Παράρτημα I

Υπενθυμίσεις Μηχανικής Παραμορφωσίμων Στερεών

1. ΤΑΣΕΙΣ

Οι εξωτερικές δυνάμεις που επιβάλλονται σ' ένα σώμα μπορούν να χωρισθούν σε δύο κατηγορίες, τις καθολικές δυνάμεις και τις επιφανειακές δυνάμεις. Οι καθολικές δυνάμεις, όπως η βαρύτητα, οι αδρανειακές και οι μαγνητικές δυνάμεις, επενεργούν αμέσως επί των μορίων του σώματος. Οι επιφανειακές δυνάμεις επενεργούν αμέσως στην επιφάνεια του σώματος και μεταβιβάζονται εμμέσως στο εσωτερικό του με τη βοήθεια του πλέγματος των συνδέσμων μεταξύ των μορίων και ατόμων του σώματος.

Οι τάσεις σ' ένα στοιχειώδη όγκο ενός φορτισμένου σώματος ορίζονται με τη μορφή διανύσματος, ως εξής:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \sigma_{xy} & \sigma_{yz} & \sigma_{zx} \end{bmatrix} \tag{1}$$

όπου, σ_{xx}, σ_{yy} και σ_{zz} είναι οι ορθές συνιστώσες των τάσεων και σ_{xy}, σ_{yz}, σ_{zx} οι διατμητικές συνιστώσες των τάσεων, ως προς τους άξονες x,y,z.

Εάν πάρουμε την ισορροπία ενός στοιχειώδους παραλληλεπίπεδου βρίσκουμε τις παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}+f_x=0\\ \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}+f_y=0\\ \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+f_z=0\end{aligned} \tag{2}$$

όπου, $f^T=[f_x, f_y, f_z]$ το διάνυσμα των ανά μονάδα όγκου εφαρμοσμένων καθολικών δυνάμεων.

Οι σχέσεις αυτές λέγονται διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας και είναι οι διαφορικές εξισώσεις που επιλύουν το πρόβλημα ενός παραμορφώσιμου σώματος.

Ας υποθέσουμε ότι στο σύνορο του σώματος εφαρμόζονται οι κατανεμημένες δυνάμεις $T^T=[T_x, T_y, T_z]$ αυτές συνδέονται με τις τάσεις που αναπτύσσονται στο σώμα με τη σχέση τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}T_x=\sigma_{xx}n_x+\sigma_{yx}n_y+\sigma_{zx}n_z\\ T_y=\sigma_{xy}n_x+\sigma_{yy}n_y+\sigma_{zy}n_z\\ T_z=\sigma_{xz}n_x+\sigma_{yz}n_y+\sigma_{zz}n_z\end{aligned} \tag{3}$$

όπου n_x, n_y, n_z τα συνημίτονα κατεύθυνσης σ' ένα δεδομένο σημείο της επιφάνειας του σώματος.

Ένα πεδίο που ικανοποιεί τις (2) και (3) λέγεται πεδίο των τάσεων **στατικά αποδεκτό**.

2. ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

Η ύπαρξη δυνάμεων που επενεργούν επί ενός σώματος έχει σαν συνέπεια την δημιουργία μετατοπίσεων και παραμορφώσεων στα σημεία του σώματος. Εάν οι μετατοπίσεις ενός σημείου του σώματος κατά τις διευθύνσεις x,y,z είναι αντίστοιχα u,v,w, τότε η τριδιάστατη παραμορφωσιακή κατάσταση σ' αυτό το σημείο μπορεί να ορισθεί με τη μορφή διανύσματος, ως εξής:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zz} & \gamma_{xy} & \gamma_{yz} & \gamma_{zx}\end{bmatrix} \tag{1}$$

όπου, $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$ και ε_{zz} είναι οι ορθές συνιστώσες των παραμορφώσεων και $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ οι διατμητικές συνιστώσες των παραμορφώσεων.

Αν το σύστημα είναι κύριο, το διάνυσμα των παραμορφώσεων παίρνει τη μορφή

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T=\begin{bmatrix}\varepsilon_{I} & \varepsilon_{II} & \varepsilon_{III} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{2}$$

Οι σχέσεις μεταξύ των παραμορφώσεων και των μετατοπίσεων u,v,w ενός δοθέντος σημείου, είναι

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial \upsilon}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial \upsilon}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \tag{3}$$

Οι (3) ισχύουν με την προϋπόθεση ότι οι μετατοπίσεις u,υ,w είναι απειροστές, ώστε τα γινόμενα των παραγώγων τους να είναι αμελητέες ποσότητες, καθώς και ότι οι u,υ,w είναι συνεχείς συναρτήσεις των συντεταγμένων x,y,z.

3. ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΣΕΩΝ–ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ

Οι σχέσεις που συνδέουν τις τάσεις με τις παραμορφώσεις για ένα γραμμικό, ελαστικό ανισότροπο και ομογενές υλικό, συνιστούν το γενικευμένο νόμο του Hooke. Οι σχέσεις αυτές σ' ένα τριδιάστατο σώμα [1], είναι

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & . & . & . & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & . & . & . & D_{26} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ D_{61} & D_{62} & . & . & . & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \tag{1}$$

ή

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\,\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1΄}$$

ανάλογα, οι παραμορφώσεις συνδέονται με τις τάσεις, ως εξής

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & . & . & . & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & . & . & . & C_{26} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ C_{61} & C_{62} & . & . & . & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} \tag{2}$$

ή

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} \tag{2΄}$$

όπου, **σ** και **ε** είναι τα μητρώα τάσεων και παραμορφώσεων, αντίστοιχα.

Οι συντελεστές D_{ij} των σχέσεων (1) καλούνται **ελαστικές σταθερές** ενώ οι συντελεστές C_{ij} των σχέσεων (2) καλούνται **ελαστικοί συντελεστές**. Τα μητρώα **D** και **C** είναι συμμετρικά [2,3], επομένως για την πλήρη περιγραφή ενός ανισότροπου υλικού απαιτείται η εκτίμηση των 21 ελαστικών σταθερών D_{ij} ή των 21 ελαστικών συντελεστών C_{ij}.

Στην περίπτωση ενός γραμμικού, ισότροπου και ελαστικού υλικού δηλαδή ενός κρυσταλλικού υλικού που παρουσιάζει παντός είδους συμμετρία η (1) γίνεται συμμετρικό

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & \textit{συμμετρικό} & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \tag{3}$$

ή, ως προς τις συνιστώσες των παραμορφώσεων η (3) γίνεται

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ & \textit{συμμετρικό} & & & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ & & & & & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} \tag{4}$$

όπου, E το μέτρο του Young και ν ο λόγος του Poisson.

ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

3.1. Επίπεδη Εντατική Κατάσταση

Η **επίπεδη εντατική κατάσταση** χαρακτηρίζεται από την πολύ μικρότερη *z*-διάσταση του σώματος σε σχέση με τις *x,y* διαστάσεις του. Επίσης, οι εφαρμοσμένες δυνάμεις στα σύνορα του σώματος, είναι παράλληλες προς το επίπεδο *(x,y)* και επιπλέον είναι συμμετρικά κατανεμημένες ως προς το μέσο επίπεδό του. Οπότε, ισχύει [1]:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0 \tag{1}$$

Οι συνιστώσες της παραμόρφωσης γ_{zx}, γ_{zy} εξαφανίζονται ενώ η ε_{zz} δίνεται από την σχέση

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\right) \tag{2}$$

Η σχέση τάσεων-παραμορφώσεων γίνεται

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-v}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3}$$

3.2. Επίπεδη Παραμορφωσιακή Κατάσταση

Αντίθετα από την επίπεδη εντατική κατάσταση, **η επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση** χαρακτηρίζεται από την πολύ μεγαλύτερη *z*-διάσταση του σώματος σε σχέση με τις *x,y* διαστάσεις του. Επίσης, η φόρτιση λαμβάνει χώρα μόνο κάθετα προς τα επιμήκη στοιχεία του σώματος και δεν μεταβάλλεται σημαντικά κατά το μήκος του. Εάν επιπλέον θεωρηθεί ότι η μετακίνηση *w* του σώματος κατά την *z*-διεύθυνση είναι μηδέν σε κάθε εγκάρσια διατομή, προκύπτει [1]:

$$\varepsilon_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \tag{4}$$

Οπότε η συνιστώσα της τάσης σ_{zz} δίνεται από τη σχέση

$$\sigma_{zz} = v\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right) \tag{5}$$

Η σχέση τάσεων-παραμορφώσεων γίνεται

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1-v & v & 0 \\ v & 1-v & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2v}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{6}$$

4. ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ

Θεώρημα που εκφράζει την ισορροπία του σώματος[1].

Προκύπτει μετά από αλγεβρικές πράξεις από τις εξισώσεις ισορροπίας του σώματος.

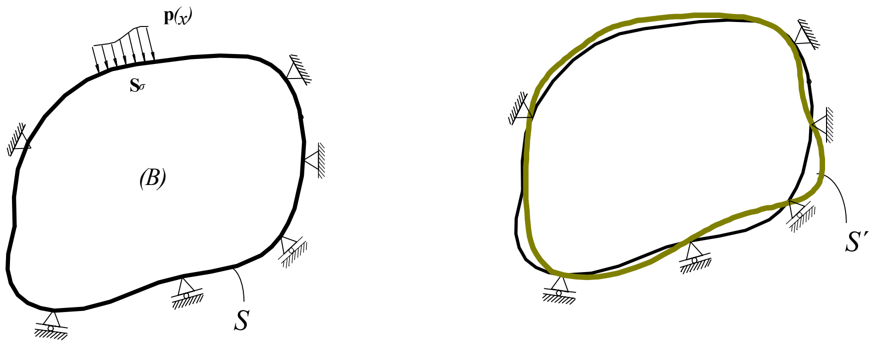
Λέει: *Το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων είναι ίσο με το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων.*

Τα δυνατά έργα δεν είναι πραγματικά έργα.

Το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων δΕ είναι το γινόμενο των πραγματικών δυνάμεων επί δυνατές (δηλαδή, φανταστικές) μετατοπίσεις που σέβονται τις συνθήκες στήριξης. Έτσι, οι δυνατές μετατοπίσεις μηδενίζονται στις στηρίξεις (Σχ.1(β)).

[1] Ισορροπία ενός κόκκου $\Rightarrow$ διαφορική εξίσωση ισορροπίας.

Ισορροπία εξωτερικών φορτίων εσωτερικών τάσεων $\Rightarrow$ συνοριακές συνθήκες



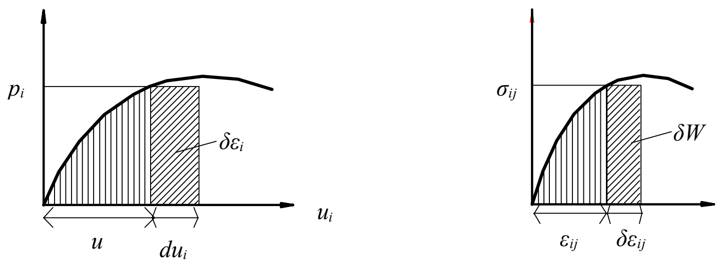
(α) (β)

Σχ. 1: (**α**) Φορέας S που φορτίζεται στο τμήμα S_σ από το φορτίο $p(x)$.
(**β**) S': σύνορο μετά από κινηματικά αποδεκτή μετατόπιση

Το στοιχειώδες έργο των εσωτερικών δυνάμεων είναι ίσο με το γινόμενο των πραγματικών τάσεων επί τις δυνατές παραμορφώσεις[2] και επί τον στοιχειώδη όγκο dV στον οποίο ενεργούν. Άρα, όλο το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων δU είναι το ολοκλήρωμα του δW σ΄ όλο τον όγκο του σώματος

$$\delta U = \int_V \delta W \, dV$$

Επιβάλλουμε τώρα στον φορέα μια κινηματικά αποδεκτή μεταβολή των μετατοπίσεων $u(x)$, το πεδίο αυτό που είναι απολύτως φανταστικό, σέβεται τη συνέχεια του φορέα καθώς και τις συνθήκες στήριξης. Τέλος, θεωρούμε ότι αυτή η μετατόπιση $\delta u(x)$ δεν προκαλεί μεταβολή των τάσεων σ_{ij}. Η $\delta u(x)$ που λέγεται **δυνατή μετατόπιση**, προκαλεί τις δυνατές παραμορφώσεις ($\delta\varepsilon_{ij}$).



(α) (β)

Στο Σχ.2(α) φαίνεται σχηματικά το διάγραμμα των p_i και u_i καθώς και η δυνατή μετατόπιση δu_i. Το γραμμοσκιασμένο τμήμα, που έχει εμβαδό δu_i παριστάνει το **δυνατό έργο** δE_i που παράγει η p_i κατά τη δυνατή μετατόπιση δu_i. Είναι σαφές ότι, το συνολικό δυνατό έργο δΕ θα είναι

[2] Οι δυνατές παραμορφώσεις προκύπτουν από τις δυνατές μετατοπίσεις με παραγώγιση.

$$\delta E = \int_{S_\sigma} \mathbf{p}\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S \qquad (1)$$

Το δυνατό έργο δΕ ξεχωρίζει από το πραγματικό *E* γιατί το πρώτο δεν υπάρχει φυσικά αλλά είναι ένα φανταστικό μαθηματικό εύρημα.

Το Σχ.2(β) παρουσιάζει συμβολικά το διάγραμμα των σ_{ij} - ε_{ij} καθώς και τη δυνατή παραμόρφωση $\delta\varepsilon_{ij}$. Το γραμμοσκιασμένο τμήμα, που έχει εμβαδόν $\sigma_{ij}\ \delta\varepsilon_{ij}$ παριστάνει την **δυνατή πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας** δW, οπότε

$$\delta U = \int_V \delta W\,\mathrm{d}V = \int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}V \qquad (2)$$

παριστάνει την **δυνατή ενέργεια παραμόρφωσης**. Και η δυνατή ενέργεια παραμόρφωσης δεν υπάρχει φυσικά αλλά είναι ένα μαθηματικό εύρημα.

Το δυνατό έργο δΕ πρέπει να είναι ίσο με την δυνατή ενέργεια παραμόρφωσης

$$\delta E = \delta U \quad , \quad \int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}V = \int_{S_\sigma} \mathbf{p}\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S \qquad (3)$$

Η σχέση αυτή παριστάνει την **αρχή των δυνατών έργων** όταν στο σώμα επιβάλλονται δυνατές μετατοπίσεις. Για να αποδείξουμε τη σχέση βασισθήκαμε στο γεγονός ότι ο φορέας βρίσκεται σε ισορροπία. Αποδεικνύεται όμως και το αντίστροφο, ότι δηλαδή, όταν ισχύει η αρχή των δυνατών έργων ο φορέας ισορροπεί. (Για πιο πολλές λεπτομέρειες πρβλ. §25.4).

Έτσι, μπορούμε να διατυπώσουμε ως εξής την αρχή των δυνατών έργων:

Αρχή των δυνατών έργων	Η αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε ένας φορέας να βρίσκεται σε ισορροπία, είναι το έργο που εκτελούν τα εξωτερικά φορτία αν επιβληθεί στο φορέα ένα πεδίο δυνατών μετατοπίσεων, κινηματικά παραδεκτών, να ισούται με τη δυνατή παραμορφωσιακή ενέργεια

Η αρχή των δυνατών έργων έχει πολύ μεγάλη σημασία, δεδομένου ότι ισχύει για οποιοδήποτε νόμο συμπεριφοράς του υλικού της κατασκευής. Η αρχή των δυνατών έργων δεν αποτελεί μία πρόσθετη σχέση της θεωρίας των παραμορφωσίμων σωμάτων αλλά την ολοκληρωματική έκφραση των εξισώσεων ισορροπίας. Διαφέρει από τις εξισώσεις ισορροπίας στο γεγονός ότι, αυτές εκφράζουν την ισορροπία σε κάθε σημείο ξεχωριστά του σώματος, ενώ η αρχή των δυνατών έργων σ’ ολόκληρο το σώμα. Αυτήν την διαφορά μπορούμε να την εκμεταλλευτούμε και να αναπτύξουμε μεθόδους υπολογιστικές πολύ πιο απλές απ’ ότι αν χρησιμοποιήσουμε τις κλασικές εξισώσεις ισορροπίας. Έτσι, με τη βοήθεια της αρχής των δυνατών έργων αναπτύχθηκε η **μητρωϊκή ανάλυση των κατασκευών** για τον υπολογισμό οποιασδήποτε κατασκευής. Σημειώνουμε πάντως ότι, η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων μπορεί να προκύψει και από το **θεώρημα του ελάχιστου της δυναμικής ενέργειας**.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ(*)

1. ΣΤΑΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΚΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΚΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ

Θα εξετάσουμε το ίδιο πρόβλημα οριακής τιμής που περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο με την διαφορά όμως ότι όλα τα μεγέθη (εξωτερικές δυνάμεις, μετατοπίσεις, τάσεις, παραμορφώσεις), είναι ανεξάρτητα του χρόνου *t*.

Ονομάζουμε **στατικά παραδεκτό** ένα πεδίο τάσεων σ_{ij} που ικανοποιεί:

1. Τις συνθήκες ισορροπίας σε κάθε σημείο του σώματος

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \tag{4}$$

1. Τις επιφανειακές συνθήκες στο τμήμα της επιφάνειας S_σ του σώματος

$$t_i - \sigma_{ij} n_j = 0 \tag{5}$$

Ονομάζουμε **κινηματικά παραδεκτό** ένα πεδίο μετατοπίσεων *u(x),* δύο φορές παραγωγίσιμο, που οι παραμορφώσεις ε_{ij} προκύπτουν από την ακόλουθη σχέση μετατοπίσεων - παραμορφώσεων

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{6}$$

ενώ στο τμήμα της επιφάνειας S_u του σώματος ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες

$$u_i(x) - g_i(x) = 0 \quad , \quad x \in S_u \tag{7}$$

Εξυπακούεται ότι τότε θα ικανοποιούνται και οι συνθήκες συμβιβαστού των παραμορφώσεων.

Από τη στατικά παραδεκτή κατανομή τάσεων *(σ_{ij})* προκύπτει με τη βοήθεια των καταστατικών εξισώσεων ένα πεδίο παραμορφώσεων. Αν το πεδίο αυτό των παραμορφώσεων είναι κινηματικά παραδεκτό, τότε το πεδίο σ_{ij} αποτελεί την πραγματική λύση του προβλήματος. Αντίστροφα, από ένα κινηματικά παραδεκτό πεδίο μετατοπίσεων *u* προκύπτουν οι παραμορφώσεις και στη συνέχεια οι τάσεις. Αν το πεδίο αυτό των τάσεων είναι στατικά παραδεκτό, το πεδίο *u* αποτελεί την πραγματική λύση του προβλήματος.

Το κινηματικά παραδεκτό πεδίο είναι εντελώς αυθαίρετο. Ο μόνος περιορισμός είναι να μην επιβάλλουμε μετακίνηση που να παραβιάζει το σύνδεσμο (π.χ. σε μια κύλιση να επιβάλλουμε μετακίνηση κάθετη στο επίπεδο κύλισης κ.ο.κ.).

(*) Αυτή απευθύνεται σε όσους θα ήθελαν να δουν την απόδειξη της προηγούμενης παραγράφου. Οι υπόλοιποι «**μπορούν να την παραλείψουν χωρίς καμία απώλεια**».

2. ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΗΣ ΣΧΕΣΗΣ

Θα εξετάσουμε το γενικό πρόβλημα οριακής τιμής που περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Έστω σ_{ij} , u_i , ε_{ij} το πεδίο των πραγματικών τάσεων μετατοπίσεων και παραμορφώσεων αντίστοιχα[3].

Θεωρούμε τώρα ένα πεδίο κινηματικά παραδεκτών μετατοπίσεων δu_i που όμως πάνω στο S_u ικανοποιούν τις ομογενείς οριακές συνθήκες

$$\delta u_i(\mathbf{x})=0 \quad , \quad \mathbf{x}\in S_u \tag{8}$$

Μετατοπίσεις αυτού του είδους λέγονται **δυνατές μετατοπίσεις**. (Θα δούμε, πιο κάτω, ότι οι $\delta u_i(x)$ μπορούν να θεωρηθούν σαν μεταβολές (variations) του πραγματικού πεδίου των μετατοπίσεων).

Ας υποθέσουμε ότι επιβάλλουμε στο σώμα B, χωρίς να μεταβληθούν τα πεδία σ_{ij} , u_{ij} , ε_{ij} και τα πεδία των φορτίσεων F_i και t_i να εκτελέσει τις μετατοπίσεις δu_i και φυσικά να υποστεί τις παραμορφώσεις $\delta\varepsilon_{ij}$.

Όπως κάναμε για το απόλυτα στερεό, θα πολλαπλασιάσουμε τις σχέσεις ισορροπίας (4) και (5) με δu_{ij}. Στη συνέχεια, θα πάρουμε το άθροισμα των ολοκληρωμάτων τους πάνω στον όγκο V του σώματος και πάνω στην επιφάνεια S_σ αντίστοιχα:

$$\int_V \left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+F_i\right)\delta u_i\,\mathrm{d}V+\int_{S_\sigma}\left(t_i-\sigma_{ij}n_j\right)\delta u_i\,\mathrm{d}S=0 \tag{9}$$

Επειδή ισχύει η (8) μπορούμε να αφαιρέσουμε από την προηγούμενη σχέση το ολοκλήρωμα πάνω στην S_u της ποσότητας $\sigma_{ij}n_ju_i$ οπότε, λαμβάνοντας υπόψη ότι $S_u \cup S_\sigma = S$, βρίσκουμε

$$\int_V \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\delta u_i\,\mathrm{d}V+\int_S \sigma_{ij}n_j\delta u_i\,\mathrm{d}S+\int_V F_i\,\delta u_i\,\mathrm{d}V+\int_S t_in_j\delta u_i\,\mathrm{d}S=0 \tag{10}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Green - Gauss στο δεύτερο όρο της (10) βρίσκουμε

$$\int_V \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\delta u_i\,\mathrm{d}V-\int_V \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\delta u_i\,\mathrm{d}V-\int_V \sigma_{ij}\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}V+\int_V F_i\delta u_i\,\mathrm{d}V+\int_{S_\sigma}\left(t_i-\delta u_i\,\mathrm{d}S\right)=0 \tag{11}$$

Αν πάρουμε υπόψη τη συμμετρία του τανυστή των τάσεων, θα έχουμε (πρβλ. (265.8))

$$\sigma_{ij}\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}=\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}+\sigma_{ij}\frac{\partial\delta u_j}{\partial x_i}\right)=\sigma_{ij}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\delta u_j}{\partial x_i}\right)=\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} \tag{12}$$

[3] Στην πραγματικότητα δεν είναι απαραίτητο το πεδίο των τάσεων σ_{ij} να είναι πραγματικό, αλλά μόνο στατικά παραδεκτό.

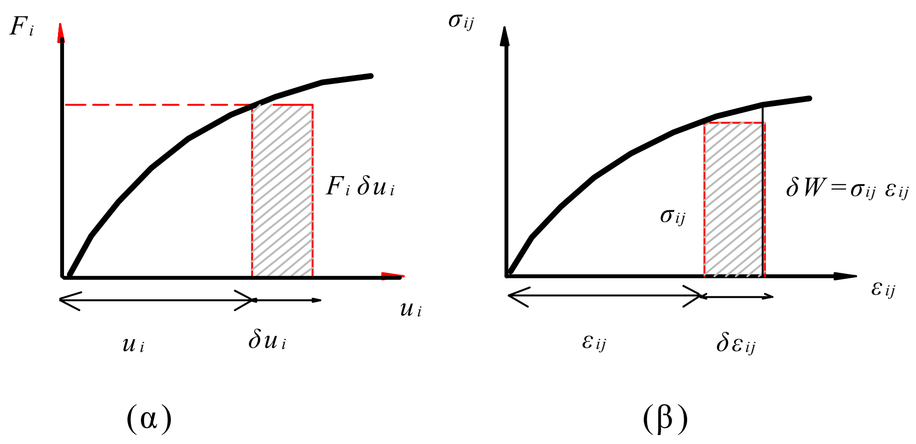
Οπότε, η σχέση (11) λόγω και της (12) γράφεται

$$\int_V \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}V = \int_V F_i\,\delta u_i\,\mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} t_i \delta u_i\;\mathrm{d}S + \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j \delta u_i\;\mathrm{d}S \qquad (13)$$

Το δεύτερο μέλος παριστάνει το δυνατό έργο δE των δυνάμεων t_i και F_i δηλαδή το έργο που παράγεται όταν οι δυνάμεις F_i και t_i παραμένουν σταθερές και μεταβληθεί κατά δu η μετατόπιση u_i. Στο Σχ.3(α) δείχνουμε ενδεικτικά το δάγραμμα των δυνάμεων F_i και σημειώνουμε το δυνατό έργο $F_i\delta u_i$. Το πρώτο μέλος παριστάνει τη δυνατή παραμορφωτική ενέργεια δU

$$\delta U = \int_V \delta W\,\mathrm{d}V \quad , \quad \delta W = \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} \qquad (14)$$

όπου δW η πυκνότητα δυνατής παραμορφωτική ενέργειας. Όπως βλέπουμε και από το Σχ.3(β), η δW είναι η αύξηση της πυκνότητας ενέργειας παραμόρφωσης όταν η σ_{ij} διατηρηθεί σταθερή και μεταβληθεί κατά ε_{ij} η παραμόρφωση από τη θέση ισορροπίας ε_{ij}.



Σχήμα 3

Αξίζει να σημειώσουμε ότι, η απειροστή μεταβολή du_i του πεδίου των πραγματικών μετατοπίσεων u_i είναι προφανώς, ένα κινηματικά παραδεκτό πεδίο το οποίο ικανοποιεί και την ομογενή συνθήκη (8) στο όριο S_u. Έτσι, αν πάρουμε σαν δυνατό πεδίο το πεδίο των απειροστών μεταβολών $\left(\delta u_i = du_i\,,\,\delta\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}\right)$ και περιοριστούμε στα ελαστικά (γραμμικά μη-γραμμικά) υλικά, τότε η πυκνότητα της δυνατής ενέργειας παραμόρφωσης δ*W,* λαμβάνοντας υπόψη και την (13) γράφεται

$$\delta W = \sigma_{ij}\,\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \mathrm{d}W \qquad (15)$$

δηλαδή η δW παριστάνει σ΄ αυτήν την περίπτωση, την απειροστή μεταβολή dw της πυκνότητας της ενέργειας παραμόρφωσης W. Ακόμα, η δU παριστάνει την απειροστή μεταβολή dU της ενέργειας παραμόρφωσης U.

Η σχέση (13) εκφράζει την **αρχή των δυνατών έργων**, όταν στο σώμα επιβάλλονται δυνατές μετατοπίσεις. (Το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων, δηλαδή η δυνατή ενέργεια, είναι ίση με το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων). Η διαδικασία που ακολουθήσαμε απέδειξε ότι, όταν ισχύουν οι εξισώσεις ισορροπίας (14) και (15) τότε αναγκαστικά θα ισχύει και η σχέση (13). Άρα η αρχή των δυνατών έργων - (αρχή των δυνατών μετατοπίσεων) (13) και αντιστρέφοντας την πορεία των πράξεών μας καταλήγουμε στη σχέση (19) που ικανοποιείται για αυθαίρετα δu_i μόνον όταν οι παρενθέσεις είναι ίσες με μηδέν, δηλαδή ικανοποιούνται οι συνθήκες ισορροπίας (14) και (15).

Έτσι, μπορούμε να διατυπώσουμε ως εξής την αρχή των δυνατών έργων:

Αρχή των δυνατών έργων	*Η αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε ένα παραμορφώσιμο σώμα να βρίσκεται σε ισορροπία είναι το έργο που εκτελούν τα εξωτερικά φορτία αν επιβληθεί στο σώμα ένα πεδίο δυνατών μετατοπίσεων, κινηματικά παραδεκτών, να ισούται με τη δυνατή ενέργεια παραμόρφωσης.*

Η αρχή των δυνατών έργων έχει πολύ μεγάλη σημασία δεδεμένου ότι, ισχύει για οποιοδήποτε νόμο συμπεριφοράς του υλικού.