

- Na γίνει αναγνώριση και σχεδίαση σε διαφορετικά σχήματα, των γεωμετρικών τόπων των σημείων $M(x, y, z)$ του χώρου για τα οποία:
 - $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$, β) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1, z = 2$, γ) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1, y = 2$, δ) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1 + \frac{z^2}{36}$, ε) $z = 4 - (\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16})$
- Δίνεται η σφαίρα $(\Sigma): (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ και το επίπεδο $(\pi): x+z=1$.
 - Na δειχθεί ότι το επίπεδο τέμνει τη σφαίρα και να βρεθεί η ακτίνα και το κέντρο του κύκλου που ορίζεται.
 - Na γραφεί ο παραπάνω κύκλος ως τομή κυλίνδρου με άξονα $z'z$ και επιπέδου.
 - Na βρεθεί μια παραμετρική παράσταση του κύκλου.
- Na σχεδιασθούν οι παρακάτω καμπύλες σχεδιάζοντας και τις επιφάνειες που τις ορίζουν και να βρεθεί μια παραμετρική τους παράσταση:
 - $z = y+1, x^2 + (y-1)^2 = 1$,
 - $z = 4 - (x^2 + y^2), 2x + z = 4$,
 - $x^2 + 2y^2 = 1, z = 3$,
 - $z = 9 - (x^2 + y^2), x = y$
 - $|x| + |y| = 1, z = 0$
- Na σχεδιασθεί η κατά τιμήματα λεία καμπύλη ΑΒΓΔ επάνω στον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$, όπου:

$A(1, 0, 0), B(0, 1, \frac{\pi}{2}), \Delta(0, -1, \frac{\pi}{2}), \Gamma(1, 0, \frac{\pi}{2}), E(0, -1, 4)$ και ΑΒ είναι τμήμα έλικας $r_1(t) = (\sigma v t, \eta \mu t, t)$ του κυλίνδρου, ΒΓΔ είναι ημικύκλιο στο επίπεδο $z = \frac{\pi}{2}$ και ΔΕ ευθύγραμμο τμήμα. Na βρεθεί μια παραμετρική της παράσταση.
- Na γίνει γραφική παράσταση του ίχνους των καμπύλων:

$$\mathbf{r}(t) = (|t| + t, |t-1|, t), \quad t \in [-1, 3], \quad \mathbf{q}(t) = \begin{cases} (2t, t) & t \in [0, 1] \\ (t+1, 5-4t) & t \in (1, 3] \end{cases}$$
- Na βρεθεί η ισοσταθμική καμπύλη της $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ που να διέρχεται από το σημείο $P(x_0, y_0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$. Πότε ένα σημείο $A(x_0, y_0)$ είναι θέση τοπικού ελάχιστου για μια συνάρτηση $f(x, y)$; Na δειχθεί ότι το σημείο $O(0,0)$ είναι θέση τοπικού ελάχιστου της συνάρτησης $f(x, y) = 4x^2 + y^2$. Na υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της $f(x, y)$ στο σημείο $P(x_0, y_0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$ κατά τη κατεύθυνση του διανύσματος PO (αντίστοιχου μοναδιαίου) από το σημείο P προς το τοπικό ελάχιστο O. Eίναι αυτός ο ρυθμός ο μεγαλύτερος δυνατός ρυθμός μείωσης της συνάρτησης $f(x, y)$ στο σημείο P;
- Na βρεθούν και να σχεδιασθούν τρεις ισοσταθμικές καμπύλες ή επιφάνειες (κατά περίπτωση) των συναρτήσεων: α) $f(x, y, z) = 1/(x^2 + y^2 - 4z^2)$, β) $g(x, y, z) = y - x^2$, γ) $h(x, y)$ με $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, όταν $x \geq 0$ και $h(x, y) = |y|$, όταν $x < 0$.
- Na αποδειχθεί ότι η καμπύλη $r(t) = (t, t, t^3)$, βρίσκεται στην ισοσταθμική επιφάνεια $\Phi(x, y, z) = 0$ της συνάρτησης $\Phi(x, y, z) = z - x^2 y$ και ότι το $\nabla f(r(t))$ (το gradient της Φ υπολογισμένο στα σημεία της καμπύλης) είναι κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στα σημεία αυτά.

9. Σε μια οριζόντια πλάκα που η θερμοκρασία στο σημείο (x, y) είναι $f(x, y)$, εσείς βρίσκεστε στο σημείο $(3,7)$. Αν κινηθείτε προς τη κατεύθυνση του θετικού άξονα Οχ (διάνυσμα $\nu = i$) διαπιστώνετε ότι η θερμοκρασία μειώνεται με ρυθμό 8βαθμούς/cm. Αν κινηθείτε προς τη κατεύθυνση του θετικού άξονα Ογ (διάνυσμα $\nu = j$) διαπιστώνετε ότι η θερμοκρασία αυξάνεται με ρυθμό 5βαθμούς/cm. Προς ποια κατεύθυνση πρέπει να κινηθείτε αν θέλετε: **a)** Η θερμοκρασία να μειωθεί με τον μεγαλύτερο ρυθμό, **b)** Η θερμοκρασία να αυξηθεί με τον μεγαλύτερο ρυθμό, **γ)** Η θερμοκρασία να παραμείνει σταθερή. Να γίνει σχετικό σχήμα που να υποστηρίζει τις εξηγήσεις που θα δώσετε σε όλα τα ερωτήματα.

10. Να δειχθεί ότι οι παρακάτω παραμετρικές καμπύλες είναι ισοδύναμες. Ποιό είναι το κοινό τους ίχνος; Να βρεθεί μια φυσική παραμετρική παράσταση του ίχνους.

$$\mathbf{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t), \quad t \in [0, \pi], \quad \mathbf{q}(t) = (-2 \cos 2t, -2 \sin 2t), \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$$

11. Να δειχθεί ότι το $\mathbf{n} = \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|}(y'(t), -x'(t))$ είναι ένα κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα της παραμετρικής καμπύλης $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a, b]$.

12. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x, y, z) = 2x^2 + y$ και $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz, y, 3 + x^2)$. Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f\mathbf{F}$, $\text{grad}f$, $\text{div}\mathbf{F}$, $\text{grad}(\text{div}\mathbf{F})$, $\text{rot}\mathbf{F}$, $\text{div}(\text{rot}\mathbf{F})$ και να επαληθευθούν οι τύποι :

$$(a) \text{div}(f\mathbf{F}) = \text{grad}f \cdot \mathbf{F} + f\text{div}\mathbf{F}, \quad (b) \text{rot}(\mathbf{F}) = \text{frot}\mathbf{F} + \text{grad}f \times \mathbf{F}$$

13. Αν $\varphi(x, y, z) = g(u)$ όπου $u = u(x, y, z)$ να αποδειχθεί ότι

$$(i) \nabla \varphi = g'(u) \nabla u.$$

$$(ii) \text{div}(\nabla \varphi) = g'(u) \text{div}(\nabla u) + g''(u) \|\nabla u\|^2.$$

(iii) Να επαληθευθεί ο τύπος $\text{rot}(\nabla \varphi) = 0$ για τη συγκεγριμένη συνάρτηση φ .

14. Αν η $f(x, y, z)$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση που δεν έχει ακρότατα και η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ είναι γραμμή ροής του $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$ να δειχθεί ότι η $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$ είναι αύξουσα συνάρτηση του t .

15. Στις παρακάτω περιπτώσεις να υπολογισθούν τα $\mathbf{r}'(t)$ και $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ και να εξετασθεί σε ποιές περιπτώσεις η καμπύλη $\mathbf{r}(t)$ είναι γραμμή ροής του διανυσματικού πεδίου \mathbf{F} .

$$a. \quad \mathbf{F}(x, y) = (xy, x - y), \quad \mathbf{r}(t) = (t, t^2), \quad t \in [-2, 2]$$

$$b. \quad \mathbf{F}(x, y) = (x, y), \quad \mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t), \quad t \in [0, \pi]$$

$$c. \quad \mathbf{F}(x, y) = (y, -x), \quad \mathbf{r}(t) = (\sin t + \cos t, \cos t - \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$d. \quad \mathbf{F}(x, y) = (x^2, 0, z(1+x)), \quad \mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{1-t}, 0, \frac{e^t}{1-t} \right), \quad t > 1$$

16. Έστω $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), s \in I$ μια διαφορίσιμη C^4 φυσική παραμετρική καμπύλη με καμπυλότητα $k(s) \neq 0$, στρέψη $\sigma(s) \neq 0$ και τρίεδρο Frenet $\{T, N, B\}$. Να δειχθεί ότι:

$$a. \quad (r' r'' r''') = k^2 \sigma \quad (\text{μικτό γινόμενο})$$

$$b. \quad (B' B'' B''') = \frac{\sigma k' - k \sigma'}{\sigma(k^2 + \sigma^2)}$$

$$c. \quad \text{Αν } k = \sigma \tau \alpha \theta, \sigma = \sigma \tau \alpha \theta. \text{ τότε } N'' + (k^2 + \sigma^2)N = 0$$

1. α) Εξηπικός κύλινδρος (6x. 1α) β) Εξειψη στο επίπεδο $z=2$ (6x. 1β)
 γ) Δύο ευθείες $x=\sqrt{3}, y=2$ και $x=-\sqrt{3}, y=2$ (6x. 1γ) δ) δίχως υπερβολές
 (6x. 1δ). ε) Εξηπικό πικριθοχούδες (6x. 1ε)

2. a) Κέντρο σφαιρών $K(1,0,2)$, $d(K, \pi) = \sqrt{2} < 2 = R$ κατίνα σφαιρών. Άρα
 το επίπεδο τέμνει τη σφαίρα. Το κέντρο του κύρχου Ι είναι το σημείο τοπής
 του επιπέδου (π) με την κάθετη (8) γάντο που διέρχεται από το K (6x. 2).

Given (8): $x=1+t, y=0, z=2+t \stackrel{(\pi)}{\Rightarrow} 2t=-2 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow I(0,0,1)$. Άρα
 ο κύρχος έχει κέντρο $I(0,0,1)$ και ακτίνα $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$

β) Το σύστημα ριών δύο είσιγκεων είναι 160δύναμη με το $2x^2+y^2=2$, $x+z=1$
 δηλαδή τομή εξειπικού κυλινδρού ωα επιπέδου.

3. α). $x=\cos t, y=1+\sin t, z=2+\sin t$ (6x. 3α)

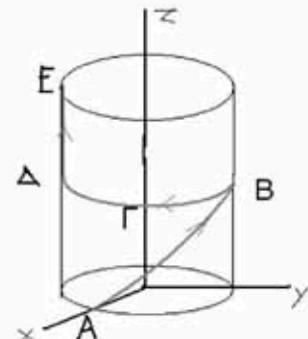
β) Το σύστημα 160δύναμη με το. $(x+1)^2+y^2=1, z=4-2x$ (τομή επιπέδου
 με κύλινδρο). Άρα $x=1+\cos t, y=\sin t, z=2-2\cos t$ (6x. 3β)

γ) $x=\cos t, y=\frac{1}{2}\sin t, z=3$. Εξειψη για $z=3$ (6x. 3γ)

δ) $x=t, y=t, z=9-2t^2$ (6x. 3δ)

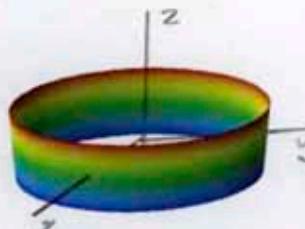
ε). Τετράγωνο γραμμή Oy . $\vec{r}(t)=\begin{cases} (1-t, t, 0), t \in [0,1] \\ (1-t, 2-t, 0), t \in [1,2] \\ (t-3, 8-t, 0), t \in [2,3] \\ (t-3, t-4, 0), t \in [3,4] \end{cases}$

4. $\vec{r}(t)=\begin{cases} (\cos t, \sin t, t), t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ (\sin t, \cos t, \frac{\pi}{2}), t \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ (0, -1, t), t \in [\pi, 4] \end{cases}$ (6x. 4)

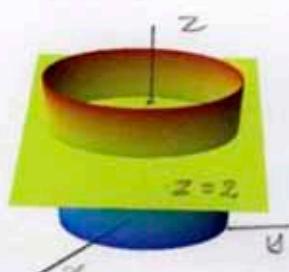


5. (6x. 5α) (6x. 5β)

6x. 1α



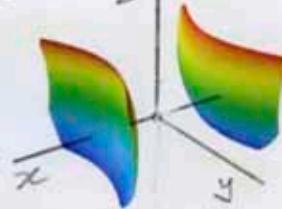
6x. 1β



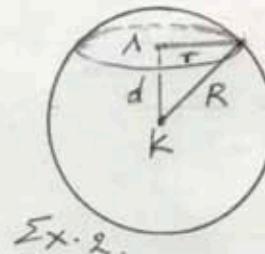
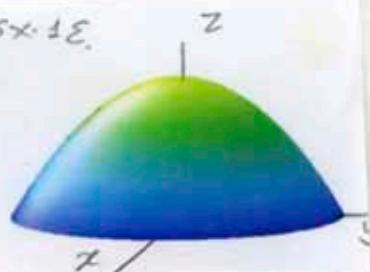
6x. 1γ



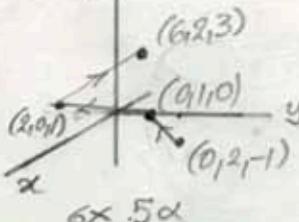
6x. 1δ



6x. 1ε



6x. 2



(4,7)

6x. 5α

6x. 5β

6. Ισογεωδήμα: $4x^2 + y^2 = C$ και $1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = C \Rightarrow C = 4 \Rightarrow 4x^2 + y^2 = 4$

Α τοπικό εχθρό για $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$, $\forall (x, y) \in U$ περιοχής του (x_0, y_0)
 $f(x, y) = 4x^2 + y^2 \geq 0 = f(0, 0)$

Ρυθμίσις μεταβολής της f στην επιτροπή του $\bar{u} = \frac{p}{\|\nabla f\|} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Είναι:
 $Df = \nabla f \cdot u = \left(\frac{8}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\right) \cdot \bar{u} = -\frac{8\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}$. Δεν είναι ο μεγαλύτερος ρυθμός
διότι το \bar{u} δεν είναι περάσμα στο $-\nabla f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

7. a) $f(x, y, z) = C \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4z^2 = k = C$. Οι κλίσεις στην επιφάνεια ($\text{Gr.A} \& \text{G} \text{es. 114}$)

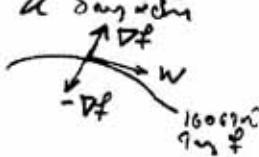
b) $g(x, y, z) = C \Leftrightarrow y = x^2 + C$. Οι κλίσεις παραβολών της είναι ($\text{Gr.A} \& \text{G} \text{es. 116}$)
γ) $h(x, y) = C \Leftrightarrow x^2 + y^2 = C$, $x > 0 \Rightarrow y = C^{1/2}$ ή $y = -C^{1/2}$

8. $\phi(\tilde{r}(t)) = z(t) - x(t)y(t) = t^3 - t \cdot t = 0$. Παρεγγ. ας προστιθένεται $g(t) = \phi(\tilde{r}(t)) = 0$,
 $g'(t) = \nabla \phi(\tilde{r}(t)) \cdot \tilde{r}'(t) = 0 \Rightarrow \nabla \phi(\tilde{r}(t)) \perp \tilde{r}'(t)$.

9. $Df = \nabla f \cdot v$. Από $\nabla f \cdot \bar{v} = (f_x, f_y) \cdot (1, 0)$. Από $f_x(3, 7) = -8$. Ορθογ. $f_y(3, 7) = 5$

Από $\nabla f(3, 7) = (-8, 5)$ - Τοτε α) Νείωση: $\bar{u} = -\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{1}{\sqrt{89}}(8, -5)$

β) Αύξηση: $\bar{v} = -\bar{u}$. γ) Στις θερμές και ταχύτητες κάθετη στο \bar{u} διαμορφώνονται στοιχοδιάπορες $w = (w_1, w_2)$ με $8w_1 - 5w_2 = 0$ η οποία στο $w = (5, 8)$.



10. Με $t = \varphi(\tau) = \pi + 2\tau$ το $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ καθιερώνεται στο $[0, \pi]$ και

$\tilde{\varphi}(\tau) = \tilde{r}(\varphi(\tau))$. Γιατί δε $\varphi'(\tau) = 2 > 0 \quad \forall \tau \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$. Από 160 εξαντλ.

11. Για να δειτε $t \in [\alpha, \beta]$ τιχεία $\tilde{r}(t) \cdot \tilde{r}'(t) = \frac{1}{\|\tilde{r}(t)\|} (y'(t) \cdot x'(t) - x'(t) y'(t)) = 0$.

12. $f\tilde{F} = (xz(2x^2+y), y(2x^2+y), (3+x^2)(2x^2+y)) \dots$ στη σελίδα 162-171

13. i) $\nabla \varphi = (g_x, g_y, g_z) = (g'(u)u_x, g'(u)u_y, g'(u)u_z) = g'(u) \nabla u$.

ii) $\operatorname{div} \nabla \varphi = \operatorname{div}(g'(u) \nabla u) = (g'u_x)_x + (g'u_y)_y + (g'u_z)_z = g''u_x^2 + g'u_{xx} +$
 $+ g''u_y^2 + g'u_{yy} + g''u_z^2 + g'u_{zz} = g'(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + g''(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = \dots$

iii) Εστω $f(x, y, z) = g'(u)$, $u = u(x, y, z) \Rightarrow \operatorname{rot}(\nabla \varphi) = \operatorname{rot}(f \nabla u) =$

$= f \operatorname{rot}(\nabla u) + \nabla f \times \nabla u = \nabla f \times \nabla u$. Ας είναι $\nabla f = (g''u_x, g''u_y, g''u_z) =$
 $= g''(u_x, u_y, u_z) // \nabla u \Rightarrow \nabla f \times \nabla u = 0$.

$$14. g'(t) = \nabla f(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t). \text{ Aλγά } \bar{r}'(t) = \bar{F}(\bar{r}(t)) = \nabla f(\bar{r}(t))$$

$$\text{Αρχ } g'(t) = \nabla f(\bar{r}(t)) \cdot \nabla f(\bar{r}(t)) = \| \nabla f(\bar{r}(t)) \|^2$$

Αφού f δεν είναι ακρότατη $\Rightarrow \nabla f \neq 0$ σε γενικές αντιστοίχιες. Αρχ $g'(t) > 0$.

$$15. \alpha) \bar{F}(\bar{r}(t)) = (t^3, t-t^2), \bar{r}'(t) = (1, 2t)$$

$$\beta) \bar{F}(\bar{r}(t)) = (\alpha \cos t, \alpha \sin t), \bar{r}'(t) = (-\alpha \sin t, \alpha \cos t)$$

$$\gamma) \bar{F}(\bar{r}(t)) = (\cos t - \sin t, -\sin t - \cos t) = \bar{r}'(t) \Rightarrow \text{γραμμή πομπής.}$$

$$\delta) \bar{F}(\bar{r}(t)) = \left(\frac{1}{(1-t)^2}, 0, \frac{e^t}{1-t} \left(1 + \frac{1}{1-t} \right) \right) = \bar{r}'(t) \Rightarrow \text{>>>}$$

$$16. \text{Από τύπου Frenet: } \bar{r}' = \bar{T}, \bar{r}'' = \bar{T}' = k \bar{N}, \bar{r}''' = k' \bar{N} + k \bar{N}' = k' \bar{N} + k(k \bar{T} + \sigma \bar{B}).$$

$$\alpha) \text{Αρχ } (\bar{r}' \bar{r}'' \bar{r}''') = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ -k^2 & k & k\sigma \end{vmatrix} = k^2 \sigma$$

$$\beta) \bar{B}' = -\sigma \bar{N} \Rightarrow \bar{B}'' = -\sigma' \bar{N} - \sigma \bar{N}' = -\sigma' \bar{N} - \sigma(-k \bar{T} + \sigma \bar{B}) = \sigma k \bar{T} - \sigma \bar{N} - \sigma^2 \bar{B}$$

$$\bar{B}''' = (\sigma' k + \sigma k') \bar{T} + \sigma k(k \bar{N}) - \sigma'' N - \sigma(-k \bar{T} + \sigma \bar{B}) - 2\sigma \sigma' \bar{B} - \sigma^3(-\sigma \bar{N})$$

$$= (2\sigma' k + \sigma k') \bar{T} + (\sigma' k^2 - \sigma'' + \sigma^3) \bar{N} + (-3\sigma \sigma') \bar{B}$$

$$\gamma) (\bar{B}' \bar{B}'' \bar{B}''') = \begin{vmatrix} 0 & -\sigma & 0 \\ \sigma k & -\sigma' & -\sigma \\ 2\sigma' k + \sigma k' & \sigma' k^2 - \sigma'' + \sigma^3 & -3\sigma \sigma' \end{vmatrix} = \sigma^3 (\sigma k' - \sigma' k)$$

$$\delta) \bar{N}' = -k \bar{T} + \sigma \bar{B} \Rightarrow \bar{N}'' = -k' \bar{T} - k(k \bar{N}) + \sigma' \bar{B} + \sigma(-\sigma \bar{N}), \text{ Από } k, \sigma = 0.$$

$$\Rightarrow N'' = -k^2 \bar{N} - \sigma^2 \bar{N} \Rightarrow N'' + (k^2 + \sigma^2) \bar{N} = 0.$$

