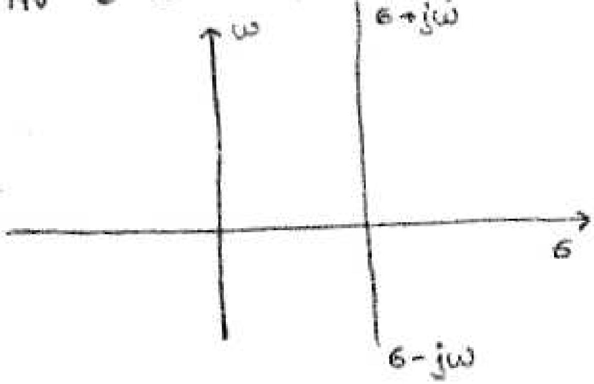
Κεφ.3 (Laplace)

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \quad ; \quad F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

- $F(s) = \displaystyle\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$, $s = \sigma + j\omega$

(Αν $\sigma = 0 \rightarrow$ Fourier)

- $f(t) = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(s)\, e^{st}\,dt$



• Η ολοκλήρωση γίνεται πάνω στην ευθεία.

Παράδειγμα: $u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} 1/s$

$$\int_0^\infty u(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

$\mathrm{Re}(s) > 0$

Παράδειγμα: $C \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{c}{s}$

↳ σταθερή συνάρτηση

Παράδειγμα: $\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \int_{0^-}^\infty \delta(t)e^{-st}\,dt = 1$

Παράδειγμα: $t^n \xleftrightarrow{\mathcal{L}}$

$$\int_{0^-}^\infty t^n e^{-st}\,dt = \int_{0^-}^\infty t^n \frac{d(e^{-st})}{dt}\,dt\left(-1/s\right) =$$

$$= \cancelto{0}{-\frac{1}{s}t^n e^{-st}\Big|_0^\infty} + \int_0^\infty \frac{n t^{n-1}}{s} e^{-st}\,dt = \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}\,dt =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{s^n}\int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (n: \text{ακέραιος})$$

~~Παράδειγμα~~

$$\Gamma(z)\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$$

Επειδή ισχύουν αυτά έχουμε ↓

Ανάλυση Σήματος

04/07/2007
(4/9)

$$t^n \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \quad \text{με } n \text{ οτιδήποτε}$$

<u>Παράδειγμα</u> : $e^{\pm j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} 1/_{s \mp j\omega_0}$

$$\mathcal{L}\left[e^{\pm j\omega_0 t}\right] = \int_0^\infty e^{\pm j\omega_0 t} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s \pm j\omega_0)t} dt =$$

$$= -\frac{1}{s \pm j\omega_0} e^{-(s \pm j\omega_0 t)} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s \mp j\omega_0}.$$

<u>Παράδειγμα</u> $e^{\pm \alpha t} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} 1/_{s \mp \alpha}$

$\boxed{\text{Ιδιότητες}}$:

(1) <u>Γραμμικότητα</u>: $\sum_i \alpha_i f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \sum_i \alpha_i F_i(s)$

<u>πχ</u> $\sin(\omega_0 t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$

$$\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\frac{1}{s-j\omega_0} - \frac{1}{s+j\omega_0}}{2j} = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

Όμοια για $\cos(\omega_0 t)$
$\sinh(\omega_0 t)$
$\cosh(\omega_0 t)$

(2) <u>Κλιμάκωση</u>: $f(\alpha t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\alpha} F(s/\alpha)$

3) <u>Παραγώγιση</u> : $f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sF(s) - f(0^-)$

$$f^{(n)}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0) \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

<u>Εφαρμογή</u>: $\delta(t) = \dfrac{du(t)}{dt}$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{du}{dt}\right] = s\,U(s) - \cancelto{0}{u(0^-)} = s\frac{1}{s} = 1$$

(αφού $u(t) = \frac{1}{s}$)

Ανάλυση Σήματος

09/07/2007
(1/4)

(1) $f'(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sF(s) - f(0^-)$

$$f^{n}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s^{n}F(s) - s^{n-1}f(0^-) - s^{n-2}f'(0) - \dots f^{(n-1)}(0^-)$$

Παράδειγμα

$\mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)\}$

$$\frac{d^2\sin(\omega_0 t)}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin(\omega_0 t)$$

$$\Updownarrow \mathcal{L}$$

$$s^2 \mathcal{L}[\sin(\omega_0 t)] - s\cdot \overset{0}{\cancel{\sin}(\varphi)} - \omega_0 \overset{1}{\cancel{\cos}(\varphi)} = -\omega_0^2 \mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)\}(s^2+\omega_0^2) = \omega_0 \Rightarrow \mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)\} = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}.$$

2) Ολοκλήρωση

$$\int_0^t f(t)\,dt \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{F(s)}{s}$$

Παράδειγμα

- $r(t) = t\,u(t) = \int_0^t u(t)\,dt \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{U(s)}{s} = \frac{1/s}{s} = 1/s^2$

(3) Παραγώγιση στη Συχνότητα

$$(-t)f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{dF(s)}{ds}$$

Παράδειγμα

$$\mathcal{L}[t\sin(\omega_0 t)] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\right] = \frac{2\omega_0 s}{(s^2+\omega_0^2)^2}$$

(4) Ολοκλήρωση στη συχνότητα

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} F(u)\,du \qquad \lim \frac{f(t)}{t} \to \text{πεπερ.}$$

Παράδειγμα

• $$\mathcal{L}\left[\frac{e^{-\alpha t}-e^{-bt}}{t}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{-\alpha t}}{t}\right] - \mathcal{L}\left[\frac{e^{-bt}}{t}\right] =$$

$$= \int_s^{+\infty}\frac{1}{u+\alpha}\,du - \int_s^{+\infty}\frac{1}{u+b}\,du = \lim_{\varepsilon\to\infty}[\ln(\varepsilon+\alpha)] - \ln(s+\alpha) - \lim_{\varepsilon\to\infty}\ln(\varepsilon+b) + \ln(s+b) =$$

$$= \ln\left(\frac{s+b}{s+\alpha}\right) + \cancel{\lim_{\varepsilon\to\infty}\left(\frac{\varepsilon+\alpha}{\varepsilon+b}\right)} \to 0 = \ln\left(\frac{s+b}{s+\alpha}\right).$$

• $$\mathcal{L}\left[\frac{e^{-\alpha t}-e^{-bt}}{t}\right] = \int_0^{\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-st}\,dt = \int_s^{+\infty}F(u)\,du \Rightarrow$$

(5) $$\Rightarrow \boxed{\int_0^{\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^{\infty}F(u)\,du}$$

Χρήσιμο όταν έχω πόλο στο 0.

Ανάλυση σήματος — 09/07/2007 (219)

Παράδειγμα

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{s^2+1}\,ds \qquad {}^*\left[\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}\right]_*$$

Άρα $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \arctan(s)$

(6) Μετατόπιση στη Συχνότητα

$$e^{\mp at} f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s \pm a)$$

(7) Μετατόπιση στο Χρόνο

$$f_2(t) = \begin{cases} f_1(t-a) & , t \geq a \\ 0 & , t < a \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-as} F_1(s)$$

$$f_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F_1(s)$$

(8) Περιοδικό σήμα

$$f(t) = f(t + n T)$$

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^{T} e^{-st} \hat{f}(t)\,dt$$

(9) Συνέλιξη

$$f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F_1(s) \cdot F_2(s)$$

$$\mathcal{L}\{u(t) * t\} = \mathcal{L}\{u(t)\} \cdot \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^3}$$

Παράδειγμα

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right\} = \qquad {}^{*}\left[\frac{1}{s^2} \xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t u(t) \;\&\; \frac{1}{(s+1)^2} \xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t e^{-t} u(t)\right]_{*}$$

$$= t u(t) * t e^{-t} u(t) = t e^{-t} u(t) * t u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau e^{-\tau} u(\tau)(t-\tau) u(t-\tau) d\tau =$$

$u(\tau) = 1$ για $\tau > 0$

$u(t-\tau) = 1$, $t-\tau > 0$, $t > \tau$

$$= \int_0^{\infty} \tau e^{-\tau}(t-\tau)\, d\tau = t e^{-t} + 2e^{-t} + t - 2$$

- $$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} b_i s^i}$$ όταν $m<n$ έχω κύριο κλάσμα

$\sum_{i=0}^{n} b_i s^i \rightarrow$ ρίζες είναι οι πόλοι της $F(s)$

$$\sum_{i=0}^{n} b_i s^i = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0 = b_n \prod_{i=1}^{m} (s-p_i)^{r_i}$$

$$F(s) = \frac{A(s)}{b_n \prod_{i=1}^{m}(s-p_i)} = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \underbrace{\dots}_{+\frac{A_j}{s-p_j}+\dots} + \frac{A_n}{s-p_n}.$$

$$F(s)(s-p_j)\Big|_{s=p_j} = \frac{A(s)}{b_n(s-p_1)(s-p_2)\dots\cancel{(s-p_j)}\dots(s-p_n)}\cancel{(s-p_j)}\Big|_{s=p_j} =$$

$$= \frac{A_1}{s-p_1}(s-p_j) + \frac{A_2}{s-p_2}(s-p_j) + \dots + \frac{A_j}{\cancel{s-p_j}}\cancel{(s-p_j)} + \dots + \frac{A_n}{s-p_n}(s-p_j)\Big|_{s=p_j}$$

$$= A_j$$

• Έστω n ρίζες:
κ πολλαπλότητας

$$F(s) = \frac{A(s)}{b_n (s-p_1)^k (s-p_{k+1}) \cdots (s-p_n)} =$$

$$= \frac{A_1}{(s-p_1)^k} + \frac{A_2}{(s-p_1)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_k}{s-p_1} + \frac{B_1}{s-p_{k+1}} + \cdots + \frac{B_n}{s-p_n}$$

• Πολ/ζω την $F(s)$ με $(s-p_1)^k$:

$$F(s)(s-p_1)^k = \frac{A(s)}{b_n (s-p_{k+1}) \cdots (s-p_n)} = A_1 + A_2 (s-p_1) + \cdots + A_k (s-p_1)^{k-1} + \frac{B_1}{s-p_{k+1}}(s-p_1)^k + \cdots + \frac{B_n}{s-p_n}(s-p_1)^k.$$

$$A_1 = F(s)(s-p_1)^k \Big|_{s=p_1}$$

$$A_2 = \frac{d}{ds}\left(F(s)(s-p_1)^k\right)\Big|_{s-p_1}$$

$$\boxed{A_j = \frac{1}{(j-1)!} \frac{d^{(j-1)}}{ds^{j-1}}\left(F(s)(s-p_1)^k\right)\Big|_{s=p_1}}$$

Παράδειγμα

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{s(s+1)^3}\right\}$$

$p=0$, απλός

$p_1=-1$, τάξης 3

$$F(s) = \frac{s-2}{s(s+1)^3} = \frac{A_1}{(s+1)^3} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{(s+1)} + \frac{B}{s}$$

$$B = F(s)s \Big|_{s=0} = \frac{s-2}{s(s+1)^3}\, s = \frac{-2}{1} = -2$$

$$A_1 = F(s)(s+1)^3 \Big|_{s=-1} = \dots = 3$$

$$A_2 = F(s)\frac{d}{ds}\left\{F(s)(s+1)^3\right\}\Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left\{\frac{s-2}{s(s+1)^3}(s+1)^3\right\}\Big|_{s=-1} =$$

$$= \frac{s-(s-2)}{s^2}\Big|_{s=-1} = \frac{2}{s^2} = 2.$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left\{\frac{s-2}{s}\right\} = 2.$$

* ———————— *

<u>Παράδειγμα</u>

$$y'' - a^2 y = f(t) \qquad \begin{aligned} y(0) &= c_1 \\ y'(0) &= c_2 \end{aligned}$$

$$\overset{\{\mathcal{L}\}}{\Longrightarrow} \quad s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) - a^2 Y(s) = F(s) \iff$$

$$\iff Y(s) = \frac{F(s) + s c_1 + c_2}{s^2 - a^2} \iff Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 - a^2} + \frac{s c_1 + c_2}{s^2 - a^2} \iff$$

$$\iff Y(s) = \frac{1}{a}\underbrace{\left(\frac{a}{s^2-a^2}\right)}_{\mathcal{L}^{-1}:\ \sinh(at)} F(s) + \underbrace{\left(\frac{s}{s^2-a^2}\right)}_{\mathcal{L}^{-1}:\ \cosh(at)} c_1 + c_2 \underbrace{\left(\frac{a}{s^2-a^2}\right)}_{\mathcal{L}^{-1}:\ \sinh(at)} \frac{1}{a} \iff$$

$$\iff y(t) = \frac{1}{a}\sinh(at) * f(t) + c_1 \cosh(at) + \frac{c_2}{a}\sinh(at)$$

R, $\mathcal{L}$, C

Z_R

$u(t) = R\,i(t) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{V(s)}{I(s)} = R.$$

$Z_{\mathcal{L}}$

$$u(t) = \mathcal{L}\frac{di}{dt} \Rightarrow V(s) = \mathcal{L}\, s\, I(s) \Leftrightarrow Z_{\mathcal{L}} = \frac{V(s)}{I(s)} = s\mathcal{L}.$$

Z_c

$$Z_c = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC}.$$

Συνάρτηση μεταφοράς

Έξοδος $y(t) = h(t) * x(t)$

$$Y(s) = H(s)\cdot X(s) \Leftrightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h(t)$$

κρουστική απόκριση

Θεόδωρος Αλεξόπουλος, Αναπληρωτής Καθηγητής
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3019, Fax: 210 772-3021
e-mail: theoalex@central.ntua.gr

Theodoros Alexopoulos, Associate Profess
NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3019, Fax: +30 210 772-3(
e-mail: Theodoros.Alexopoulos@cern.ch
http://www.physics.ntua.gr/Faculty/theoalex

Μάθημα: Ανάλυση Σήματος

Προβλήματα 2

(Κεφάλαιο: Μετασχηματισμός Fourier)

Πρόβλημα 0.1 Θεωρούμε ένα πρόβλημα δυο ανεξάρτητων διαστάσεων x, y. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier να δείξετε την παρακάτω σχέση ανάμεσα στον τετραγωνικό και τον τριγωνικό παλμό:

$$\Pi(x)\Pi(y) * \Pi(x)\Pi(y) = \Lambda(x)\Lambda(y).$$

Πρόβλημα 0.2 Τα πολυώνυμα του Hermite εμφανίζονται σε πολλά κεφάλαια της Φυσικής και Μηχανικής όπως στη λύση του αρμονικού κβαντικού ταλαντωτή, κλπ. Ορίζονται από τη σχέση:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right),$$

και είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης του Hermite:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + 2ny = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ορίζουμε μια ακολουθία νέων συναρτήσεων ως ακολούθως:

$$\psi_n(x) = H_n\left(\sqrt{2\pi}x\right) e^{-\pi x^2}.$$

Να δείξετε τον παρακάτω μετασχηματισμό Fourier:

$$\psi_n(f) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (-j)^n \psi_n(f) \quad ή \quad \mathcal{F}[\psi_n(f)] = (-j)^n \psi_n(f),$$

όπου f είναι η συχνότητα που συνδέεται με την κυκλική συχνότητα, ω, από τη σχέση $\omega = 2\pi f$. Αυτό το αποτέλεσμα δηλώνει ότι οι συναρτήσεις $\psi_0(f)$, $\psi_1(f), \psi_2(f), \psi_3(f), \ldots \psi_n(f)$ είναι ιδιοσυναρτήσεις του μετασχηματισμού Fourier με αντίστοιχες ιδιοτιμές τα 1, $-j$, -1, j, $\ldots, (-j)^n$.

Πρόβλημα 0.3 Θεωρείστε σωματίδια μέσα σε ένα υγρό. Έστω $f(x,t)$ η πυκνότητα πιθανότητας να βρεθεί ένα σωματίδιο στο σημείο x τη χρονική στιγμή t. Ο Einstein έδειξε ότι για μερικά συστήματα η $f(x,t)$ υπακούει στην εξίσωση διάχυσης:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x},$$

όπου D είναι η σταθερά διάχυσης.

Εφαρμόζοντας το μετασχηματιμό Fourier, να βρείτε την πυκνότητα πιθανότητας $f(x,t)$ για αρχική συνθήκη $f(x,0) = \delta(x)$. Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά της $f(x,t)$;

Πρόβλημα 0.4 Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Parseval να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}.$$

Πρόβλημα 0.5 Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του πολυωνύμου:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots a_n t^n.$$

Πρόβλημα 0.6 Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier να δείξετε ότι η λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - y = \mathrm{e}^{-a|t|}, \quad a > 1, \ a \neq 1, \quad y(\pm\infty) = 0,$$

έχει τη μορφή:

$$y(t) = \frac{1}{a^2-1}\left[\mathrm{e}^{-a|t|} - a\mathrm{e}^{-|t|}\right].$$

Πρόβλημα 0.7 Ο μετασχηματισμός cosine Fourier ενός σήματος $f(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$F_c(\omega) = \mathcal{F}_c\left[f(t)\right] = \int_0^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t,$$

με τον αντίστροφό του:

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_c(\omega)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}\omega.$$

Να δείξετε ότι ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα της δεύτερης παραγώγου:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} \xleftrightarrow{\mathcal{F}_c} -\omega^2 F_c(\omega) - f'(0).$$

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού cosine Fourier να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} - a^2 f = 0, \quad y(+\infty) = 0, \quad y'(0) = b.$$

Πρόβλημα 0.8

Να δείξετε ότι η λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης της θερμότητας:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x},$$

όπου κ είναι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, και $u(x,t)$ είναι η θερμοκρα•σια στη θέση x τη χρονική στιγμή t, έχει τη λύση της μορφής:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\tau^2} f(x - 2\tau\sqrt{kt})\,\mathrm{d}\tau,$$

όπου $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$ και $|u(x,t)| < M$ είναι πεπερασμένη.

Ανάλυση Σήματος

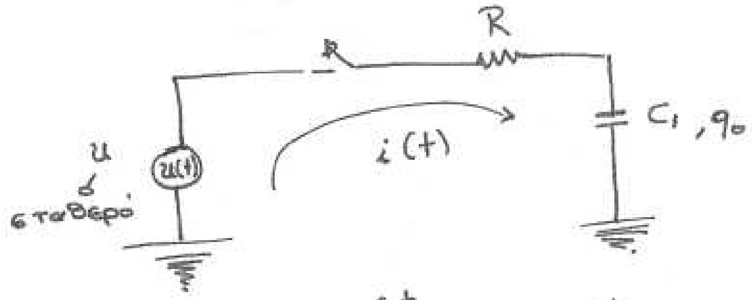
Παράδειγμα

$Z_R = R$ 

$Z_L = sL$ 

$Z_C = \dfrac{1}{Cs}$ 

$$q = Cu \Rightarrow u = \frac{1}{C} q = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,dt .$$



$$iR + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,dt = u(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad iR + \frac{1}{C}\left[\overbrace{\int_{-\infty}^{0} i\,dt}^{q_0} + \int_{0}^{t} i\,dt\right] = u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} I(s)R + \frac{1}{C}\left[\frac{q_0}{s} + \frac{I(s)}{s}\right] = V(s) \Leftrightarrow$$

αρχικό φορτίο πριν κλείσω το διακόπτη

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{V(s) = \frac{u}{s}}$$

$$I(s) = \frac{u - q_0/C}{R} \cdot \frac{1}{s + 1/CR}$$

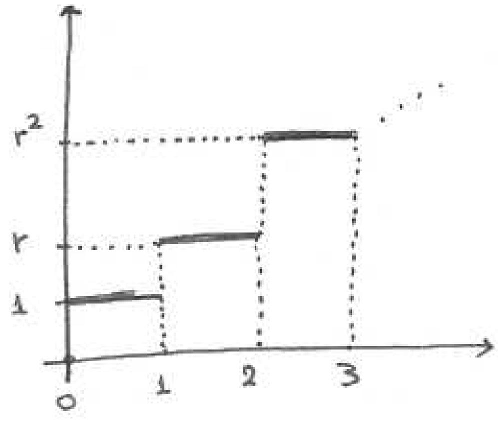
$$\Big\updownarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$\boxed{i(t) = \left(\frac{u - q_0/C}{R}\right) e^{-t/RC}}$$

* ———————————————— *

Παράδειγμα

$f(t) = r^n \quad , \; n \leq t < n+1 \quad , n = 0, 1, 2, \dots$



Να βρεθεί : $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

Ανάλυση Σήματος

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^1 r^0 e^{-st}\, dt + \int_1^2 r^1 e^{-st}\, dt + \int_2^3 r^2 e^{-st}\, dt + \dots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1 - e^{-s}}{s} + re^{-s}\frac{1 - e^{-s}}{s} + r^2 e^{-2s}\frac{1 - e^{-s}}{2} + \dots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1 - e^{-s}}{s}\Big[\underbrace{1 + re^{-s} + r^2 e^{-2s} + \dots}_{\text{γεωμ. πρόοδος } \lambda = re^{-s}}\Big]$$

• Έστω $|re^{-s}| < 1$:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1 - e^{-s}}{s} \cdot \frac{1}{1 - re^{-s}} = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - re^{-s})}$$

* ——————————— *

Παράδειγμα

$y(t) = a_n \qquad n \leq t < n+1$

$n = 0, 1, 3, \dots$

Να βρεθεί : ~~$\mathcal{L}\{y(t)\}$~~ $\mathcal{L}\{y(t+1)\}$

$$\mathcal{L}\{y(t+1)\} = \int_0^\infty \underbrace{y(t+1)}_{\tau} e^{-st}\, dt = e^s \int_1^\infty y(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau \Leftrightarrow$$

$t = \tau - 1$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\{y(t+1)\} = \Big[e^s \underbrace{\int_0^\infty y(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau}_{\mathcal{L}\{y(\tau)\} = Y(s)} - e^s \int_0^1 y(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau\Big] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\{y(t+1)\} = e^s\left[Y(s) - \frac{a_0(1 - e^{-s})}{s}\right]$$

<u>Παράδειγμα</u> (Όμοια με προηγούμενο)

$$\mathcal{L}\{y(t+2)\} = e^{2s}Y(s) - \frac{e^{-s}(1-e^{-s})(a_0 e^{s} + a_1)}{s}$$

* ——————————— *

<u>Εφαρμογή</u> $y(t)=0, \forall t<0$ (αιτιατό σύστημα)

Έστω σύστημα: $3y(t) - 4y(t-1) + y(t-2) = t$ *[Εμφανίζεται καθυστέρηση του σήματος. ∃ υστέρηση στο σύστημα]*

- $\mathcal{L}\{y(t-1)\} = \int_0^\infty \underbrace{y(t-1)}_{\tau} e^{-st}\,dt = \int_{-1}^{\infty} e^{-s(\tau+1)} y(\tau)\,d\tau \Leftrightarrow$

  $t = \tau + 1$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\{y(t-1)\} = e^{-s}\Big[\underbrace{\int_0^\infty e^{-s\tau}y(\tau)d\tau}_{Y(s)} + \cancel{\int_{-1}^{0} e^{-s\tau}y(\tau)\,d\tau}^{\,0}\Big] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{L}\{y(t-1)\} = e^{-s}Y(s)}$$

- $\boxed{\mathcal{L}\{y(t-2)\} = e^{-2s}Y(s)}$ (όμοια)

<u>Άρα</u>: $3\mathcal{L}\{y(t)\} - 4e^{-s}\mathcal{L}\{y(t)\} + e^{-2s}\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{t\} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3Y(s) - 4e^{-s}Y(s) + e^{-2s}Y(s) = 1/s^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2(3 - 4e^{-s} + e^{-2s})} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2(1-e^{-s})(3-e^{-s})} = \frac{1}{2s^2}\left[\frac{1}{1-e^{-s}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-e^{-s}/3}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{2s^2}\left[\left(1+e^{-s}+e^{-2s}+e^{-3s}+\dots\right) - \frac{1}{3}\left(1+\frac{e^{-s}}{3}+\frac{e^{-2s}}{3^2}+\dots\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{3s^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)\frac{e^{-ns}}{s^2}$$

Και τελικά $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \dots$

<u>Έχουμε</u>: • $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = tu(t)$

• $\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-ns}}{s^2}\right\} = (t-n)u(t-n)}_{\text{Μετατόπιση στο χρόνο.}}$

$$\mathcal{L}\{Y(s)\} = \frac{1}{3}tu(t) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)\cdot(t-n)\,u(t-n) = y(t) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ (για $t>n \to u(t-n)=1$. Αλλιώς 0) : <u>Άρα</u> :

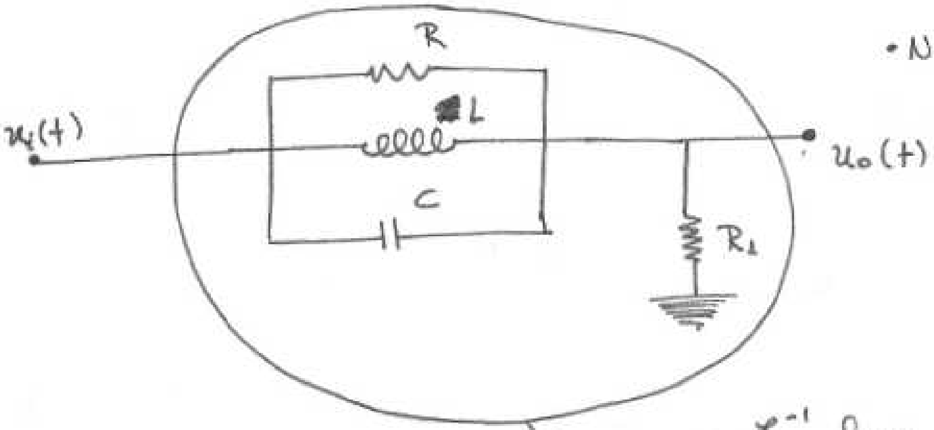
$$\Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{3}tu(t) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{[t]}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(t-n)$$

όπου $[t]$: μεγαλύτερος ακέραιος (n) που είναι $<t$.

* ——————— *

11/07/2007
(5/7)

Ανάλυση Σήματος



$\rightarrow H(s) \xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h(t)$

• Να βρεθεί η $H(s)$.

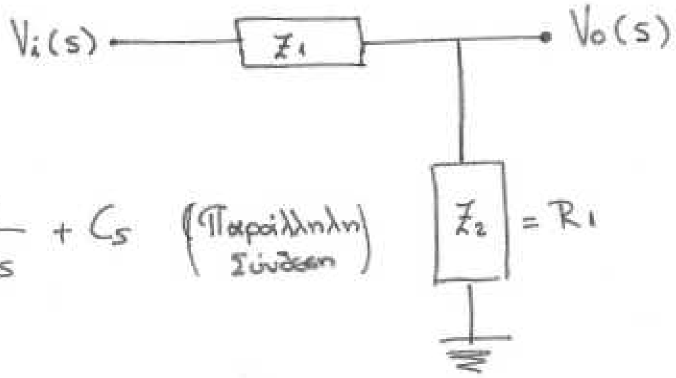
$R \xleftrightarrow{\mathcal{L}} R$

$L \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sL$

$C \xleftrightarrow{\mathcal{L}} 1/Cs$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

• Στο χώρο $\mathcal{L}$ έχω:



$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{Ls} + Cs \quad \left(\begin{matrix}\text{Παράλληλη} \\ \text{Σύνδεση}\end{matrix}\right)$$

$Z_2 = R_1$

Άρα $V_o(s) = \dfrac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V_i(s) \Leftrightarrow H(s) = \dfrac{V_o}{V_i} = \dfrac{R_1}{R_1 + \dfrac{1}{1/R + 1/Ls + Cs}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow H(s) = 1 - \frac{1}{R_1 C} \cdot \frac{s}{s^2 + as + b} \Leftrightarrow \quad , \quad a = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right)\frac{1}{C}, \quad b = \frac{1}{LC}$$

$$\Leftrightarrow H(s) = 1 - \frac{1}{R_1 C} \cdot \frac{s}{(s-p_1)(s-p_2)} \Leftrightarrow \boxed{H(s) = 1 - \frac{1}{R_1 C}\left[\frac{p_1}{s-p_1} - \frac{p_2}{s-p_2}\right] \cdot \frac{1}{p_1 - p_2}}$$

Παράδειγμα: Έστω σήμα: $S_i(t) = \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\, d\tau$. $\mathcal{L}\{S_i(t)\} = ;$

Αυτό το σήμα λέγεται ολοκλήρωμα ημίτονο

Ισχύει η ιδιότητα: $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(s)\, ds$.

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^{\infty} \frac{1}{s^2+1}\, ds \Leftrightarrow \left(\sin t \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \arctan(s)\Big|_s^{\infty} \Leftrightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \frac{\pi}{2} - \arctan(s).$$

Επίσης: $\int_0^t f(\tau)\, d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{F(s)}{s}$

Άρα: $S_i(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \overbrace{\frac{\pi/2}{s} - \frac{\arctan(s)}{s}}^{x} \Rightarrow$ *
$$\left[\begin{array}{l} \arctan(s) = \frac{\pi}{2} - x \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = s. \\ \frac{1}{\tan x} = s \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{s} \\ x = \arctan\left(\frac{1}{s}\right) \end{array}\right]^{*}$$

$$\Leftrightarrow S_i(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}\arctan\left(\frac{1}{s}\right)$$

* ———————— *

- Λύνουμε το ίδιο με διαφορετικό τρόπο: $S_i(t) = f(t) = \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\, d\tau.$

Έχουμε: $f'(t) = \frac{\sin t}{t}$

$t f'(t) = \sin t.$

$$\mathcal{L}\{t f'(t)\} = \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1} \Leftrightarrow -\frac{d}{ds}\left[F'(s)\right] = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{d}{ds}\left[sF(s) - \cancel{f(0)}^{\,0}\right] = \frac{1}{s^2+1}. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{d}{ds}\left(sF(s)\right) = \frac{1}{s^2+1} \Leftrightarrow \quad -sF(s) = \int \frac{1}{s^2+1}\,ds \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{-sF(s) = \arctan(s) + C}$$

* [Ισχύει το Θ. της αρχικής τιμής: $\lim_{s\to+\infty}\left(sF(s)\right) = \lim_{t\to 0} f(t)$] *

Άρα $\lim_{s\to+\infty}\left[-sF(s)\right] = \lim_{s\to+\infty}\left[\arctan(s) + c\right] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{t\to 0} f(t) = \cancel{f(0)}^{\,0} = \lim_{s\to+\infty}\left[\arctan(s) + c\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \frac{\pi}{2} + c \Leftrightarrow \boxed{c = -\frac{\pi}{2}}$$

Άρα $-sF(s) = \arctan(s) - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow F(s) = \dfrac{\pi/2 - \arctan(s)}{s} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{F(s) = \frac{1}{s}\arctan\left(\frac{1}{s}\right).}$$