



**ΖΗΤΗΜΑ ΠΡΩΤΟ:** α) Να βρεθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση 2<sup>ης</sup> τάξης που έχει για θεμελιώδες σύνολο λύσεων τις συναρτήσεις:  $y_1(x) = x$  και  $y_2(x) = x^2$ . (μον. 0.5)

β) Τρεις λύσεις μιας μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 2<sup>ης</sup> τάξης είναι οι:  $f_1(x) = 3x - 2x^2$ ,  $f_2(x) = -2x^2 + 5xe^x$ ,  $f_3(x) = 2x - 2x^2 + 3xe^x$ . Να βρεθεί η γενική λύση. (μον. 1)

γ) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:  $y'' + 4y = t + 3 \cos 2t$  (μον. 1)

**ΖΗΤΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ:** α) Δίνεται η διαφορική εξίσωση:  $x(x-3)y'' + (x+1)y' - 2y = 0$ . Βρείτε τα ιδιάζοντα σημεία της, αποφανθείτε αν είναι κανονικά ή όχι. Αν είναι κανονικά βρείτε τη δείκτρια εξίσωση και τους εκθέτες ιδιομορφίας. (μον. 1)

β) Δίνεται η εξίσωση  $(x^2 + 1)(x+1)y'' - (x+2)y' + 2y = 0$ . Να δοθεί η μορφή και το διάστημα σύγκλισης της λύσης σε δυναμοσειρά με κέντρο το  $x_0 = 3$  (όχι εύρεση της σειράς). (μον. 0.5)

γ) Να λυθεί με χρήση ολοκληρωτικού μετασχηματισμού η εξίσωση:

$$y'' + y = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t < \pi \\ t - \pi, & \pi \leq t < \infty \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \quad (\text{μον. 1})$$

**ΖΗΤΗΜΑ ΤΡΙΤΟ:**

α) Να βρεθεί η γενική λύση της δ. ε.  $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2y - y^3}{2x + 3xy^2}$ . Να βρεθεί, αν υπάρχει, ειδική λύση με  $y(1) = 1$ . (μον. 1)

β) Να βρεθεί η γενική λύση της δ. ε.  $y' = \frac{2xy + 3y^2}{2xy + x^2}$ . (μον. 1)

γ) Δίνεται το ΠΑΤ  $y' = (t + 2y^2)\sqrt{|y|}$ ,  $y(t_0) = y_0$ . Να προσδιοριστούν όλες οι περιοχές του  $ty$  επιπέδου στις οποίες ισχύουν οι συνθήκες του Θ. ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης. Να δικαιολογηθεί η απάντησή σας. Να δοθεί η μορφή του αναγωγικού σχήματος του Picard που δίνει τη λύση για  $y(t_0) = y_0$  με ζεύγος τιμών  $(t_0, y_0)$  δικής σας επιλογής (χωρίς να γίνουν υπολογισμοί). (μον. 0.75)

**ΖΗΤΗΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ:**

Με τη μέθοδο των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων να βρεθεί η γενική λύση του γραμμικού συστήματος  $x' = A \cdot x$  όπου  $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ . Να προσδιοριστεί το είδος και η ευστάθεια του κρίσιμου σημείου  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . (μον. 2.25)

Δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

$$L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad L(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad L(e^{at}f(t)) = F(s-a), \quad L(-t f(t)) = \frac{d}{ds} F(s).$$

$$L(u_a(t)f(t-a)) = e^{-as}F(s), \quad \text{αν } F(s) = L(f(t)) \text{ και } u_a(t) = H(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}.$$