ΣΕΜΦΕ+Ηλεκτρολογοι Μηχ., Εξέταση στον «Βέλτιστο Έλεγχο», ΙΟΥΛΙΟΣ 2012

ΕΠΙΛΟΓΗ ΘΕΜΑΤΩΝ:

Θέμα 1. (Μοναδες 2) Να εξαχθουν οι αναγκαιες συνθηκες για το προβλημα $\int_{t_1}^{t_2} f(t,x(t),\dot{x}(t))dt \to \min$ με $x(t_1)$ δοθεν και $x(t_2)$ ελευθερο (f επαρκως παραγωγισιμη).

Θεμα 2. (Μοναδες 2) Αν F,Q,R συμμετρικοι πινακες, δειξτε οτι P ο πινακας- λυση της Δ.Ε. Riccati:

$$\dot{P} = -PA - A'P + PBR^{-1}B'P - Q,\ P(T) = F$$

ειναι συμμετρικος και με χρηση της Riccati επιλύστε το πρόβλημα του ρυθμιστή

$$\dot{x} = 2x + u,\ J(u) = \int_0^1 (x^2(t) + u^2(t))dt \to \min,\ x_0 \in \mathbb{R} \text{ δοθέν}$$

Θεμα 3.(Μοναδες 2) Διερευνηση του προβλήματος

$$\dot{x}_1 = x_2 u, \dot{x}_2 = x_1 u,\ J(u) = Ax_1^2(1) + Bx_2^2(1) + \int_0^1 u^2(t)dt \to \min$$

$$(x_1(0), x_2(0)) \in \mathbb{R}^2, \delta o\theta\varepsilon\nu\tau\alpha, \quad u(\bullet) \text{ χωρίς περιορισμούς.}$$

(Υπόδειξη: Δείξτε ότι ο υποψήφιος άριστος έλεγχος είναι σταθερός στο διάστημα [0,1]).

Θέμα 4. (Μοναδες 3)Μελετηστε το πεδιο φασεων του συστηματος $\dot{x} = n, \dot{n} = x$ και στην συνεχεια διερευνηστε το προβλήμα

$$\dot{x} = u,\ x \in \mathbb{R},\ |u(\cdot)| \le 1,\ J(u) = \tfrac{1}{100}x^2(T) + \int_0^T (\tfrac{1}{2}x^2(t) + \tfrac{1}{2}u^2(t))dt \to \min,\ x(0), T \text{ δοθέντα.}$$

Θέμα 5. (Μοναδες 3) Περιγραψτε την μεταβολη «β-ειδους» για τον ελεγχο $u:[0,T] \to [-1,1]$ στον χρονο $t_0 \in (0,T)$ και δειξτε οτι η αντιστοιχη μεταβολη δx της λυσης του συστηματος $\dot{x} = f(x,u)$ ικανοποιει

$$(\delta x)(t) = 0, \forall t \in [0,t_0) \text{ και } \frac{d}{dt}(\delta x(t)) = (\frac{\partial}{\partial x}(f(x(t),u(t)))\delta x(t), \forall t \ge t_0$$

$$\text{με } (\delta x)(t_0) = f(x(t_0),v) - f(x(t_0),u(t_0)), |v| \le 1$$

Θέμα 6. (Μοναδες 2) Διερευνηση του προβλήματος αρίστου χρόνου για το σύστημα $\dot{x}_1 = -x_1 + u, \dot{x}_2 = -5x_2 + u, |u(\cdot)| \le 1$.

Θέμα 7. (Μοναδες 2) Διερευνηση του προβλήματος

$$\dot{x}_1 = ux_1, \dot{x}_2 = (1-u)x_1,\ x_1(0) > 0, T > 0, \delta o\theta\varepsilon\nu\tau\alpha$$

$$u \in [0,1], \quad J(u) = -x_1^2(T) - \int_0^T x_2(t)dt \to \min$$

Laplace: $t^n \exp(-at)/n! \to 1/(s+a)^{n+1}$

$\sin kt \to k/(k^2+s^2), \cos kt \to s/(k^2+s^2)$