ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Επαναληπτική Εξέταση στη Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΟΜΑΔΑ: Α

9 Σεπτεμβρίου, 2016

Θ1. (α΄) Χρησιμοποιώντας την πυκνότητα του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία ρητών (q_n) με $\lim q_n = x$. (0,8 μον.)

(β΄) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n^2}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n^2} \le a_n \le 2n^2\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n^2}.$$

Υπολογίστε το $\lim \sqrt[n]{a_n}$ και εξετάστε ως προς την σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. (1,2 μον).

Λύση.

(α΄) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Από την πυκνότητα του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει ρητός q_n με

$$x - \frac{1}{n} < q_n < x + \frac{1}{n}.$$

Ισχυριζόμαστε ότι η ακολουθία (q_n) συγκλίνει στο x. Πράγματι, έχουμε $\lim_{n\to\infty}\big(x - \frac{1}{n}\big) = \lim_{n\to\infty}\big(x + \frac{1}{n}\big) = x$ και άρα απο το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι και $\lim_{n\to\infty} q_n = x$.

(β΄) Παρατηρούμε ότι απο την δεδομένη ανισότητα έχουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}\Big[\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n^2}\Big]^{1/n} \le \sqrt[n]{a_n} \le \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n^2}\Big[\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n^2}\Big]^{1/n} \Leftrightarrow\\
&\frac{1}{\big(\sqrt[n]{n}\big)^2}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n} \le \sqrt[n]{a_n} \le \sqrt[n]{2}\big(\sqrt[n]{n}\big)^2\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n} \Leftrightarrow\\
&\frac{1}{\big(\sqrt[n]{n}\big)^2}\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\Big)^{n} \le \sqrt[n]{a_n} \le \sqrt[n]{2}\big(\sqrt[n]{n}\big)^2\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\Big)^{n} \Leftrightarrow\\
&\frac{1}{\big(\sqrt[n]{n}\big)^2}\frac{1}{\big(1+\frac{1}{n}\big)^n} \le \sqrt[n]{a_n} \le \sqrt[n]{2}\big(\sqrt[n]{n}\big)^2\frac{1}{\big(1+\frac{1}{n}\big)^n}
\end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2} = 1$ και $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\big(1+\frac{1}{n}\big)^n} = e$, έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\big(\sqrt[n]{n}\big)^2}\frac{1}{\big(1+\frac{1}{n}\big)^n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\big(\sqrt[n]{n}\big)^2\frac{1}{\big(1+\frac{1}{n}\big)^n} = 1/e$$

και άρα απο το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι και $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1/e$. Τέλος επειδή $e > 1$ έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} < 1$ και άρα απο κριτήριο ρίζας η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

■

Θ2. (α΄) Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει δείξτε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ συγκλίνει. (0,8 μον.)
(*Υπόδειξη*: Εξετάστε πρώτα την περίπτωση όπου $0 \le a_n \le 1$).

(β′) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \big(\cos \big(\frac{1}{n}\big) - \ln(1+\frac{1}{n})\big).$$

(1,2 μον.)

Λύση.

(α′) Υποθέτουμε πρώτα ότι $0 \le a_n \le 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $0 \le a_n^2 \le a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και άρα απο κριτήριο σύγκρισης θα συγκλίνει και η σειρά η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Στην γενική περίπτωση εργαζόμαστε ως εξής. Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Ειδικότερα η (a_n) είναι φραγμένη ακολουθία και έστω $M > 0$ ένα άνω φράγμα της (a_n). Τότε έχουμε

$$0 \le a_n \le M \Leftrightarrow 0 \le a_n/M \le 1\,.$$

Θέτοντας $b_n = a_n/M$ έχουμε συνεπώς ότι $0 \le b_n \le 1$. Επιπλέον η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει διότι παίρνοντας τα αντίστοιχα μερικά αθροίσματα προκύπτει ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Άρα απο την ειδική περίπτωση που εξετάσαμε στην αρχή έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ συγκλίνει. Παρατηρούμε τώρα ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = M^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ και άρα και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ συγκλίνει.

(β′) Για τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2+1}$ εφαρμόζουμε το κριτήριο ορίου λόγου συγκρίνοντας με την $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

και άρα αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει έχουμε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+1}$ συγκλίνει.
Για τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}$ εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{(n+1)!}}}{\frac{1}{\sqrt{(n)!}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n!}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n+1}} = 0 < 1$$

και άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}$ συγκλίνει.
Τέλος για τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \big(\cos\big(\frac{1}{n}\big) - \ln(1+\frac{1}{n})\big)$ παρατηρούμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \big(\cos \big(\frac{1}{n}\big) - \ln(1+\frac{1}{n})\big) = \cos 0 - \ln 1 = 1 \neq 0$$

και συνεπώς η σειρά δεν μπορεί να συγκλίνει.

■

Θ3. (α′) Έστω η συνάρτηση $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ορισμένη στο διάστημα I. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in I$, δείξτε ότι για για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του $I \setminus \{x_0\}$ που συγκλίνει στο x_0 η ακολουθία

$$\left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right) \text{ συγκλίνει στο } f'(x_0)\,.$$

(1 μον.)

(β′) Έστω $\alpha > 1$. Αν

$$b_n := \frac{(n+1)^{\alpha-1} - n^{\alpha-1}}{n^{\alpha-2}}\,, \quad n \in \mathbb{N}^*\,,$$

εφαρμόζοντας το (α′) υπολογίστε το όριο $\lim_{n\to\infty} b_n$ (0,6 μον.)

(γ′) Έστω $\alpha > 1$. Αν

$$c_n := \frac{1^{\alpha-1} + 2^{\alpha-1} + 3^{\alpha-1} + \cdots + n^{\alpha-1}}{n^\alpha}\,, \quad n \in \mathbb{N}^*\,,$$

χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα κατάλληλης συνάρτησης στο διάστημα $[0,1]$ υπολογίστε το όριο $\lim_{n\to\infty} c_n$. Εξετάστε αν $\lim_{n\to\infty} b_n \cdot \lim_{n\to\infty} c_n = 1 - \alpha^{-1}$. (0,6 μον.)

Λύση.

(α′) Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{αν } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ με } x \in I\,, \text{ τότε } \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right| < \varepsilon\,. \tag{1}$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, για το παραπάνω $\delta > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$, τέτοιο ώστε

$$0 < |x_n - x_0| < \delta \quad \text{για κάθε } n \geq N\,.$$

Επομένως για κάθε $n \geq N$ από την (1) έπεται ότι

$$\left|\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} - f'(x_0)\right| < \varepsilon$$

και άρα $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = f'(x_0)$.

(β′) Αν $f(x) = (1+x)^{\alpha-1}$, $x \in \mathbb{R}$, τότε $f'(x) = (\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ και επομένως $f'(0) = \alpha - 1$. Η ακολουθία $x_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$, σημείων του $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ συγκλίνει στο 0. Εφαρμόζοντας το (α′) έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n)^{\alpha-1} - 1^{\alpha-1}}{1/n} = f'(0) = \alpha - 1\,.$$

(γ′) Είναι

$$c_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} + \left(\frac{2}{n}\right)^{\alpha-1} + \left(\frac{3}{n}\right)^{\alpha-1} + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^{\alpha-1}\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\,,$$

όπου $f(x) = x^{\alpha-1}$. Επομένως, από τη θεωρία του ολοκληρώματος Riemann έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1} = \int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx = \frac{1}{\alpha}\,x^\alpha\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{\alpha}\,.$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{n\to\infty} b_n \cdot \lim_{n\to\infty} c_n = (\alpha-1)\cdot\alpha^{-1} = 1 - \alpha^{-1}$.

■

Θ4. Έστω $f \in C^2([a,b])$, δηλαδή η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a,b]$. Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση και το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα, δείξτε ότι

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f'(a) + \frac{1}{2}\int_a^b (x-b)^2 f''(x)\,dx\\ &= (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f'(a) + \frac{(b-a)^3}{3!}f''(\xi)\,,\end{aligned}$$

για κάποιο $\xi \in [a,b]$. (1,5 μον.)

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b (x-b)' f(x)\,dx \\
&= (x-b)f(x)\big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b (x-b)f'(x)\,dx && \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\
&= (b-a)f(a) - \frac{1}{2}\int_a^b [(x-b)^2]' f'(x)\,dx \\
&= (b-a)f(a) - \frac{1}{2}\,(x-b)^2 f'(x)\big|_{x=a}^{x=b} + \frac{1}{2}\int_a^b (x-b)^2 f''(x)\,dx && \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\
&= (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f'(a) + \frac{1}{2}\int_a^b (x-b)^2 f''(x)\,dx\,.
\end{aligned}$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα υπάρχει $\xi \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b (x-b)^2 f''(x)\,dx = f''(\xi)\int_a^b (x-b)^2\,dx = f''(\xi)\frac{1}{3}\,(x-b)^3\big|_{x=a}^{x=b} = f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{3}$$

και επομένως

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f'(a) + \frac{(b-a)^3}{3!}f''(\xi)\,.$$

■

Θ5. Έστω η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα I και έστω $a, b \in I$ με $a < b$.

(α′) Αν $f''(t) \geq 0$ για κάθε $t \in I$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι *κυρτή* στο I, χρησιμοποιώντας τον τύπο Taylor δείξτε ότι

$$f(t) \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(t - \frac{a+b}{2}\right), \quad \text{για κάθε } t \in I\,. \tag{2}$$

(0,5 μον.)

(β′) Χρησιμοποιώντας το (α′), δείξτε ότι

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)\,.$$

(0,6 μον.)

(γ′) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(t) = \ln(1+e^t)$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και ότι

$$\int_{\ln x^2}^0 \ln(1+e^t)\,dt \geq -2\ln|x| \cdot \ln(1+|x|)\,, \qquad |x| < 1,\ x \neq 0\,.$$

(0,6 μον.)

(δ′) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}\left(\int_{\ln x^2}^0 \ln(1+e^t)\,dt\right)\,.$$

(0,6 μον.)

Λύση.

(α′) Επειδή $x_0 = (a+b)/2 \in I$, για κάθε $t \in I$ από τον τύπο Taylor έχουμε

$$f(t) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(t - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2!}\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 ,$$

για κάποιο ξ μεταξύ $(a+b)/2$ και t. Όμως από την υπόθεση είναι $f''(\xi) \geq 0$ και επομένως

$$f(t) \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(t - \frac{a+b}{2}\right) , \quad \text{για κάθε } t \in I .$$

(β′) Ολοκληρώνοντας την ανισότητα (2) στο διάστημα $[a,b]$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,dt &\geq \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dt + \int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(t - \frac{a+b}{2}\right) dt \\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right) dt \\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{1}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2\Bigg|_{t=a}^{t=b} \\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{1}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right] \\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)
\end{aligned}$$

και επομένως

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) .$$

(γ′) Επειδή

$$f'(t) = \frac{e^t}{1+e^t} \text{ και } f''(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} > 0 , \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R} ,$$

η συνάρτηση $f(t) = \ln(1+e^t)$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Επειδή για $|x| < 1$, $x \neq 0$ είναι $\ln x^2 < 0$, από το (β′) έπεται ότι

$$\int_{\ln x^2}^0 \ln(1+e^t)\,dt \geq (0 - \ln x^2)\ln\left(1 + e^{\ln x^2/2}\right) = -2\ln|x| \cdot \ln(1+|x|) .$$

(δ′) Για $x \neq 0$ από το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού έχουμε

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\ln x^2}^0 \ln(1+e^t)\,dt\right) = -\ln\left(1 + e^{\ln x^2}\right) \cdot \frac{d}{dx}\ln x^2 = -\ln(1+x^2) \cdot \frac{2x}{x^2} = -2\frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

και επομένως

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}\left(\int_{\ln x^2}^0 \ln(1+e^t)\,dt\right) &= -2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x} \\
&= -4\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+x^2} = 0 . \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)}
\end{aligned}$$

■

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες