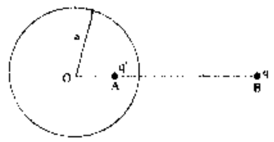
- Ειδωλα:



Σχήμα 1: Είδωλο φορτίου q σε απόσταση d μπροστά από σφαίρα ακτίνας a:
$q' = -\frac{a}{d}q\,,\quad d' = \frac{a^2}{d}$ με $|OA| = d'\quad |OB| = d$

- Διανυσματικό δυναμικό λόγω πυκνότητας ρεύματος J, στην βαθμίδα Coulomb

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3\mathbf{x}'\,, \tag{9}$$

- Διανυσματικό δυναμικό ρευματοφόρου αγωγού που διαρέεται από ρεύμα I, στην βαθμίδα Coulomb

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I d\mathbf{l}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,, \tag{10}$$

- Μαγνητικό πεδίο

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}\,, \tag{11}$$

Μαθηματικές σχέσεις που ίσως χρειαστούν:

1.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \tag{12}$$

$$\int_0^\pi \sin^2\theta d\theta = \frac{\pi}{2}\,. \tag{13}$$

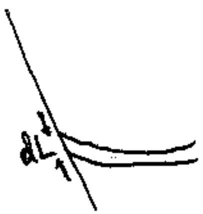
$$\int_0^\pi \sin\theta\cos\theta d\theta = 0 \tag{14}$$

2.

$$\frac{1}{(1+x)^a} = 1-ax+\frac{1}{2}a(a+1)x^2-\frac{1}{6}a\left(a^2+3a+2\right)x^3+\frac{1}{24}a\left(a^3+6a^2+11a+6\right)x^4+O\left(x^5\right) \tag{15}$$

3.

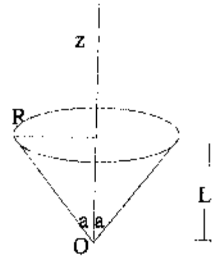
$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1 \tag{16}$$



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜ. ΜΑΘ. & ΦΥΣ. ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
157 73 ΑΘΗΝΑ

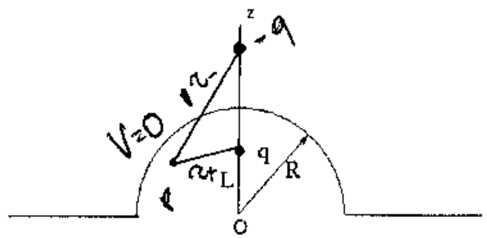
NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
FACULTY OF APPLIED SCIENCES
PHYSICS DEPARTMENT
ZOGRAFOU CAMPUS
GR 157 73 ATHENS - GREECE

ΜΑΘΗΜΑ: ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ ΙΙ
ΕΞΑΜΗΝΟ: 5$^{\text{Ο}}$
ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2$^{1/2}$ ΩΡΕΣ
ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΡΤΙΟΥ 2010



Σχημ. 1

ΘΕΜΑ 1). (2.5 μονάδες) Κωνική επιφάνεια έχει κυκλική βάση ακτίνας R και είναι αξονικά συμμετρική με άξονα συμμετρίας τον άξονα z όπως στο διπλανό Σχημ. 1. Εχει ύψος L, γωνία κορυφής 2a και σταθερή επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ. Να βρεθεί το δυναμικό πάνω στον άξονα συμμετρίας z του κώνου.

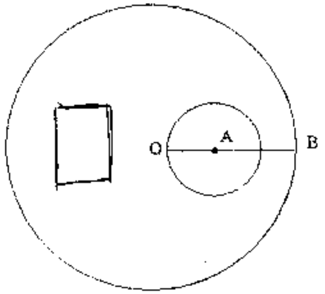


Σχημ. 2

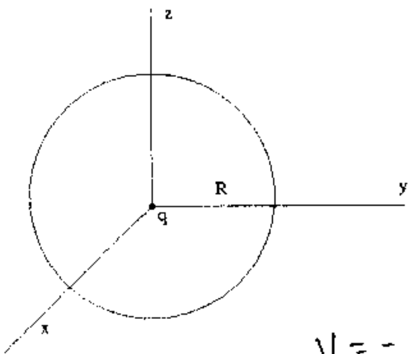
ΘΕΜΑ 2). (2.5 μονάδες) Φορτίο q βρίσκεται σε απόσταση L από το κέντρο O ημισφαιρικού γειωμένου αγωγού ακτίνας R ο οποίος συνεχίζει επίπεδος όπως στο Σχημ 2.

Να βρεθεί το δυναμικό στο χώρο που βρίσκεται το φορτίο q.

$$\vec{J} = \frac{I}{A} = \frac{I}{9\pi a^2 - \pi a^2} = \frac{I}{8\pi a^2}$$



ΘΕΜΑ 3). (2.5 μονάδες) Άπειρος συμπαγής κύλινδρος κυκλικής διατομής ακτίνας |OB|=3a, φέρει άπειρη κυλινδρική κοιλότητα, παράλληλη προς τον άξονα του, κυκλικής διατομής ακτίνας |OA|=a. Ο συμπαγής κύλινδρος διαρρέεται από ρεύμα I ομοιόμορφα κατανεμημένο και με φορά προς εσάς. Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο:
α) στο εξωτερικό του συμπαγούς κυλίνδρου,
β) στο εσωτερικό του και εκτός κυλινδρικής κοιλότητας και
γ) εντός της κυλινδρικής κοιλότητας.



ΘΕΜΑ 4). (2.5 μονάδες) Α). Φορτίο q βρίσκεται στο κέντρο σφαίρας ακτίνας R η επιφάνεια της οποίας είναι σε δυναμικό

$$\Phi(R,\theta)=V_0 \cos\theta$$

με V_0 σταθερό. Να βρεθεί:
A) Το δυναμικό παντού στο χώρο.
B) Η διπολική ροπή του συστήματος.

$$V = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= -\int_\infty^R \vec{E}\cdot d\vec{l} - \int_R^r \hat{E}\, dl$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: ΟΧΙ ΒΙΒΛΙΑ, ΟΧΙ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ.

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Ισως σας χρειαστούν:

- Σχέση ηλεκτρικού πεδίου **E** και βαθμωτού δυναμικού Φ:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi\,, \tag{1}$$

- Λύση εξίσωσης Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες με αξονική συμμετρία:

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right)P_\ell(\cos\theta)\,. \tag{2}$$

- Μερικά πολυώνυμα Legendre ($x = \cos\theta$)

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1\,,\\ P_1(x) &= x\,,\\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1)\\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x)\\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\int(\vec{\nabla}\vec{B})\cdot d\vec{a} = \mu_0\int\vec{J}\,da$$

$$\int\vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{encl}$$

- Επίσης

$$P_\ell(1) = 1,\quad P_\ell(-1) = (-1)^\ell \qquad \ell = 0,1,2,\ldots \tag{4}$$

- Τα πολυώνυμα Legendre αποτελούν πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στο διάστημα $-1 \le x \le 1$. Έτσι, συναρτήσεις $f(x)$ ορισμένες σε αυτό το διάστημα, μπορούν να γραφούν σαν

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell P_\ell(x)\,,\quad A_\ell = \frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_\ell(x)dx \tag{5}$$

- Πολυπολική ανάπτυξη δυναμικού σε Καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{Q_{ij}x_ix_j}{r^5} + \cdots\right) \tag{6}$$

- Ηλεκτρική διπολοκή ροπή

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{x}'\rho(\mathbf{x}')d^3x' \tag{7}$$

- Ηλεκτρική τετραπολική ροπή

$$Q_{ij} = \int(3x_i'x_j' - r'^2\delta_{ij})\rho(\mathbf{x}')d^3x' \tag{8}$$