικνωθεί σε σημείο. Το θεώρημα απεικόνισης Ρήμαν, που αποδείχθηκε από τον μέγα Poincaré και τον Koebe, λέει ότι *κάθε απλά συνεκτική επιφάνεια Ρήμαν είναι ολόμορφα ομοιομορφική είτε με την σφαίρα Ρήμαν, είτε με το $\mathbb{C}$ (επίπεδο Argand) είτε με το H (άνω μιγαδικό ημιεπίπεδο).*

Εάν X είναι ένας "λογικός" τοπολογικός χώρος, μπορούμε να κατασκευάσουμε τον *καθολικά καλύπτοντα χώρο (universal covering space)* $\tilde{X}$ ο οποίος είναι απλά συνεκτικός και έχει:

• μια προβολή $p : \tilde{X} \to X$

• κάθε σημείο $x \in X$ έχει μια γειτονιά V τέτοια ώστε το $p^{-1}(V)$ να αποτελείται από μια ξένη ένωση ανοικτών συνόλων καθένα εκ των οποίων είναι ομοιομορφικό με το V μέσω της p

• υπάρχει μια ομάδα π ομοιομορφισμών του $\tilde{X}$ τέτοια ώστε $p(gy) = p(y)$, οπότε η π αναδιατάσσει τα διαφορετικά φύλλα στο $p^{-1}(V)$

• κανένα στοιχείο της π (εκτός του ουδετέρου στοιχείου) δεν έχει κάποιο καθορισμένο σημείο

• το X μπορεί να ταυτισθεί με τον χώρο των τροχιών της π που δρα στον $\tilde{X}$.

Το κλασικό παράδειγμα της παραπάνω δομής είναι $X = S^1$, $\tilde{X} = \mathbb{R}$, $p(t) = e^{it}$ και $\pi = \mathbb{Z}$ που δρα ως εξής: $t \mapsto t + 2n\pi$. Εύκολα βλέπει κανείς πως ο καθολικά καλύπτων χώρος μιας επιφάνειας Ρήμαν αποτελεί επίσης επιφάνεια Ρήμαν, οπότε εάν εφαρμόσουμε το θεώρημα απεικόνισης Ρήμαν βλέπουμε ότι το $\tilde{X}$ είναι είτε σφαίρα Ρήμαν, είτε το $\mathbb{C}$ είτε το H (άνω μιγαδικό ημιεπίπεδο). Οπότε θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις:

♦ Εάν η $\tilde{X}$ είναι η σφαίρα Ρήμαν S, είναι συμπαγής οπότε η προβολή $p : \tilde{X} \to X$ έχει μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος φύλλων έστω k. Μετρώντας κορυφές, ακμές και έδρες είναι φανερό πως $\chi(\tilde{X}) = k\chi(X)$. Αφού $\chi(S) = 2$, θα πρέπει να έχουμε $k = 1$ ή 2. Εάν ισχύει το δεύτερο, δηλαδή $k = 2$, τότε θα πρέπει $\chi(X) = 1$, κάτι που δεν είναι συμβατό με την μορφή $\chi(X) = 2 - 2g$ που ισχύει για τις προσανατολίσιμες επιφάνειες και προφανώς οι επιφάνειες Ρήμαν είναι προσανατολίσιμες. Άρα $k = 1$, οπότε $\chi(X) = 2$, οπότε πρόκειται μόνο για σφαίρα Ρήμαν σε αυτή την περίπτωση.

♦ Εάν η $\tilde{X} = \mathbb{C}$, τότε προσφεύγουμε στο θεώρημα 2 παραπάνω. Η ομάδα π των μετασχηματισμών κάλυψης είναι ολόμορφη οπότε κάθε στοιχείο της είναι της μορφής $z \mapsto az + b$. Όμως η π δεν έχει καθορισμένα σημεία, οπότε η εξίσωση $az + b = z$ δεν έχει λύσεις, κάτι που σημαίνει ότι $a = 1$. Οι μετασχηματισμοί $z \mapsto z + b$ αντιστοιχούν στις μετατοπίσεις οι οποίες αποτελούν ισομετρίες της μετρικής $dx^2 + dy^2$ η οποία έχει $K = 0$.

♦ Εάν η $\tilde{X} = H$, τότε από το θεώρημα 1 παραπάνω η δράση της ομάδας π διατηρεί την υπερβολική μετρική. □

Έτσι παρατηρούμε πως αυτές οι αφηρημένες μετρικές παίζουν σημαντικό ρόλο στην μελέτη γενικά των επιφανειών Ρήμαν, οι οποίες είναι επιφάνειες πολύ μακριά από τις επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$.

27 Παράρτημα

Στο Παράρτημα, για ευκολία στον αναγνώστη, συγκεντρώνουμε κάποιες απαραίτητες στοιχειώδεις γνώσεις από την *Γενική Τοπολογία*, την *Ανάλυση* και την *Τανυστική Άλγεβρα*.

27.1 Γενική Τοπολογία

Δεν είναι καθόλου προφανές, αλλά ακριβώς για αυτό και θεωρείται από τα σημαντικότερα επιτεύγματα των σύγχρονων μαθηματικών (του 20ου αιώνα δηλαδή), ότι η τοπολογία, δηλαδή η μελέτη των ολικών (global) ιδιοτήτων, με άλλα λόγια του *σχήματος*, ενός συνόλου, ουσιαστικά πηγάζει από την εξής, φαινομενικά απλή ερώτηση, σχετικά με το *ποια υποσύνολα ενός συνόλου μπορούν να θεωρηθούν γειτονιές των σημείων του.*

Θα ξεκινήσουμε αναπτύσσοντας σύντομα την λεγόμενη *συνήθη τοπολογία του* $\mathbb{R}$.

Ορισμός 1. Είμαστε εξοικειωμένοι από νωρίς με την έννοια του *ανοικτού διαστήματος* $(a,b) \subset \mathbb{R}$ που ορίζεται κατά τα γνωστά ως εξής: $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$. Υπενθυμίζουμε την βασική ιδιότητα των ανοικτών διαστημάτων: *κάθε σημείο* $x \in (a,b)$ *ενός ανοικτού διαστήματος* (a,b) *είναι εσωτερικό σημείο*, δηλαδή για κάθε σημείο $x \in (a,b)$ υπάρχει ένα επίσης ανοικτό διάστημα $S(x)$ για το οποίο ισχύει ότι $x \in S(x)$ και $S(x) \subset (a,b)$.

Σημείωση 1: Τα *κλειστά διαστήματα* $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ και τα *ημι-ανοικτά (ή ημι-κλειστά) διαστήματα* $[a,b) := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ ή $(a,b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ δεν έχουν αυτή την ιδιότητα, δηλαδή κάθε σημείο τους δεν είναι εσωτερικό σημείο: Τα σημεία a και b στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ δεν είναι εσωτερικά σημεία, το σημείο a στο $[a,b)$ και το σημείο b του $(a,b]$ επίσης δεν είναι εσωτερικά σημεία. Τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που έχουν την ιδιότητα κάθε σημείο τους να είναι εσωτερικό σημείο θα λέγονται *ανοικτά σύνολα*. Προφανώς τα ανοικτά διαστήματα είναι ανοικτά σύνολα αλλά δεν είναι τα μόνα, όπως θα δούμε στην Πρόταση 1 παρακάτω.

Σημείωση 2: Τα διαστήματα (a,∞) και $(-\infty,a)$ είναι ανοικτά ενώ τα $[a,\infty)$ και $(-\infty,a]$ όχι διότι το a δεν είναι εσωτερικό σημείο.

Σημείωση 3: Το ίδιο το $\mathbb{R}$ είναι ανοικτό διότι κάθε σημείο του είναι εσωτερικό σημείο: $\forall x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ανοικτό διάστημα $S(x) \ni x$ και με $S(x) \subset \mathbb{R}$. Το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι επίσης ανοικτό διότι αν *δεν ήταν*, τότε θα υπήρχε κάποιο σημείο $x \in \emptyset$ για το οποίο κάθε ανοικτό διάστημα $S(x)$ που περιέχει το x, θα περιείχε σημεία που δεν ανήκουν στο κενό. Δεν υπάρχει τέτοιο σημείο x εντός του κενού συνόλου διότι το κενό σύνολο εξ ορισμού δεν έχει στοιχεία.

Πρόταση 1. Η *ένωση ανοικτών διαστημάτων (πεπερασμένα ή άπειρα σε πλήθος) είναι ανοικτό σύνολο* διότι κάθε σημείο της ένωσης είναι εσωτερικό σημείο της ένωσης (αφού θα είναι εσωτερικό σημείο κάποιου *μέλους* της ένωσης). Ανάλογα βλέπουμε ότι η *τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών διαστημάτων είναι επίσης ανοικτό σύνολο.*

Παρατήρηση 1: Η τομή απείρου πλήθους ανοικτών διαστημάτων δεν είναι πάντα ανοικτό σύνολο, για παράδειγμα η τομή της οικογένειας των ανοικτών διαστημάτων της μορφής $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ όπου $n \in \mathbb{N}$, είναι το μονοσύνολο $\{0\}$ που δεν είναι ανοικτό διάστημα.

Ορισμός 2. Ένα υποσύνολο $A \subset \mathbb{R}$ λέγεται *κλειστό σύνολο* αν το συμπλήρωμά του $\mathbb{R} - A$ είναι ανοικτό. Παραδείγματα κλειστών συνόλων αποτελούν τα κλειστά διαστήματα και τα πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Σημείωση 4: Το κενό σύνολο είναι ταυτόχρονα και κλειστό γιατί το συμπλήρωμά του είναι το $\mathbb{R}$ που είναι ανοικτό. Επίσης το $\mathbb{R}$ είναι ταυτόχρονα και κλειστό διότι το συμπλήρωμά του που είναι το κενό είναι ανοικτό. Συνεπώς αυτά τα δύο σύνολα είναι ανοικτά και κλειστά ταυτόχρονα. Επίσης υπάρχουν και υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που δεν είναι ούτε ανοικτά ούτε κλειστά, για παράδειγμα τα ημι-ανοικτά διαστήματα.

Ορισμός 3. Έστω $A \subset \mathbb{R}$. Ένα στοιχείο $a \in \mathbb{R}$ λέγεται *σημείο συσσώρευσης* (ή *οριακό σημείο*) του A, εάν και μόνο εάν κάθε ανοικτό διάστημα $S(a)$ που περιέχει το a περιέχει και κάποιο άλλο σημείο του A διαφορετικό από το a.

Προσοχή! Τα σημεία συσσώρευσης του A δεν είναι απαραίτητο να ανήκουν στο A: για παράδειγμα το σύνολο $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ έχει σημείο συσσώρευσης το 0 που δεν ανήκει στο A.

Θεώρημα 1. Ένα υποσύνολο $A \subset \mathbb{R}$ είναι κλειστό εάν και μόνον εάν περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του.

Παρατήρηση 2: Τα ημι-κλειστά διαστήματα $(a, b]$ είδαμε ότι δεν είναι ανοικτά (διότι το b δεν είναι εσωτερικό σημείο). Δεν είναι όμως ούτε κλειστά διότι το a είναι σημείο συσσώρευσης αλλά δεν ανήκει στο $(a, b]$.

Πρόταση 2. Η τομή κλειστών διαστημάτων (πεπερασμένων ή και άπειρων σε πλήθος) είναι κλειστό σύνολο. Η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών διαστημάτων είναι κλειστό σύνολο.

Θα ασχοληθούμε τώρα με την θεμελιώδη έννοια της *συνέχειας*. Γνωρίζουμε από την Ανάλυση πως μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται *συνεχής στο σημείο* $a \in \mathbb{R}$ εάν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$. Η συνάρτηση λέγεται *συνεχής* εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο. [Ο παραπάνω ορισμός είναι γνωστός ως epsilontics].

Ας επαναδιατυπώσουμε τον παραπάνω ορισμό χρησιμοποιώντας την έννοια του ανοικτού διαστήματος: $|x - a| < \delta$ σημαίνει $a - \delta < x < a + \delta$, δηλαδή $x \in (a - \delta, a + \delta)$ (ανοικτό διάστημα με *κέντρο* a και *ακτίνα* δ). Αντίστοιχα, $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ σημαίνει $f(x) \in (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$, (ανοικτό διάστημα με *κέντρο* $f(a)$ και *ακτίνα* ϵ).

Συνεπώς ο ορισμός $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$ διατυπώνεται ως $x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$ που είναι ισοδύναμος με την δήλωση ότι *η εικόνα του ανοικτού διαστήματος* $(a - \delta, a + \delta)$ υπό την f, που είναι το $f((a - \delta, a + \delta))$, *περιέχεται στο ανοικτό διάστημα* $(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$, δηλαδή $f((a - \delta, a + \delta)) \subset (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$. Συνεπώς μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε τον παραπάνω γνωστό ορισμό της συνέχειας (σε μια μορφή που επιτρέπει γενίκευση σε μη-Ευκλείδειους χώρους όπως θα δούμε), ως εξής:

Ορισμός 4. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι *συνεχής σε ένα σημείο* $a \in \mathbb{R}$ εάν για κάθε ανοικτό σύνολο $V_{f(a)} \ni f(a)$, υπάρχει ανοικτό σύνολο $U_a \ni a$ τέτοιο ώστε $f(U_a) \subset V_{f(a)}$. Η f λέγεται *συνεχής* αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο.

Τα παραπάνω εύκολα γενικεύονται για Ευκλείδειους χώρους $\mathbb{E}^n$ διάστασης n, όπου η έννοια του ανοικτού διαστήματος γίνεται *ανοικτή σφαιρική περιοχή* $S^n(a, \delta)$ διάστασης n με κέντρο ένα σημείο a και ακτίνα δ:

$$S^n(a, \delta) := \{x \in \mathbb{E}^n | (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + ... + (x_n - a_n)^2 < \delta^2\}$$

όπου $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ και $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ οι συντεταγμένες των σημείων $x, a \in \mathbb{E}^n$. Στην περίπτωση του Ευκλείδειου επιπέδου ειδικά μιλάμε για ανοικτό δίσκο.

Είναι προφανές πλέον ποιά είναι η απάντηση στο ερώτημα που διατυπώσαμε στην αρχή του κεφαλαίου: σύμφωνα με τα όσα έχουμε πει μέχρι τώρα, τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ (και γενικά του $\mathbb{R}^n$) που αποτελούν γειτονιές των σημείων του είναι τα ανοικτά διαστήματα (αντίστοιχα οι ανοικτές σφαιρικές περιοχές) που περιέχουν τα εν λόγω σημεία.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω ως οδηγό, δίνουμε τον παρακάτω θεμελιώδη ορισμό:

Ορισμός 5. Έστω A τυχαίο μη κενό σύνολο. Μια κλάση $\mathcal{T}$ υποσυνόλων του A λέμε ότι ορίζει μια *τοπολογία στο* A εάν και μόνον εάν τα μέλη της $\mathcal{T}$ ικανοποιούν τα παρακάτω 3 αξιώματα:
(α). Το A και το κενό σύνολο ανήκουν στην $\mathcal{T}$.
(β). Η ένωση οποιουδήποτε πλήθους (πεπερασμένου ή άπειρου) μελών της $\mathcal{T}$ ανήκει επίσης στην $\mathcal{T}$.
(γ). Η τομή κάθε ζεύγους μελών της $\mathcal{T}$ ανήκει επίσης στην $\mathcal{T}$.

Σχόλιο 1: Τα υποσύνολα του A που ανήκουν στην $\mathcal{T}$ λέγονται *ανοικτά (υπό-) σύνολα* ενώ το ζεύγος (A,$\mathcal{T}$) λέγεται *τοπολογικός χώρος*.

Σχόλιο 2: Από τα παραπάνω 3 αξιώματα έπεται ότι και η τομή πεπερασμένου πλήθους μελών της $\mathcal{T}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$ (δηλαδή η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο).

Σχόλιο 3: Ένας ισοδύναμος ορισμός προκύπτει από το αξίωμα **(β)** και από το αξίωμα
(γ'): Η τομή πεπερασμένου πλήθους μελών της $\mathcal{T}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$.
Από τα **(β)** και **(γ')** προκύπτει το **(α)**.

Παρατήρηση 3: Δοθείσης μιας τοπολογίας $(A, \mathcal{T})$ όπως παραπάνω, ως *κλειστά* ορίζονται τα υποσύνολα του A που το συμπλήρωμά τους είναι ανοικτό.

Παρατήρηση 4: Για το $\mathbb{R}$, όπως και για κάθε σύνολο, υπάρχουν πολλές δυνατές τοπολογίες. Ένα υποσύνολο που είναι ανοικτό για μια τοπολογία μπορεί να μην είναι ανοικτό για μια διαφορετική τοπολογία του ίδιου συνόλου. Η επιλογή της τοπολογίας γίνεται κατά περίπτωση και εξαρτάται από το πρόβλημα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε κάθε φορά. Είναι μια διαδικασία που απαιτεί πείρα και διαίσθηση. Γενικά, η *ευρύτερη (coarser) τοπολογία* που μπορεί να ορισθεί για ένα μη κενό σύνολο A είναι αυτή που περιλαμβάνει ως ανοικτά σύνολα μόνο το A και το κενό σύνολο ενώ η *λεπτότερη (finer) τοπολογία* είναι αυτή που για $\mathcal{T}$ παίρνουμε όλο το *δυναμοσύνολο* του A, δηλαδή κάθε υποσύνολο του A είναι ανοικτό. Η συνήθης τοπολογία του $\mathbb{R}$ επαρκεί για τον γνωστό απειροστικό λογισμό αλλά υπάρχουν περιπτώσεις που χρησιμοποιούνται και άλλες τοπολογίες του $\mathbb{R}$.

Παρατήρηση 5: Είναι φανερό πως η τοπολογία απαντά στο ερώτημα ποια υποσύνολα ενός συνόλου είναι γειτονιές των σημείων του (δηλαδή ποια υποσύνολά του είναι ανοικτά) κατά τρόπο *αξιωματικό*: δηλαδή γειτονιά ενός σημείου είναι κάθε ανοικτό που το περιέχει, όμως τα ανοικτά ορίζονται αυθαίρετα κατά τον ορισμό της τοπολογίας, ο μόνος περιορισμός είναι να ικανοποιούνται τα 3 αξιώματα του ορισμού 5 παραπάνω.

Όλοι οι ορισμοί που δώσαμε για την περίπτωση της συνήθους τοπολογίας του $\mathbb{R}^n$ γενικεύονται αν αντικαταστήσουμε την έννοια ανοικτό διάστημα ή ανοικτή σφαιρική περιοχή με την έννοια ανοικτό σύνολο. Για παράδειγμα, δοθέντος ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$, ένα σημείο $a \in A \subset X$ θα λέγεται εσωτερικό σημείο του A εάν το a ανήκει σε κάποιο ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο A. Θα λέγεται σημείο συσσώρευσης εάν κάθε ανοικτό που περιέχει το a περιέχει και κάποιο άλλο σημείο του A διαφορετικό απο το a. Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του A συμβολίζεται με A^0 και λέγεται *εσωτερικό του* A, ενώ το σύνολο των σημείων συσσώρευσης συμβολίζεται με A' και λέγεται *παραγόμενο σύνολο του* A. Ισχύει η πρόταση που είδαμε παραπάνω στην περίπτωση της συνήθους τοπολογίας του $\mathbb{R}^n$ ότι το A είναι κλειστό εάν και μόνον εάν περιέχει τα σημεία συσσώρευσής του.

Καλούμε *εξωτερικό του* A και το συμβολίζουμε με $\tilde{A}$, το εσωτερικό του συμπληρώματος του A ενώ ορίζουμε το *σύνορο του* A, που θα το συμβολίζουμε ∂A, ως το σύνολο των σημείων του A που δεν ανήκουν ούτε στο εσωτερικό ούτε στο εξωτερικό του A. Ακόμη ορίζουμε την *θήκη* του A που την συμβολίζουμε με $\bar{A}$, ως την τομή των κλειστών υπερσυνόλων του A. Η παρακάτω Πρόταση περιγράφει την σχέση αυτών:

Πρόταση 3. Ισχύουν τα παρακάτω:
(α). $\bar{A} = A \cup A'$.
(β). $\bar{A} = A^0 \cup \partial A$.
(γ). Το εσωτερικό ενός συνόλου είναι ίσο με την ένωση των ανοικτών υποσυνόλων του.

Προφανώς απο την Πρόταση 3γ έπεται ότι το A^0 είναι ανοικτό και ταυτίζεται με το A εάν το ίδιο το A είναι ανοικτό, αλλιώς είναι το μεγαλύτερο ανοικτό υποσύνολό του.

Ορισμός 6. Ο τοπολογικός χώρος A λέγεται *χώρος Hausdorff* εάν για κάθε ζεύγος τυχαίων και διαφορετικών σημείων a, b του A, υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα του A, $U(a)$ που να περιέχει το a και $V(b)$ που να περιέχει το b, που να είναι ξένα μεταξύ τους, δηλαδή $U(a) \cap V(b) = \emptyset$.

Σημείωση 5: Το σύνολο των πραγματικών αριθμών (όπως και όλοι οι χώροι $\mathbb{R}^n$ διάστασης n με την συνήθη τοπολογία) είναι χώροι Hausdorff.

Ορισμός 7. Έστω $(A, \mathcal{T})$ και $(B, \mathcal{T}'')$ δύο τοπολογικοί χώροι. Μια απεικόνιση $f : A \to B$ λέγεται *συνεχής* εάν και μόνον εάν ισχύει το εξής: για κάθε H ανοικτό υποσύνολο του B, έπεται ότι $f^{-1}(H)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του A, (όπου f^{-1} η αντίστροφη απεικόνιση της f και $f^{-1}(H)$ η αντίστροφη εικόνα του συνόλου H υπό την f^{-1}).

Σημείωση 6: Προφανώς για να υπάρχει η αντίστροφη, η f πρέπει να είναι 1-1 και επί (τουλάχιστον τοπικά).

Ορισμός 8. Μια απεικόνιση $f : A \to B$ μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων $(A, \mathcal{T})$ και $(B, \mathcal{T}'')$ λέγεται *ομοιομορφισμός* εάν και μόνον εάν είναι 1-1, επί, συνεχής, και η αντίστροφή της είναι επίσης συνεχής. Λέμε τότε ότι οι τοπολογικοί χώροι A και B είναι *ομοιομορφικοί.* Ο ομοιομορφισμός είναι η βασική σχέση ισοδυναμίας της τοπολογίας.

Ορισμός 9. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και έστω A ένα υποσύνολο του X, δηλαδή $A \subset X$. Ονομάζουμε *ανοικτή κάλυψη του A* μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X τέτοιων ώστε το A να είναι υποσύνολο της ένωσής τους. Ονομάζουμε μια ανοικτή κάλυψη *πεπερασμένη* αν αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος ανοικτών υποσυνόλων του X. Το A ονομάζεται *συμπαγές* αν κάθε ανοικτή κάλυψή του έχει πεπερασμένη υποκάλυψη.

Παράδειγμα 1: Θεώρημα Heine-Borel στους Ευκλείδειους χώρους $\mathbb{E}^n$: Ένα υποσύνολο A σε έναν Ευκλείδειο χώρο ονομάζεται *φραγμένο* αν υπάρχει ανοικτή σφαιρική περιοχή που να το περιέχει. Το θεώρημα Heine-Borel που είναι θεμελιώδες στην ανάλυση λέει ότι ένα υποσύνολο A ενός Ευκλείδειου χώρου είναι συμπαγές εάν και μόνον εάν είναι κλειστό (δηλαδή περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του) και φραγμένο.

Ως μια μερική γενίκευση του θεωρήματος Hein-Borel (οι Ευκλείδειοι χώροι είναι χώροι Hausdorff), έχουμε την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 4. Κάθε συμπαγές υποσύνολο ενός χώρου Hausdorff είναι κλειστό.

Θεώρημα 2. Ισχύουν τα παρακάτων:
(α). Η εικόνα ενός συμπαγούς συνόλου κάτω από μια συνεχή συνάρτηση είναι συμπαγής.
(β). Μια 1-1, επί και συνεχής απεικόνιση από έναν συμπαγή χώρο σε ένα χώρο Hausdorff είναι ομοιομορφισμός (δηλαδή και η αντίστροφη συνάρτηση είναι επίσης συνεχής).

Παρατήρηση 6: Ορίσαμε συμπαγή υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου. Η έννοια της συμπάγειας επεκτείνεται και στους ίδιους τους τοπολογικούς χώρους αλλά απαιτείται περισσότερη δουλειά για να ορισθεί. Την περιγράφουμε εν συντομία:

Ορισμός 10. Μια συλλογή $\{A_i|i \in I\}$, όπου I κάποιο απειροσύνολο (λόγου χάριν $I = \mathbb{N}$), αποτελούμενη από άπειρα τυχαία σύνολα λέμε ότι έχει την ιδιότητα της *πεπερασμένης τομής* εάν κάθε πεπερασμένη υποσυλλογή αυτής έχει τομή διαφορετική του κενού.

Ορισμός 11. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ λέγεται *συμπαγής* εάν και μόνον εάν κάθε άπειρη συλλογή κλειστών υποσυνόλων $\{F_i|i \in I\}$ του X που έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής (δηλαδή κάθε πεπερασμένη υποσυλλογή έχει τομή διάφορη του κενού), έχει η ίδια τομή διαφορετική του κενού. Η συμπάγεια είναι μια τοπολογική ιδιότητα ενός χώρου, δηλαδή είναι αναλλοίωτη κάτω από ομοιομορφισμούς.

Παράδειγμα 2: Οι Ευκλείδειοι χώροι για κάθε διάσταση δεν είναι συμπαγείς. Οι σφαίρες S^n (άρα και ο κύκλος S^1) είναι συμπαγείς για κάθε διάσταση n. Διαισθητικά, η συμπάγεια έχει να κάνει με την πεπερασμένη έκταση ενός συνόλου ή τοπολογικού χώρου.

Ορισμός 12. Έστω $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας σε έναν τοπολογικό χώρο $(A, \mathcal{T})$ και έστω $[a]$ η κλάση ισοδυναμίας ενός στοιχείου $a \in A$. Έστω $A/\sim$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας (ή σύνολο πηλίκο) και έστω $\pi : A \to A/\sim$ η *απεικόνιση πηλίκο* που απεικονίζει κάθε στοιχείο στην κλάση ισοδυναμίας του. [Αποδεικνύεται εύκολα ότι η απεικόνιση πηλίκο είναι 1-1 και επί]. Το σύνολο $A/\sim$ αποκτά μια τοπολογία μέσω της τοπολογίας του A που λέγεται *τοπολογία πηλίκο* ως εξής: $U \subset A/\sim$ είναι ανοικτό εάν το $\pi^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο A.

Ορισμός 13. Ένας τοπολογικός χώρος $(A, \mathcal{T})$ λέγεται *συνεκτικός* εάν και μόνον εάν το A δεν προκύπτει ως ένωση δύο μη κενών, ξένων μεταξύ τους, ανοικτών (υπό)- συνόλων του. Αποδεικνύεται ότι ισοδύναμος με τον παραπάνω είναι ο ακόλουθος ορισμός: ο τοπολογικός χώρος $(A, \mathcal{T})$ είναι *συνεκτικός* εάν και μόνον εάν τα μόνα ανοικτά και κλειστά σύνολα είναι το A και το κενό σύνολο $\emptyset$. Η συνεκτικότητα είναι τοπολογική ιδιότητα (αναλλοίωτη σε ομοιομορφισμούς).

Ορισμός 14. Έστω $(A, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $I = [0, 1]$. Μια *τροχιά* από ένα σημείο $a \in A$ σε ένα σημείο $b \in A$ είναι μια συνεχής απεικόνιση $f : I \to A$ με $f(0) = a$ και $f(1) = b$. Τα σημεία a και b λέγονται αρχικό και τελικό σημείο αντίστοιχα της τροχιάς. Η τροχιά λέγεται *κλειστή* εάν $a = b$. Για κάθε σημείο $a \in A$ ορίζουμε επίσης και την σταθερή (κλειστή) τροχιά $a(s) = a$ για κάθε $s \in I$.

Ορισμός 15. Έστω f, g δύο τροχιές στον τοπολογικό χώρο $(A, \mathcal{T})$ με τα ίδια αρχικά και τελικά σημεία a, b αντίστοιχα. Οι τροχιές θα λέγονται *ομοτοπικές* εάν και μόνον εάν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : [0, 1] \times [0, 1] \to A$ τέτοια ώστε
•$H(s, 0) = f(s)$,
•$H(s, 1) = g(s)$,
•$H(0, t) = a = f(0) = g(0)$ και
•$H(1, t) = b = f(1) = g(1)$.
Η συνάρτηση H ονομάζεται μια *ομοτοπία* από την f στην g. Η ομοτοπία είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο όλων των τροχιών του $(A, \mathcal{T})$. Ουσιαστικά εκφράζει την έννοια της *παραμόρφωσης* μιας τροχιάς (f) σε μια άλλη (g) με *συνεχή τρόπο* (continuous deformation).

Σημείωση 7: Η έννοια της ομοτοπίας ορίζεται και μεταξύ τοπολογικών χώρων. Είναι ευρύτερη σχέση ισοδυναμίας από τον ομοιομορφισμό: αν δύο χώροι είναι ομοιομορφικοί είναι και ομοτοπικοί. Το αντίστροφο εν γένει δεν ισχύει. Οι περιπτώσεις που ισχύει ΚΑΙ το αντίστροφο είναι εξαιρετικής σημασίας για την (αλγεβρική) τοπολογία. Ειδικότερα, ο πυρήνας της διαφορικής γεωμετρίας συνίσταται από την περίφημη *εικασία Poincaré* που λέγει ότι για συμπαγείς, απλά συνεκτικές προσανατολίσιμες πολλαπλότητες πεπερασμένης διάστασης $n \geq 3$, οι έννοιες του ομοιομορφισμού και της ομοτοπίας είναι ισοδύναμες (δηλαδή η μία συνεπάγεται την άλλη και αντίστροφα). Οι μεγαλύτεροι γεωμέτρες του δευτέρου μισού του 20ου αιώνα έχουν αποδείξει ως αληθή την εικασία αυτή και όλοι τους έχουν τιμηθεί με την κορυφαία διεθνώς διάκριση στα μαθηματικά, το Fields Medal: Οι René Thom, Steven Smale, John Milnor απέδειξαν την εικασία Poincaré για την περίπτωση πολλαπλοτήτων διάστασης ≥ 5 κατά την δεκαετία του 1960, οι Simon Donaldson, Michael Freedman για την περίπτωση πολλαπλοτήτων διάστασης 4 κατά την δεκαετία του 1980 και ο Grigori-Grisha Perelman (στηριζόμενος σε εργασίες των W. Thurston, P. Hamilton), για την περίπτωση πολλαπλοτήτων διάστασης 3 πολύ πρόσφατα, το 2006. Σημειώνουμε πως η διάσταση 4 είναι η διάσταση με την μεγαλύτερη σχέση με την φυσική και την κοσμολογία, καθότι, όπως προκύπτει από την Γενική Θεωρία Σχετικότητας του Albert Einstein, το σύμπαν, τουλάχιστον μακροσκοπικά, αποτελεί πολλαπλότητα διάστασης 4. Όμως όπως προκύπτει από την εκπληκτική εργασία του Simon Donaldson που κυριολεκτικά άφησε την διεθνή επιστημονική κοινότητα άφωνη όταν δημοσιεύθηκε το 1983, η διάσταση 4, για κάποιον ανεξήγητο κατά μεγάλο βαθμό ακόμη και σήμερα λόγο, αποτελεί και από μαθηματικής πλευράς την πιο δύσκολη και την πιο μυστήρια διάσταση διότι σε αυτήν εμφανίζονται φαινόμενα μοναδικά στην μελέτη των πολλαπλοτήτων που δεν υπάρχουν σε καμία άλλη διάσταση! Το κυριότερο εξ αυτών που είναι γνωστό είναι η ύπαρξη των λεγόμενων *εξωτικών δομών* (βλέπε [7]).

Ορισμός 16. Μια κλειστή τροχιά λέγεται *συρρικνούμενη σε σημείο* εάν είναι ομοτοπική με την σταθερή τροχιά.

Ορισμός 17. Ένας τοπολογικός χώρος $(A, \mathcal{T})$ λέγεται *απλά συνεκτικός* αν κάθε κλειστή τροχιά του είναι συρρικνούμενη σε σημείο. Η απλή συνεκτικότητα είναι τοπολογική ιδιότητα (αναλλοίωτη σε ομοιομορφισμούς).

Παράδειγμα 3: Οι χώροι $\mathbb{R}^n$ για κάθε διάσταση n είναι απλά συνεκτικοί. Ο κύκλος S^1 δεν είναι απλά συνεκτικός. Οι σφαίρες όμως S^n για $n > 1$ είναι απλά συνεκτικές. Το torus δεν είναι απλά συνεκτικό. Με απλά λόγια, η διαισθητική εικόνα είναι ότι οι απλά συνεκτικοί χώροι δεν έχουν τρύπες.

Σημείωση 8: Τα σύνολα $I = [0, 1]$ (ή και το $(0, 1)$), $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^n$ είναι *ισοδύναμα ως σύνολα*, δηλαδή έχουν τον ίδιο πληθάριθμο, δηλαδή υπάρχει απεικόνιση 1-1 και επί μεταξύ τους. Δεν είναι βέβαια *τοπολογικά ισοδύναμα*, δηλαδή δεν υπάρχει ομοιομορφισμός μεταξύ τους, δηλαδή δεν υπάρχει απεικόνιση που να είναι 1-1, επί, συνεχής και η αντίστροφη να είναι επίσης συνεχής, μεταξύ τους. [Δεν είναι ούτε ομοτοπικά]. Υπάρχει όμως για παράδειγμα απεικόνιση μεταξύ του I και του $\mathbb{R}^2$ που είναι συνεχής αλλά δεν είναι 1-1, όπως οι καμπύλες Peano που γεμίζουν το επίπεδο, γεγονός που είναι χρήσιμο στην *γεωμετρία του χάους* (fractals).

Ορισμός 18. Ένας τοπολογικός χώρος $(A, \mathcal{T})$ λέμε ότι είναι *εμφυτευμένος* (embedded) σε έναν τοπολογικό χώρο $(B, \mathcal{T}'')$ εάν το A είναι ομοιομορφικό με έναν υπόχωρο του B.

27.2 Ανάλυση

Σε αυτή την παράγραφο θα αναφέρουμε μερικά στοιχεία από την διανυσματική ανάλυση και θα διατυπώσουμε (χωρίς απόδειξη), το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης, το Θεώρημα Υπονοούμενης Συνάρτησης και το Θεώρημα Sard. (Για τις αποδείξεις μπορεί κανείς να δει στις αναφορές ή σε ένα καλό βιβλίο διανυσματικής ανάλυσης).

Έστω $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μια απεικόνιση, όπου U ανοικτό υποσύνολο ως προς τη συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}^n$. Θα λέμε ότι η απεικόνιση f είναι *συνεχώς διαφορίσιμη* εάν κάθε μερική παράγωγος $D_i f(x)$, με $i = 1, 2, ..., n$, υπάρχει και είναι συνεχής $\forall x \in U$. Ο $m \times n$ πίνακας $Df(x)$ του οποίου η ith στήλη είναι το διάνυσμα $D_i f(x)$, λέγεται *παράγωγος* της f στο σημείο $x \in U$. Η παράγωγος $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι μια *γραμμική απεικόνιση*.

Ο κανόνας της αλυσίδας λέει πως εάν $f : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m$ και $g : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ είναι επίσης συνεχώς διαφορίσιμη και επιπλέον ισχύει ότι $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x))Df(x)$, $\forall x \in U$.

Το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης λέει ότι εάν μια συνάρτηση $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη, τότε *τοπικά* η f είναι *αμφεικόνιση* (δηλαδή 1-1 και επί) εάν ο γραμμικός μετασχηματισμός $Df(x)$ είναι αντιστρέψιμος. Πιο αναλυτικά έχουμε το εξής:

Θεώρημα 1. (Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης):
Έστω $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ μια συνεχώς διαφορίσιμη απεικόνιση, όπου U ανοικτό, και έστω ότι η παράγωγος $Df(a)$ είναι αντιστρέψιμη για κάποιο $a \in U$. Τότε υπάρχουν μια γειτονιά $V \subset \mathbb{R}^n$ του σημείου $b = f(a)$, καθώς και μια συνεχώς διαφορίσιμη απεικόνιση $g : V \to U$ τέτοια ώστε:
- $g(b) = a$,
- $f(g(y)) = y$, $\forall y \in V$ και
- το $g(V)$ είναι μια γειτονιά του a στο $\mathbb{R}^n$.

Ειδικότερα, η f είναι αμφεικόνιση σε μια γειτονιά του a.

Έστω τώρα $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μια συνεχώς διαφορίσιμη απεικόνιση, όπου U ανοικτό, και έστω ότι $n = k + m$. Ταυτίζουμε το $\mathbb{R}^n$ με το $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$. Έστω ακόμη ότι $F(a, b) = c$, όπου $a \in \mathbb{R}^k$ και $b, c \in \mathbb{R}^m$. Το Θεώρημα της Υπονοούμενης Συνάρτησης (γενίκευση της θεωρίας πεπλεγμένων συναρτήσεων), δίδει μια συνθήκη κάτω από την οποία μπορεί να επιλυθεί η εξίσωση $F(x, y) = z$, με $y = y(x, z)$, δηλαδή το y να είναι συνάρτηση των x και z, όπου τα (x, z)

ανήκουν σε μια γειτονιά του (a, c). Πιο συγκεκριμένα:

Θεώρημα 2. (Θεώρημα Υπονοούμενης Συνάρτησης):
Έστω $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μια συνεχώς διαφορίσιμη απεικόνιση, όπου U ανοικτό, και έστω ότι $n = k + m$. Ταυτίζουμε το $\mathbb{R}^n$ με το $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$. Έστω ακόμη ότι $F(a, b) = c$, όπου $a \in \mathbb{R}^k$ και $b, c \in \mathbb{R}^m$. Υποθέτουμε ότι η παράγωγος στο σημείο b της απεικόνισης $y \mapsto F(a, y)$ είναι αντιστρέψιμη. Τότε υπάρχουν μια γειτονιά $A \subset \mathbb{R}^k$ του a, μια γειτονιά $C \subset \mathbb{R}^m$ του c καθώς και μια συνεχώς διαφορίσιμη απεικόνιση $\Phi : A \times C \to \mathbb{R}^m$ τέτοια ώστε:
- $\Phi(a, c) = b$,
- $(x, \Phi(x, z)) \in U, \forall (x, z) \in A \times C$ και
- $F(x, \Phi(x, z)) = z$.

Επιπλέον υπάρχει μια γειτονιά $W \subset \mathbb{R}^{k+m}$ του (a, b) τέτοια ώστε εάν $(x, y) \in W$, $z \in C$ και $F(x, y) = z$, τότε θα ισχύει και ότι $y = \Phi(x, z)$.

Θεώρημα 3. (Θεώρημα Sard):
Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι μια λεία συνάρτηση και έστω $C \subset \mathbb{R}^n$ το σύνολο των κριτικών σημείων της f (ένα σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ λέγεται κριτικό σημείο της f εάν σε αυτό το σημείο ο Ιακωβιανός πίνακας Df της f έχει τάξη μικρότερη από m). Τότε το σύνολο $f(C) \subset \mathbb{R}^m$ έχει μέτρο (Lebesgue) μηδέν.

Στην αρχική του μορφή (περίπτωση $m = 1$), το παραπάνω θεώρημα αποδείχθηκε από τον M. Morse (1939) ενώ η γενική περίπτωση αποδείχθηκε από τον A. Sard (1942).

Υπάρχουν πολλές γενικεύσεις αυτού του θεωρήματος: Μια γενίκευση του παραπάνω θεωρήματος αποτελεί η περίπτωση όπου η $f : X \to Y$ είναι μια απεικόνιση κλάσης C^1 μεταξύ δύο λείων πολλαπλοτήτων πεπερασμένης διάστασης X και Y.

Η περίπτωση των απειροδιάστατων πολλαπλοτήτων Banach αποδείχθηκε αργότερα από τον S. Smale.

Η πιο γενική εκδοχή του είναι η εξής (βλέπε H. Federer: "Geometric Measure Theory): έστω $f : U \to Y$ μια απεικόνιση κλάσης C^k, από ένα ανοικτό υποσύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^n$ σε κάποιον τυχαίο χώρο Y εφοδιασμένο με νόρμα. Έστω $B \subset U$ το σύνολο των σημείων $x \in U$ όπου η παράγωγος $Df(x)$ έχει τάξη $\leq n$, όπου τα $n < m \in \mathbb{N}^*$ είναι καθορισμένα. Τότε το σύνολο $f(B) \subset Y$ έχει μέτρο Hausdorff διάστασης s μηδέν, όπου, $s = n + (m - n)/k$.

Χωρίς να μπούμε σε έννοιες της Θεωρίας Μέτρου, αναφέρουμε απλά πως το μέτρο Lebesgue ουσιαστικά αποτελεί μια γενίκευση του μήκους, του εμβαδού και του όγκου των Ευκλείδειων χώρων $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ αντίστοιχα. Το μέτρο Hausdorff είναι πιο ντελικάτη έννοια και χρησιμοποιείται για παράδειγμα στα λεγόμενα fractals (χαοτικά συστήματα).

Αναφέρουμε και τις παρακάτω προτάσεις που είναι χρήσιμες στην μελέτη των επιφανειών που είναι εμφυτευμένες στον χώρο $\mathbb{R}^3$:

Πρόταση 1. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε:
(α). η f είναι αμφεικόνιση (δηλαδή 1-1 και επί) εάν και μόνο εάν $rank(f) = 3$, (όπου $rank(f) = \dim Im(f)$),
(β). η f απεικονίζει το $\mathbb{R}^3$ σε ένα επίπεδο εάν και μόνο εάν $rank(f) = 2$ και
(γ). η f απεικονίζει το $\mathbb{R}^3$ σε μία ευθεία εάν και μόνο εάν $rank(f) = 1$.

Πρόταση 2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε:
(α). η f είναι 1-1 και απεικονίζει το $\mathbb{R}^2$ σε ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ εάν και μόνο εάν $rank(f) = 2$ και
(β). η f είναι 1-1 και απεικονίζει το $\mathbb{R}^2$ σε μια ευθεία του $\mathbb{R}^3$ εάν και μόνο εάν $rank(f) = 1$.

27.3 Τανυστική Άλγεβρα

Θα δώσουμε τον γενικό ορισμό των τανυστών τυχαίας συναλλοίωτης και ανταλλοίωτης τάξης και θα περιγράψουμε εν συντομία τις βασικές πράξεις μεταξύ τους. Κατά μία έννοια οι τανυστές γενικεύουν τα διανύσματα και τους πίνακες:

Ορισμός 1. Έστω X μια επιφάνεια και έστω (u^i), με $i = 1, 2$, ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας X. Θα λέμε ότι στην επιφάνεια X ορίζεται ένας *τανυστής T τύπου (r, s)* (ή ισοδύναμα ένας *τανυστής r-ανταλλοίωτης και s-συναλλοίωτης τάξης*), εάν σε κάθε σημείο x της επιφάνειας αυτής ορίζεται ένα σύνολο από 2^{r+s} ποσότητες

$$T^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s}(x),$$

που λέγονται *συνιστώσες* του τανυστή T ως προς το σύστημα συντεταγμένων (u^i) της επιφάνειας X, με την εξής ιδιότητα: εάν $(\bar{u}^{\bar{i}})$, με $\bar{i} = 1, 2$, είναι ένα άλλο τοπικό σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας X και εάν

$$\bar{T}^{\bar{i}_1 \bar{i}_2 \dots \bar{i}_r}_{\bar{j}_1 \bar{j}_2 \dots \bar{j}_s}(x)$$

είναι οι συνιστώσες του τανυστή T στό σημείο x ως προς το τοπικό σύστημα συντεταγμένων $(\bar{u}^{\bar{i}})$ της επιφάνειας X, τότε ισχύει η εξής σχέση που συνδέει τις συνιστώσες του τανυστή T στο ίδιο σημείο x της επιφάνειας ως προς τα δύο διαφορετικά τοπικά συστήματα συντεταγμένων:

$$\bar{T}^{\bar{i}_1\bar{i}_2...\bar{i}_r}_{\bar{j}_1\bar{j}_2...\bar{j}_s} = [\det(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}})]^N T^{i_1 i_2...i_r}_{j_1 j_2...j_s} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}_1}}{\partial u^{i_1}} ... \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}_r}}{\partial u^{i_r}} \frac{\partial u^{j_1}}{\partial \bar{u}^{\bar{j}_1}} ... \frac{\partial u^{j_s}}{\partial \bar{u}^{\bar{j}_s}}.$$

Όλοι οι παραπάνω δείκτες παίρνουν τις τιμές $1, 2$ ενώ με

$$\det(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}})$$

συμβολίζουμε την Ιακωβιανή του μετασχηματισμού των τοπικών συντεταγμένων. Ο εκθέτης N της Ιακωβιανής λέγεται *βάρος* του τανυστή T. Εάν $N = 0$, τότε ο τανυστής λέγεται *απόλυτος*. Προφανώς οι ποσότητες $N, r, s \in \mathbb{N}$.

Ένας τανυστής λέγεται *συμμετρικός (αντισυμμετρικός)* ως προς δύο δείκτες εάν οι συνιστώσες του παραμένουν οι ίδιες (αλλάζουν πρόσημο) όταν εναλλάξουμε τους δείκτες αυτούς.

Σημείωση 1: Ο παραπάνω ορισμός γενικεύεται άμεσα για πολλαπλότητες διάστασης $n > 2$. Προφανώς τότε ένας τανυστής τύπου (r, s) θα αποτελείται από n^{r+s} συνιστώσες.

Οι βασικές πράξεις μεταξύ τανυστών (τανυστική άλγεβρα) είναι οι εξής:

1. *Πρόσθεση.* Μπορούμε να προσθέτουμε τανυστές του ιδίου τύπου και να πάρουμε τανυστή του ίδιου τύπου προσθέτοντας απλά τις συνιστώσες τους:

$$A^{i_1 i_2...i_r}_{j_1 j_2...j_s} + B^{i_1 i_2...i_r}_{j_1 j_2...j_s} = C^{i_1 i_2...i_r}_{j_1 j_2...j_s}.$$

2. *Πολλαπλασιασμός.* Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τις συνιστώσες ενός τανυστή τύπου (r, s) με τις συνιστώσες ενός τανυστή τύπου (p, q) και να πάρουμε έναν τανυστή τύπου $(r + p, s + q)$:

$$A^{i_1 i_2...i_r}_{j_1 j_2...j_s} \cdot B^{k_1 k_2...k_p}_{m_1 m_2...m_q} = C^{i_1 i_2...i_r k_1 k_2...k_p}_{j_1 j_2...j_s m_1 m_2...m_q}.$$

3. *Συστολή.* Η πράξη αυτή προκύπτει εάν σε έναν τανυστή τύπου (r, s) ταυτίσουμε έναν οποιονδήποτε ανταλλοίωτο και έναν οποιονδήποτε συναλλοίωτο δείκτη και εφαρμόσουμε την σύμβαση Einstein, δηλαδή ότι οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες αθροίζονται. Το αποτέλεσμα θα είναι ένας τανυστής τύπου

$(r-1, s-1)$.

4. *Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός.* Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε έναν τανυστή τύπου (r, s) με κάποιον μη-μηδενικό πραγματικό αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$, απλά πολλαπλασιάζοντας κάθε συνιστώσα του τανυστή με τον εν λόγω πραγματικό αριθμό, και προκύπτει και πάλι τανυστής τύπου (r, s).

Σημείωση 2: Η μετρική Ρήμαν (πρώτη θεμελιώδης μορφή) και η τανυστική καμπυλότητα Ρήμαν αποτελούν τανυστές τύπου $(0, 2)$ και $(1, 3)$ (ή $(0, 4)$) αντίστοιχα. Τα σύμβολα Christoffel όμως *δεν αποτελούν τανυστές*. Ο νόμος μετασχηματισμού τους κάτω από μια αλλαγή συντεταγμένων είναι ο εξής (για τα δευτέρου είδους, ανάλογα και για τα πρωτου είδους):

$$\bar{\Gamma}^{\bar{k}}_{\bar{i}\bar{j}} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}{\partial u^k} + \frac{\partial^2 u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}{\partial u^k}.$$

Φανερά ο δεύτερος όρος αποτρέπει τα σύμβολα Christoffel να αποτελούν τανυστή τύπου $(1, 2)$.

Σημείωση 3: Στις εξισώσεις πεδίου του Einstein της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας που περιγράφουν το βαρυτικό πεδίο, τα σύμβολα Christoffel αντιστοιχούν στα δυναμικά του πεδίου βαρύτητας ενώ η τανυστική καμπυλότητα περιγράφει το ίδιο το βαρυτικό πεδίο. Στις εξισώσεις αυτές η καμπυλότητα του χωρόχρονου (πολλαπλότητα διάστασης 4), έχει δύο πηγές: αφ' ενός την γεωμετρική καμπυλότητα της ίδιας της πολλαπλότητας του χωρόχρονου, αφ' ετέρου από την παρουσία μάζας, η ύπαρξη της οποίας επιδρά προσθετικά αυξάνοντας την καμπυλότητα.

27.4 Παραμετρικές Παραστάσεις Αφηρημένων Επιφανειών

Στην παράγραφο αυτή παραθέτουμε ενδεικτικά κάποιες παραμετρικές παραστάσεις του *πραγματικού προβολικού επιπέδου (επιφάνεια Boy)* και της *φιάλης Klein*. Και οι δύο επιφάνειες αυτές δεν είναι επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$ όπως είδαμε, συνεπώς οι παραμετρικές παραστάσεις, που δεν είναι μοναδικές, δίδουν εμβάπτιση και όχι εμφύτευση.

1. *Πραγματικό προβολικό επίπεδο (επιφάνεια Boy).*

Η επιφάνεια Boy είναι μια συνεκτική, συμπαγής, μη προσανατολίσιμη επιφάνεια με χαρακτηριστική Euler ίση με 1 (ισοδύναμα $k = 1$ και υπενθυμίζουμε πως στις μη-προσανατολίσιμες επιφάνειες ισχύει η σχέση $\chi = 2 - k$, όπου k ο αριθμός των cross-caps). Μια σχετικά πρόσφατη (1970) παραμετρική παράσταση της επιφάνειας Boy στο χώρο $\mathbb{R}^3$ είναι η λεγόμενη *παραμέτρηση Bryant*: Δοθέντος ενός μιγαδικού αριθμού $z \in \mathbb{C}$, με $|z| \leq 1$, (όπου $|z|$ το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z), θέτουμε:

$$g_1 = -\frac{3}{2} Im[\frac{z(1-z^4)}{z^6 + \sqrt{5}z^3 - 1}],$$

$$g_2 = -\frac{3}{2} Re[\frac{z(1+z^4)}{z^6 + \sqrt{5}z^3 - 1}],$$

$$g_3 = Im(\frac{1+z^6}{z^6 + \sqrt{5}z^3 - 1}) - \frac{1}{2},$$

$$g = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2,$$

(όπου Im και Re συμβολίζουν το φανταστικό και το πραγματικό μέρος αντίστοιχα των μιγαδικών αριθμών), έτσι ώστε

$$x = \frac{g_1}{g},$$

$$y = \frac{g_2}{g},$$

$$z = \frac{g_3}{g},$$

να είναι οι Καρτεσιανές Συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου της επιφάνειας Boy στο χώρο $\mathbb{R}^3$. Η συγκεκριμένη παραμετρική παράσταση δίδει μια εκπεφρασμένη *εμβάπτιση* της επιφάνειας Boy στον χώρο $\mathbb{R}^3$, μέσω της απεικόνισης $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$, που ορίσαμε παραπάνω, όπου D είναι ο μοναδιαίος δίσκος $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ του επιπέδου Argand. Σημειώνουμε πως σε συμφωνία με όσα είπαμε πιο πάνω, αυτή η απεικόνιση *δεν* αποτελεί εμφύτευση διότι αποτελεί μόνο *τοπικό* ομοιομορφισμό επειδή η απεικόνιση δεν είναι 1-1. Πιο συγκεκριμένα υπάρχει ένα *τριπλό σημείο*, στο οποίο η συγκεκριμένη απεικόνιση αποτυγχάνει να είναι 1-1. Η επιφάνεια Boy έχει να επιδείξει στις μέρες μας μερικές εντυπωσιακές και πραγματικά αναπάντεχες εφαρμογές που κυμαίνονται από την θεωρία της ψυχολογίας του βάθους του J. Lacan, την ανάπτυξη των αξονικών και μαγνητικών τομογράφων στην διαγνωστική ιατρική και την τεχνολογία των υλικών (αντοχή σε στρέψη και εφελκυσμό μεταλικών κραμάτων και πλεγμάτων)!

2. *Φιάλη Klein.*

Η φιάλη Klein είναι μια συνεκτική, συμπαγής, μη προσανατολίσιμη επιφάνεια με χαρακτηριστική Euler ίση με 0 (ισοδύναμα $k = 2$).

Μια σχετικά απλή εμβάπτιση της φιάλης Klein στον $\mathbb{R}^3$ είναι η λεγόμενη *εμβάπτιση του σχήματος* 8, η οποία δίδεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$x = (r + \cos\frac{u}{2}\sin v - \sin\frac{u}{2}\sin 2v)\cos u$$

$$y = (r + \cos\frac{u}{2}\sin v - \sin\frac{u}{2}\sin 2v)\sin u$$

$$z = \sin\frac{u}{2}\sin v + \cos\frac{u}{2}\sin 2v,$$

όπου ο κύκλος αυτοτομής αποτελείται από έναν κύκλο στο επίπεδο Oxy ακτίνας $r > 0$, ενώ η παράμετρος u δίδει τη γωνία στο επίπεδο Oxy και η παράμετρος v προσδιορίζει την θέση σε μια κάθετη διατομή γύρω από το σχήμα 8. Η εμβάπτιση αυτή αποτυγχάνει να είναι 1-1 στον κύκλο αυτοτομής.

Μια ισοδύναμη εμβάπτιση δίδεται από την παρακάτω αλγεβρική εξίσωση:

$$(x^2+y^2+z^2+2y-1)[(x^2+y^2+z^2-2y-1)^2-8z^2]+16xz(x^2+y^2+z^2-2y-1) = 0.$$

Αναφορές

[1] Berger, M., Gostiaux, B. : *Differential Geometry: Manifolds, Curves and Surfaces*, (English Translation from French by S. Levy), Springer (1988).

[2] Birkhoff, G., MacLane, S. : *Algebra*, Chelsea (1988).

[3] Bourbaki, N. : *Topologie*, Paris, (1964).

[4] Bott, R. : *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer, (1997).

[5] Do Carmo, M.P. : *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, New Jersey, (1976) (εξαιρετικό βιβλίο).

[6] Do Carmo, M.P. : *Differential Forms and Applications*, Springer, (2001).

[7] Donaldson, S. K., Kronheimer P. B.: *The Geometry of 4-manifolds*, Oxford Monographs on Geometry, Oxford University Press, UK, (1992).

[8] Dugundji, J. : *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, USA, (1970).

[9] Farkas, H. M., Kra, I. : *Riemann Surfaces*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, (1992).

[10] Firby, P. A., Gardiner, C. F. : *Surface Topology*, Prentice Hall, (1992).

[11] Freedman, M. H., Luo, F. : *Selected Applications of Geometry to Low Dimensional Topology*, University Lecture Series 1, American Mathematical Society (1989).

[12] Griffiths, P., Harris, J. : *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley, (1990).

[13] Hartshorne, R. : *Algebraic Geometry*, Springer, (1989).

[14] Hitchin, N. J. : *Geometry of Surfaces*, Undergraduate Lecture Notes, Mathematical Institute, Oxford University (2004).

[15] Kelley, J.L. : *General Topology*, Van Nostrand, Princeton, N.J. USA, (1968).

[16] Kobayashi, S., Nomizu, K. : *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 1, John Wiley, (1963).

[17] Lipschutz, S. : *General Topology*, Mac Grow-Hill, (1965).

[18] Massey, W. S. : *A Basic Course in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, (1993).

[19] Pressley, A. : *Elementary Differential Geometry*, Springer (2001).

[20] Postnikov, M. : *Lectures on Geometry*, Vol. 3, (English Translation from Russian), Mir Publishers, Moscow, (1989).

[21] Roe, J. : *Elementary Geometry*, Oxford (1992).

[22] Segal, G. B. : *Geometry of Surfaces*, Undergraduate Lecture Notes, DPMMS, Cambridge University (2003).

[23] Spanier, E. H. : *Algebraic Topology*, Springer, (1989).

[24] Spivak, M. : *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. 1, Publish or Perish, (1970).

[25] Lipshutz, M. M. : *Διαφορική Γεωμετρία*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill (1981), Αθήνα, (Ελληνική Μετάφραση).

[26] Σταυρινός, Π. Χ. : *Διαφορική Γεωμετρία και Εφαρμογές*, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα (1992).

[27] Πολυράκης, Ι. Α. : *Διαφορική Γεωμετρία*, ΕΜΠ, Αθήνα, (1998).