ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1 ωρα

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1: (a) Υπολογιστε το διπλο ολοκληρωμα $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2}\, dy\, dx$

(b) Αλλαξετε την σειρα ολοκληρωσης και υπολογιστε το διπλο ολοκληρωμα $\int_0^x \left[\int_0^t f(u)\, du \right] dt$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2: Εστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτο συνολο, $\partial\Omega = C$ = τμηματικα λεια, απλη κλειστη καμπυλη και $f, g \in C^2(\Omega)$. Δειξτε ότι

$$\oint_C \left[f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right] ds = \iint_\Omega [f \Delta g - g \Delta f]\, da.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3: Έστω $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ και $f(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} i + \frac{x}{x^2+y^2} j$. Δειξτε ότι το διανυσματικο πεδιο f δεν είναι συντηρητικο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4: Έστω C είναι τμηματικα λεια, απλη κλειστη καμπυλη που περικλειει την περιοχη D. Δειξτε ότι το εμβαδον $a(D)$ της D δινεται απο

$$a(D) = \frac{1}{2} \oint_C (x\,dy - y\,dx)$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5: Υπολογιστε το ολοκληρωμα του διανυσματικου πεδιου

$$F(x,y,z) = x^2 i + y^2 j - z k$$

κατα μηκος των πλευρων του τριγωνου με κορυφες

$(0,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,2)$