



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 2018

Θέμα 1^ο : α) Να λυθεί η εξίσωση:

$$y u_x(x, y) + x u_y(x, y) = 0.$$

με $u(0, y) = e^{-y^2}$.

(Μονάδες: 1.25)

β) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών

$$u_t(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), \quad c > 0, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0$$

$$u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = 1/2 - \sin(2\pi x), \quad 0 < x < 2.$$

(Μονάδα 1)

γ) Να προσδιοριστεί ο τύπος της γραμμικής μ.δ.ε.

$$x u_{xx} - x u_{xy} + y u_{yy} + 35 u_x - u_y + u = 0.$$

(Μονάδες: 0.25)

Θέμα 2^ο :

α) Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(r, \varphi) = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

(Μονάδες: 1.25)

$$u(1, \varphi) = 1 + \cos(2\varphi), \quad u_r(2, \varphi) = \cos(\varphi)$$

(Δίνεται ο διαφορικός τελεστής του Laplace σε πολικές συντ.: $\Delta u(r, \theta) = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$)

β) Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$\Delta u(r, \theta, \varphi) = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$u(1, \theta, \varphi) = 1 + \cos \theta + \cos^2 \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Ποια είναι η μέγιστη τιμή της $u(r, \theta, \varphi)$ στο πεδίο ορισμού της; (Μονάδα 1.25)

(Δίνονται τα πολώνυμα Legendre $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \dots$)

Θέμα 3^ο : α) Να βρείτε τη συνάρτηση Green $u(x, y) = G(x, y; x_0, y_0)$:

$$\Delta u(x, y) = -\delta(x - x_0)\delta(y - y_0), \quad x, x_0 \in (0, a), \quad y, y_0 \in (0, b)$$

$$u(0, y) = u(a, y) = 0, \quad y \in [0, b], \quad u(x, 0) = u_y(x, b) = 0, \quad x \in [0, a] \quad (\text{Μονάδες: 1.5})$$

β) Έστω οι συντελεστές $a_n, n \in \mathbb{N}$, του συνημιτονικού αναπτύγματος Fourier της συνεχούς και τμηματικά λείας συνάρτησης $f(x), x \in (0, \pi)$. Να δείξετε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$.

(Μονάδα 1)

Θέμα 4^ο : α) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 2e^t \cos x, \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = e^t, \quad t \geq 0, \quad u(x, 0) = \cos x, \quad x \geq 0,$$

με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

(Μονάδες: 1.25)

β) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$u_{tt}(x, t) - u(x, t) = 3 u_{xx}(x, t), \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = e^{-x}, \quad u_t(x, 0) = -2e^{-x}, \quad x \geq 0$$

$$u(0, t) = e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

με τη χρήση κατάλληλου μετασχηματισμού Fourier.

(Μονάδες: 1.25)

(Δίδεται ότι $\int_0^{\infty} e^{-sw} \sin(\lambda w) dw = \frac{\lambda}{\lambda^2 + s^2}$).