Θεόδωρος Αλεξόπουλος, Αναπληρωτής Καθηγητής
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ – ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 73
Τηλ.: 210 772-3019, Fax: 210 772-3021
e-mail: theoalex@central.ntua.gr

Theodoros Alexopoulos, Associate Professor
NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS – GREECE
Phone :+30210772-3019, Fax: +30210772-3021
http:/www.physics.ntua.gr/Faculty/theoalex
e-mail: Theodoros.Alexopoulos@cern.ch

30 Μαΐου 2007

Εαρινό Εξάμηνο 2007-2008 – "Ανάλυση Σήματος"
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών

Διδάσκων: Θεόδωρος Αλεξόπουλος
e-mail: theoalex@central.ntua.gr
Ώρες Γραφείου: Πέμπτη 10:30πμ-12:30μμ και Παρασκευή 10:30πμ-12:30μμ
Γραφείο: Τομέας Φυσικής, Κτίριο Φυσικής 2^{ος} όροφος, 209
Βιβλιογραφία: **"Ανάλυση Σήματος", Θ.Α., σημειώσεις μαθήματος και "Σήματα & Συστήματα (Προβλήματα)", Θ.Α.**

Οι διαλέξεις θα δίνονται κάθε **Δευτέρα 10:45– 12:30, Α301, Τετάρτη 10:45 – 12:30, Α301**. Θα δοθεί ένα διαγώνισμα (τελικό διαγώνισμα) κατά τη διάρκεια της εξεταστικής περιόδου όπου η ημερομηνία του θα καθοριστεί αργότερα. Το διαγώνισμα αυτό θα γίνει μόνο με **ανοικτό το βιβλίο** "Ανάλυση Σήματος" **ΑΛΛΑ** όχι με τις σημειώσεις "Σήματα & Συστήματα (Προβλήματα)".

Ύλη και το πρόγραμμα που θα καλυφθεί είναι:

Εβδομάδα	Κεφάλαιο Σημειώσεων	Ύλη, σύντομη περιγραφή
1^η	1	Εισαγωγή στα Σήματα & Συστήματα
2^η	2	Μετασχηματισμός Fourier συνεχή σημάτων
3^η	2	Μετασχηματισμός Fourier συνεχή σημάτων
4^η	4	Μετασχηματισμός Laplace συνεχή σημάτων
5^η	4	Συνάρτηση μεταφοράς, κυκλώματα
6^η	5	Σήματα διακριτού χρόνου
7^η	6	Μετασχηματισμός Z, ορισμός ειδιότητες
8^η	6	Συνάρτηση μεταφοράς συστημάτων
9^η	8	Συστήματα διακριτού χρόνου, ΓΧΑΣ
10^η	8	Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT)
11^η	8	Διαφοροεξισώσεις, Διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT)
12^η	9	Φίλτρα, πεπερασμένης απόκρισης (FIR)
13^η	9	Φίλτρα, ατελείωτης απόκρισης (IIR)

καλό και δημιουργικό εξάμηνο!

Ανάλυση Σήματος

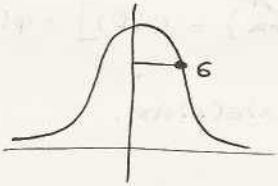
18/06/2007
(1/4)

$f(x)\delta(x)$

• Έστω δ να δρα στην φ: $\displaystyle\int \delta(x-\alpha)\varphi(x)\,dx = \varphi(\alpha)$

Επίσης είναι κανονικοποιημένη.

<u>Π.χ</u> Έστω η Gaussιανή : $\delta_\sigma(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}$



Ανάλογα με το σ στενεύει η Gaussιανή..

Για $\sigma \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{\sigma\to 0} \delta_\sigma(x) \equiv \delta(x)$

• Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα: $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$

Επίσης: $\delta(g(x)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}$

όπου, $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι οι ρίζες της $g(x)$ με $g'(x_i) \neq 0$.

<u>Π.χ</u> $\delta(\alpha^2 - x^2) = \delta((\alpha - x)(\alpha + x)) = \dfrac{\delta(x-\alpha)}{-2\alpha} + \dfrac{\delta(x+\alpha)}{2\alpha} = \dfrac{1}{2\alpha}\left\{\delta(x-\alpha) + \delta(x+\alpha)\right\}$

$(\alpha^2 - x^2)' = -2x \begin{cases} \to -2\alpha \\ \to 2\alpha \end{cases}$

* ——— *

Έστω η βηματική συνάρτηση: $u(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$\dfrac{du(x)}{dx} = \delta(x)$

Υπολογισμοί όταν η $u(x)$ δρα στη δοκιμαστική $\varphi(x)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{dx}\varphi(x)dx = \cancel{u\varphi\Big|_{-\infty}^{+\infty}} \to 0 - \int_{-\infty}^{+\infty} u\frac{d\varphi}{dx}\,dx =$$

$$= -\int_{0}^{\infty} \frac{d\varphi}{dx}\,dx$$

$$= -\left[\varphi(\cancel{+\infty}) \to 0 - \varphi(0)\right] = \varphi(0)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx.$$

* ——————————— *

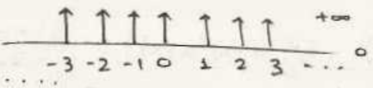
<u>Ιδιότητα</u>

$$\left.\begin{aligned} &\delta'(x) * f(x) = f'(x) \\ &\delta'(-x) = -\delta'(x) \\ &\delta(-x) = \delta(x) \end{aligned}\right\} \text{Να αποδειχτούν.}$$

* ——————————— *

<u>Ορίζουμε</u>: $\Delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n)$ {Δειγματοληπτική Συνάρτηση}

Σχηματικά



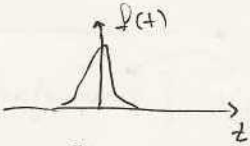
$$\Delta(t)f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-n) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\delta(t-n)}_{\text{Από προηγούμενη ιδιότητα.}}$$

Ανάλυση Σήματος

18/06/2007
(2/4)

$$\Delta(t) * f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t) * \delta(t-n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t-n)$$

<u>π.χ</u> Έστω αρχικό σήμα:



Το αποτέλεσμα είναι Gaussianές κατανομές. Εδώ έχω <u>αναπαραγωγή του σήματος</u>. στις διάφορες χρονικές στιγμές.

* ------------------------------ *

$$\left[f(t) * \delta(t-\alpha) = \delta(t-\alpha) * f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau-\alpha) f(t-\tau)\, d\tau = f(t-\alpha) \right]$$

<u>Εξήγηση</u>

* ------------------------------ *

<u>Περιοδικό Σήμα</u> : $x(t+T) = x(t)$

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi), \quad x(t) = Ae^{j(\omega t+\varphi)} = \underbrace{\left(Ae^{j\varphi}\right)}_{\text{φάσορας}} \underbrace{\left(e^{j\omega t}\right)}_{\text{αρμονικό κομμάτι σήματος.}}$$

* ------------------------------ *

$$E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt$$, ενέργεια σήματος.

$$P = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt$$, ισχύς σήματος.

• Για $E < +\infty$, $P \to 0$ (Ενεργειακό Σήμα)

$E \to +\infty$, $P \to$ πεπερασμένο (Σήμα ισχύος)

* ——————————— *

$x(t) = e^{-2t} u(t)$ { Αυτό εξασφαλίζει θετικό αποτέλεσμα }

<u>π.χ:</u> $$E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to 0} \int_{-T}^{+T} e^{-4t} u^2(t) dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-4t} dt = \frac{1}{4}.$$

* ——————————— *

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} e^{-4t} u^2(t) dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_0^{+T} e^{-4t} dt =$$

$$= \frac{-1}{4} \lim_{T\to\infty} \frac{e^{-4T} - 1}{2T} = 0.$$

* ——————————— *

Έστω $x(t+T) = x(t)$ } περιοδικό σήμα

ν.δ.ο $E \to +\infty$

& $P \to$ πεπερασμένη

} Να αποδειχτεί.

Ανάλυση Σήματος

Συστήματα : $x(t) \longrightarrow \boxed{\hat{R}} \longrightarrow y(t)$

$$y(t) = R[x(t)]$$

Γραμμικό Σύστημα : $R\left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i R[x_i(t)]$

Χρονικά αμετάβλητα : $\overbrace{y(t)}^{\text{Έξοδος}} = R[x(t)]$

$$y(t-\alpha) = R[x(t-\alpha)].$$

Γ.Χ.Α.Σ = γραμμικό χρονικά ανεξάρτητο Σύστημα.

* ——————— *

Στατικό Σύστημα : $\underbrace{y(t)}_{\text{Έξοδος}}$: Αν εξαρτάται μόνο από τις χρονικές στιγμές t ~~τότε~~ (και όχι από προηγούμενες)

π.χ $\underbrace{u(t) = R\,i(t)}$

Η έξοδος εξαρτάται από την είσοδο για δεδομένες / ίδιες χρον. στιγμές.

Δυναμικό Σύστημα : $q = CV \Leftrightarrow \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt} \Leftrightarrow \boxed{i = C\frac{du}{dt}}$

Έχουμε δηλ.: $\boxed{u(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t')\,dt'}$

Εδώ η έξοδος εξαρτάται και από άλλες χρονικές στιγμές της εισόδου... Εδώ χρειαζόμαστε ΟΛΕΣ τις προηγούμενες χρονικές στιγμές. (Σύστημα με μνήμη)

- <u>Ευσταθές</u>: Φ.Ε.Φ.Ε. (Φραγμένη είσοδος/Φραγμένη έξοδος)

$$|x(t)| < M \Rightarrow |y(t)| < M'.$$

- <u>Αιτιατό</u>: Η έξοδος κάποια χρονική στιγμή εξαρτάται από την είσοδο και..

  .. αν $y(t')$ εξαρτάται και από $t \leq t'$ του σήματος εισόδου $x(t)$.

  - Αν $x(t) = 0 \quad \forall\, t \leq t'$

    $y(t') = 0$

* ——————————— *

<u>Κρουστική Απόκριση Συστήματος</u>

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{R} \longrightarrow y(t) = R\left[\delta(t-t')\right] = h(t,t')$$

- Έστω το σήμα εισόδου: $x(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\,\delta(t-t')\,\delta t'$

- Βάζω το R να δράσει στην $x(t)$.

$$y(t) = R\left[x(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\,\underbrace{R\left[\delta(t-t')\right]}_{h(t,t')}\,dt' =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\,h(t,t')\,dt'$$

• Για χρονικά ανεξάρτητο σύστημα,

$$h(t,t') = R[\delta(t-t')] = h(t-t')$$ Δεν χρειάζονται 2 ορίσματα. Χρειάζεται η διαφορά τους.

• Η έξοδος ακολουθεί "τις κινήσεις" της εισόδου.

Έτσι έχουμε: $$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\,h(t-t')\,dt'}$$

Αυτό ισχύει για χρονικά ανεξάρτητο σύστημα.

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) * h(t) &= y(t) \\ h(t) * x(t) &\;'' \end{aligned}}$$

* ———————— *

SOS (κριτήρια ελέγχου)

Ευστάθεια: Αποδεικνύεται ότι ικανή & αναγκαία συνθήκη για Φ.Ε.Φ.Ε. είναι: $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\,d\tau < +\infty}$$

Αιτιότητα: Θα πρέπει $\boxed{h(t) = 0 \;\; \forall\, t<0}$

Εφαρμογή

* ———————— *

Έστω $x(t) = e^{j\omega t}$. Ζητείται το $y(t)$.

$$y(t) = R\left[e^{j\omega t}\right] = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)}\,d\tau = e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau}\,d\tau =$$

$$= e^{j\omega t} H(\omega). \Leftrightarrow \boxed{y(t) = e^{j\omega t} H(\omega)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(t) = R e^{j\omega t} = e^{j\omega t}\, H(\omega)}$$

• Άρα $e^{j\omega t}$ ⇒ ιδιοσυνάρτηση του R συστήματος.

& $H(\omega)$ ⇒ ιδιοτιμή.

* Σημείωση: $H(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης κρουστικής απόκρισης.

Είναι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος.

$H(\omega)$ ⇒ μιγαδικό : $H(\omega) = |H(\omega)|\, e^{j\varphi(\omega)}$.

• Άρα : $\boxed{y(t) = |H(\omega)|\, e^{j(\omega t + \varphi(\omega))}}$

Εφαρμογή

Έστω $x(t) = \cos\omega t$

• $R\cos\omega t = R\left[\dfrac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right] = \frac{1}{2} R\left[e^{j\omega t}\right] + \frac{1}{2} R\left[e^{-j\omega t}\right] =$

$= \frac{1}{2} e^{j\omega t} \cdot H(\omega) + \frac{1}{2} e^{-j\omega t} H(-\omega)$

• Άρα το $\cos\omega t$ δεν είναι ιδιο συνάρτηση.

Σε ειδική περίπτωση το $\frac{1}{2} e^{j\omega t} |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} + \frac{1}{2} e^{-j\omega t} |H(\omega)| e^{j\varphi(-\omega)}$

μπορεί να έρθει στη μορφή

Ανάλυση Σήματος

Γ.Χ.Α.Σ

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)}$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$x(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow y(t) = e^{j\omega t} \underbrace{H(\omega)}_{\text{Συνάρτηση μεταφοράς συστήματος.}}$$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

• Έστω $h(t) \in \mathbb{R}$. Τότε $\overline{H(\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{j\omega t} dt = H(-\omega)$

<u>Άρα</u>: το συζυγές της κρουστικής απόκρουσης στην ειδική περίπτωση όπου $h(t) \in \mathbb{R}$ είναι $\overline{H(\omega)} = H(-\omega)$.

<u>Επίσης</u>: $H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \Rightarrow \overline{H(\omega)} = |H(\omega)| e^{-j\varphi(\omega)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |H(\omega)| = |H(-\omega)| \leftarrow \text{άρτιο}$$

$$\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega) \leftarrow \text{περιττό.}$$

$$H(-\omega) = |H(-\omega)| e^{j\varphi(-\omega)}.$$

• $\mathcal{R}[\cos(\omega t)] = \frac{1}{2} \mathcal{R}[e^{j\omega t}] + \frac{1}{2} \mathcal{R}[e^{-j\omega t}]$

$$= \frac{1}{2} e^{j\omega t} |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} + \frac{1}{2} e^{-j\omega t} |H(-\omega)| e^{j\varphi(-\omega)}$$

$\{\text{για } h(t) \in \mathbb{R}\}$ $= \frac{1}{2} |H(\omega)| \left\{ e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} + e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))} \right\}.$

Παρατηρούμε ότι τελικά $= |H(\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega))$.

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{R}[\cos(\omega t)] = |H(\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega))}$$

Ανάλυση Σήματος

20/06/2007
(217)

Έστω Γ.Χ.Α.Σ μεσεισοδο:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{jn\omega_0 t} \Longrightarrow y(t) = R[x(t)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t).$$

<u>Άρα</u>: $y(t) = R\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j\omega_0 n t}\right] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y(t) = R\left[\sum_n X_n e^{j\omega_0 n t}\right] = \sum_n X_n R\left[e^{jn\omega_0 t}\right] = \sum_n X_n e^{jn\omega_0 t} H(n\omega_0)$$

*[Αν αναπτύσσεται σε σειρά]$_*$

$$\Leftrightarrow y(t) = \sum_n X_n e^{jn\omega_0 t} \left| H(n\omega_0)\right| e^{j\varphi(\omega_0)} = \sum_n X_n e^{j(n\omega_0 t + \varphi(\omega_0))} \cdot H(n\omega_0)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(t) = \sum_n X_n e^{j(n\omega_0 t + \varphi(\omega_0))} \cdot H(n\omega_0).}$$

* ———————————— *

<u>Βηματική απόκριση συστήματος</u>

• Έστω $u(t)$ η είσοδος. Τότε συμβολίζω την έξοδο $s(t) = R[u(t)]$.

<u>Έχουμε</u>: $s(t) = u(t) * h(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, \underbrace{u(t-\tau)}_{=1,\ t>\tau}\, d\tau =$

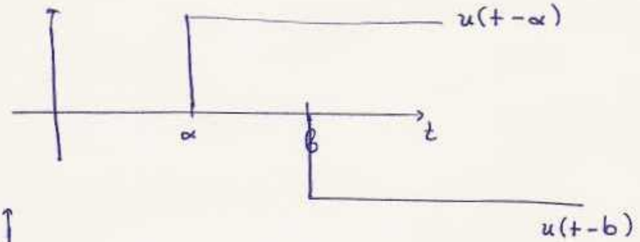
$$= \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau.$$

→ Προκύπτει $\boxed{h(t) = \frac{ds(t)}{dt}}$

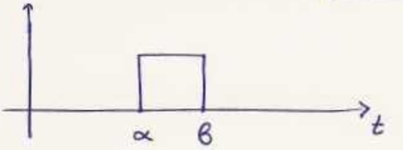
<u>Παράδειγμα</u> : Έστω $s(t) = e^{-t}u(t)$ (Γ.Χ.Α.Σ.)

Έστω σήμα εισόδου: $x(t) = u(t-\alpha) - u(t-b)$

* [Σημείωση:



Άρα :



]*

<u>Έχουμε</u> : $y(t) = R[x(t)] = R[u(t-\alpha) - u(t-b)] =$

$= R[u(t-\alpha)] - R[u(t-b)] =$

$= s(t-\alpha) - s(t-b) =$

$= e^{-(t-\alpha)}u(t-\alpha) - e^{-(t-b)}u(t-b).$

* ——————————— *

· Πώς αναγνωρίζω/χαρακτηρίζω τα συστήματα?

· Έστω: $\frac{dy}{dt} + 2y = x^2(t)$

Ελέγχω αν είναι γραμμικό: $y(t) = R[x(t)]$

Ελέγχω: $R\left[\sum_i \alpha_i x_i(t)\right] = \sum \alpha_i R[x_i(t)] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists \text{ οι ιδιότητες: } R\left[\sum_i x_i\right] = \sum R[x_i] \\ R[\alpha_i x_i] = \alpha_i R[x_i] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Ανάλυση Σήματος

20/06/2007
(4/7)

Έστω είσοδος $x_1(t) \rightarrow \frac{dy_1(t)}{dt} + 2y_1(t) = x_1^2(t)$

$$x_2(t) \rightarrow \frac{dy_2(t)}{dt} + 2y_2(t) = x_2^2(t)$$

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow \frac{dy_1(t)}{dt} + \frac{dy_2(t)}{dt} + 2\left(y_1(t) + y_2(t)\right) = \left(x_1^2(t) + x_2^2(t)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\left\{y_1(t) + y_2(t)\right\}}{dt} + 2\left(y_1(t) + y_2(t)\right) = x_1^2(t) + x_2^2(t).$$

<u>Αλλά</u>: $x_1 + x_2 \rightarrow \frac{d(y_1+y_2)}{dt} + 2(y_1+y_2) = (x_1+x_2)^2$

<u>Άρα</u>: δεν είναι γραμμικό.

* ——— *

Έστω $\frac{dy(t)}{dt} + (\sin t)y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$

Και πάλι: $x_1 \ldots y_1$

$x_2 \ldots y_2$

$$x_1 + x_2 \Rightarrow \frac{d(y_1+y_2)}{dt} + (\sin t)(y_1+y_2) = \frac{d(x_1+x_2)}{dt} + 2(x_1+x_2)$$

<u>Άρα</u>: είναι γραμμικό (Επίσης πρέπει να ελέγξουμε και τη 2η συνθήκη).

* ——— *

Ανάλυση Σήματος

20/06/2007
(5/7)

Χρ. Ανεξαρτησία : $x(t) \to y(t)$

$x(t-t_0) \to y(t-t_0)$

Παράδειγμα : $y(t) = x(t-2)$

$x(t-t_0-2) = y(t-t_0)$ ✓

→ Εννοείται ως προς τη μεταβολή του χρόνου.

Παράδειγμα : $y(t) = x(-t)$

$x(-t-t_0) = x(-(t+t_0)) = y(t+t_0)$ X

Άρα δεν είναι χρονικά ανεξάρτητο σύστημα.

Παράδειγμα : $y(t) = x(at)$

$x(at-t_0) \neq y(t-t_0)$ X.

* [Δηλαδή μετατοπίζω το x κατά t_0 → $x(t-t_0)$ και ελέγχω αν το $y(t)$ ακολουθεί : $y(t-t_0)$

Αυτό μπορεί να είναι συνάρτηση του t]*

Παράδειγμα : $y(t) = t\,x(t-2)$

Έχουμε : $t\,x(t-2-t_0) \overset{?}{=} y(t-t_0)$

Δεν είναι γιατί $y(t-t_0) = (t-t_0)\,x(t-t_0-2)$ X.

Ανάλυση Σήματος

20/06/2007
(6/7)

<u>Παράδειγμα</u>: $y(t) = \int_{-5}^{+5} x(T)\, dT$

για $t \to t - t_0 \Rightarrow y(t-t_0) = \int_{-5}^{+5} x(\underbrace{T-t_0}_{\omega})\, dT =$

$$= \int_{-5-t_0}^{5-t_0} x(\omega)\, d\omega. \quad \chi.$$

* ——————————— *

<u>Αιτιότητα</u>: Ελέγχω ποιος είναι ο χρόνος του σήματος εισόδου & εξόδου
αρκεί: $[\, y(t_1) = R[x(t_2)]\,] \to t_1 > t_2 \Leftrightarrow$ Αιτιατό σύστημα.

<u>Παράδειγμα</u>: $y(t) = x(t-2)$

$t > t-2 \to$ Αιτιατό.

$0 > -2 \to$ Αιτιατό.

<u>Παράδειγμα</u>: $y(t) = x(-t)$

Πρέπει $t > -t \Leftrightarrow 2t > 0 \to$ Αιτιατό, για $t>0$.

& $t < -t \Leftrightarrow -2t < 0 \to$ Μη αιτιατό, για $t<0$.

<u>Παράδειγμα</u>: $y(t) = x(\alpha t)$, $\alpha > 1$

$t>0$: $t <$ [redacted] $\alpha t \to$ Μη Αιτιατό

$t<0$: $t > \alpha t \to$ [redacted] Αιτιατό.

* ——————————— *

<u>Συνδεσμολογία</u>: $x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$

$x(t) \longrightarrow \boxed{h_1(t)} \xrightarrow{h_1(t) * x(t)} \boxed{h_2(t)} \to y(t) = h_2 * (h_1 * x) =$

$= \underbrace{(h_2 * h_1)}_{} * x$

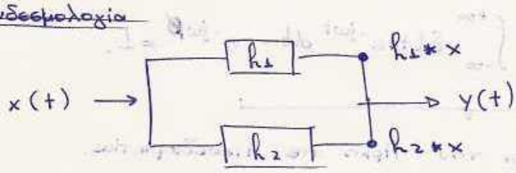
$\boxed{h_{o\lambda} = h_2 * h_1}$

$x(t) \longrightarrow \boxed{h_2 * h_1} \longrightarrow y(t)$

Ανάλυση Σήματος

20/06/2007
(7/7)

Παράλληλη Συνδεσμολογία



$$y(t) = h_1 * x + h_2 * x = (h_1 + h_2) * x$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h_1 + h_2} \longrightarrow y(t)$$

* ———————————— *

Μετασχηματισμός Fourier : $f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = R(\omega) + jX(\omega) =$$

$$= A(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)}$$

$\varphi(\omega)$ → γωνία φάσης

$A(\omega)$ → πλάτος, φάσμα σήματος

$A^2(\omega)$ → ενέργεια του φάσματος.

• Παράδειγμα: $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\, e^{-j\omega t'}\, dt' \right) e^{j\omega t}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega(t-t')}\, d\omega \right] dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\,\delta(t-t')\, dt' =$$

$$= f(t).$$

* [Σημείωση: $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega(t-t')}\, d\omega = \delta(t-t')$]*