ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σημειώσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης

(Τρίτη έκδοση)

Σπύρος Αργυρός

Μάρτιος 2011

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Το περιεχόμενο των σημειώσεων αφορά τις παραδόσεις του μαθήματος Πραγματική Ανάλυση που διδάχτηκε το χειμερινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2001-2002 στο Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών (Τ.Ε.Μ.Φ.Ε.) του Ε.Μ.Π.

Η ύλη που επιλέχθηκε να διδαχθεί και συμπεριλαμβάνεται στις σημειώσεις αφορά τη θεωρία μετρικών χώρων. Ας σημειώσουμε ότι όπως έχει επικρατήσει διεθνώς, ο τίτλος Πραγματική Ανάλυση συμπεριλαμβάνει ένα ευρύ φάσμα θεμάτων σύγχρονης Μαθηματικής Ανάλυσης και σαν θεματική ενότητα δεν μπορεί να διδαχθεί σε ένα εξάμηνο. Η θεωρία μετρικών χώρων συνιστά τον κεντρικό πυρήνα των σύγχρονων μαθηματικών και η εξοικείωση του φοιτητή των Μαθηματικών με τις έννοιες και τις τεχνικές της είναι απαραίτητο εφόδιο για οποιαδήποτε κατεύθυνση θα επιλέξει να ακολουθήσει.

Οι σημειώσεις χωρίζονται σε εννιά κεφάλαια και στο τέλος κάθε κεφαλαίου παρατίθενται ορισμένες ασκήσεις. Δεδομένου ότι η φύση της θεωρίας μετρικών χώρων είναι αρκετά αφηρημένη και η εξοικείωση των φοιτητών με παρόμοιες έννοιες και τεχνικές αποδείξεων είναι μικρή απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή στη μελέτη του μαθήματος.

Ειδικότερα ο φοιτητής θα πρέπει να έχει καλή γνώση και κατανόηση των εννοιών, (υπάρχουν αρκετές νέες έννοιες). Επίσης η γνώση των ισοδύναμων μορφών (χαρακτηρισμών) των εννοιών είναι απαραίτητη για τη μελέτη των θεωρημάτων και την επίλυση ασκήσεων. Κατά τη διάρκεια των εξετάσεων ο φοιτητής θα πρέπει να διατυπώσει με σαφήνεια τους συλλογισμούς που θα απαιτούνται για την απάντηση των ερωτημάτων. Είναι χρήσιμο κατά τη διάρκεια της μελέτης να καταγράφει πλήρως τις απαντήσεις στις ασκήσεις η ακόμη και αποδείξεις θεωρημάτων (προτάσεων κ.λ.π.) τα οποία διαβάζει ώστε να εξοικειωθεί με την σαφή διατύπωση συλλογισμών.

Το περιεχόμενο του μαθήματος έχει επιλεγεί έτσι ώστε να μην υπάρχουν εκτενείς αποδείξεις και επίσης να εκτεθεί η ποικιλία των μεθόδων που εμφανίζονται. Οι ασκήσεις επίσης έχουν επιλεγεί ώστε να συμβάλλουν στην καλή κατανόηση του μαθήματος.

Με την ελπίδα ότι ο κάθε φοιτητής θα βρει κάποιο ενδιαφέρον στο περιεχόμενο του μαθήματος και των σημειώσεων, σας εύχομαι καλή μελέτη και επιτυχία στις εξετάσεις.

Η έγκαιρη προετοιμασία των σημειώσεων στηρίχθηκε στη σημαντική βοήθεια που προσφέρθηκε από τους συνεργάτες μου Α. Αρβανιτάκη, Β. Κανελλόπουλο, Α. Μανουσάκη και Α. Τόλια, τους οποίους και επιθυμώ να ευχαριστήσω.

Αθήνα 29 Ιανουαρίου 2002
Σπύρος Αργυρός
Καθηγητής Μαθηματικών Ε.Μ.Π.

Πρόλογος δεύτερης έκδοσης

Η δεύτερη έκδοση των σημειώσεων του μαθήματος Πραγματικής Ανάλυσης αποτελεί συμπλήρωση της πρώτης. Έχει προστεθεί μια παράγραφος στο κεφάλαιο των πλήρων μετρικών χώρων που αφορά τις ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις, μια παράγραφος στο κεφάλαιο των συμπαγών μετρικών χώρων που αφορά τα ολικά φραγμένα υποσύνολα μετρικών χώρων, καθώς και ένα κεφάλαιο όπου ορίζονται τα γινόμενα μετρικών χώρων και το σύνολο Cantor.

Αθήνα 15 Ιανουαρίου 2003
Σπύρος Αργυρός
Καθηγητής Μαθηματικών Ε.Μ.Π.

Κεφάλαιο 1

Οι φυσικοί αριθμοί

Σε αυτό το κεφάλαιο και στα δύο επόμενα θα εισάγουμε και θα μελετήσουμε τα θεμελιώδη αριθμητικά συστήματα. Με αυτό εννοούμε τα σύνολα $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, $\mathbb{Z}$ των ακεραίων, $\mathbb{Q}$ των ρητών και $\mathbb{R}$ των πραγματικών. Από αυτά, το σύνολο $\mathbb{N}$ είναι πρωτογενές ενώ οι ακέραιοι και οι ρητοί είναι παράγωγα των φυσικών και των ακεραίων αντίστοιχα με σχετικά απλή διαδικασία. Τέλος οι πραγματικοί αριθμοί προκύπτουν από τους ρητούς κατά μη τετριμένο τρόπο. Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε τα θεμελιώδη συστήματα και θα συζητήσουμε κάποιες από τις βασικές ιδιότητές τους. Οι αριθμοί αποτελούν τον "ακρογωνιαίο λίθο" των μαθηματικών αλλά και όλων των επιστημών που το περιεχόμενό τους βασίζεται σε ποσοτικούς προσδιορισμούς. Η σαφής γνώση της δομής τους αποτελεί απαραίτητη προυπόθεση για ενασχόληση με οποιονδήποτε κλάδο των μαθηματικών.

Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών είναι αναμφίβολα το απλούστερο από τα αριθμητικά συστήματα. Οι φυσικοί αριθμοί είναι τα πρώτα μαθηματικά αντικείμενα που έγιναν αντιληπτά από τον άνθρωπο στη διαδικασία της εξέλιξής του. Έχουν διακριτή δομή κατανοητή από τον οποιονδήποτε. Για παράδειγμα είναι σαφές ότι αν βρισκόμαστε στον φυσικό αριθμό m τότε μπορούμε να μεταβούμε στον $m+1$ και μεταξύ τους δεν υπάρχει κανένας φυσικός. Επίσης καταλαβαίνουμε πως μπορούμε να προσθέσουμε και να πολλαπλασιάσουμε φυσικούς αριθμούς και τέλος ότι αν μας δοθούν δύο φυσικοί αριθμοί τότε είτε είναι ίσοι είτε ο ένας είναι μεγαλύτερος από τον άλλο. Συνοψίζοντας τα παραπάνω μπορούμε να πούμε ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι ένα σύνολο $\mathbb{N}$ εφοδιασμένο με δύο πράξεις "$+$","$\cdot$" και μία διάταξη "$<$" που ικανοποιούν κάποιες προφανείς ιδιότητες. Το ερώτημα που τίθεται είναι το ακόλουθο. Μεταξύ όλων των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών ποιες είναι οι ελάχιστες δυνατές που αν υποθέσουμε ότι ισχύουν σε ένα σύνολο $\mathbf{N}$ τότε το $\mathbf{N}$ υποχρεωτικά ταυτίζεται με το σύνολο των φυσικών αριθμών; Οι ελάχιστες αυτές ιδιότητες εντοπίστηκαν μετά το 1850 από διάφορους μαθηματικούς, ανεξάρτητα, και έχει επικρατήσει να ονομάζονται "Αξιώματα Peano" παρά το γεγονός ότι ο Peano δεν ήταν ο πρώτος που τα όρισε!

Το σύνολο των φυσικών αριθμών, όπως θα οριστεί στο παρόν κείμενο δε θα περιλαμβάνει το μηδέν. Ορισμένοι συγγραφείς θεωρούν το μηδέν σαν στοιχείο των φυσικών αριθμών. Κανένας από τους δύο ορισμούς δε θεωρείται λάθος και η παρουσία ή όχι του μηδενός δεν επηρεάζει την ευρύτερη δομή του συνόλου.

1.1 Τα αξιώματα του Peano

Αξίωματα 1.1. *(Peano). Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών είναι ένα ζεύγος $(\mathbb{N}, s)$ όπου s είναι μία απεικόνιση $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τις εξής ιδιότητες:*

(i.) Υπάρχει ένα στοιχείο $1 \in \mathbb{N}$.

(ii.) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $s(n) \neq 1$.

(iii.) Η s είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1).

(iv.) Εάν $U \subset \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $1 \in U$ και για κάθε $n \in U$, $s(n) \in U$, τότε $U = \mathbb{N}$. (Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής).

Ας παρατηρήσουμε ότι οι βασικές ιδιότητες του $\mathbb{N}$, δηλαδή οι πράξεις και η διάταξη απουσιάζουν πλήρως από τα παραπάνω αξιώματα. Τα αξιώματα αυτά αφορούν ιδιότητες της συνάρτησης s (που λέγεται συνάρτηση επομένου) και όταν θα ορίσουμε τις πράξεις για κάθε n το $s(n)$ θα ισούται με $n + 1$. Πρέπει επίσης να τονιστεί ότι οι φυσικοί αριθμοί δεν είναι απλά το σύνολο $\mathbb{N}$. Το σημαντικότερο στοιχείο τους είναι η δομή τους που περιγράφεται, σε επίπεδο αξιωμάτων από τη συνάρτηση s και την αρχή της επαγωγής, ενώ σε μεταγενέστερο στάδιο θα περιγράφεται από τις πράξεις και τη διάταξη. Το πλέον ενδιαφέρον από τα αξιώματα είναι αυτό της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής. Θα παίξει καθοριστικό ρόλο τόσο στον ορισμό των πράξεων όσο και στον ορισμό της διάταξης. Θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι είναι μία θεμελιώδης αρχή "διαχείρισης του απείρου". Σαν άμεση συνέπεια έχει τη μαθηματική επαγωγή σαν αποδεικτική διαδικασία. Ακριβέστερα ισχύει το ακόλουθο:

Πρόταση 1.2. *Έστω $P(n)$ μία μαθηματική πρόταση που διατυπώνεται για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε τα ακόλουθα:*

(i.) Η $P(1)$ ισχύει.

(ii.) Αν ισχύει η $P(n)$ τότε αποδεικνύεται ότι ισχύει η $P(s(n))$.

Τότε συμπεραίνουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η $P(n)$. Δηλαδή το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} :$ η $P(n)$ ισχύει$\}$ ισούται με το $\mathbb{N}$.

Η απόδειξη της πρότασης είναι άμεση συνέπεια του αξιώματος (iv.), παρατηρώντας ότι το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} :$ η $P(n)$ ισχύει$\}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του (iv.) και άρα ταυτίζεται με το $\mathbb{N}$.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η προηγούμενη πρόταση έχει μεταμαθηματικό περιεχόμενο. Ουσιαστικά αφορά τον τρόπο που αποδεικνύουμε ιδιότητες των φυσικών αριθμών (και όχι μόνο). Βεβαίως το ότι το αξίωμα (iv.) συνεπάγεται την πρόταση 1.2 είναι σχεδόν φανερό. Το αντίστροφο δε συμβαίνει. Δηλαδή αν δεχτούμε ότι ισχύει η πρόταση 1.2 τότε το αξίωμα (iv.) δεν είναι συνέπεια αυτής. Θα δούμε παρακάτω ότι το αξίωμα (iv.) είναι συνέπεια μίας πολύ φυσιολογικής ιδιότητας της διάταξης στο $\mathbb{N}$.

Πρόταση 1.3. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \neq 1$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $s(m) = n$.*

Απόδειξη. Θα κάνουμε χρήση της μαθηματικής επαγωγής. Θα θέσουμε

$$U = \{n \in \mathbb{N} : \text{ υπάρχει } m \in \mathbb{N} \text{ ώστε } s(m) = n\}$$

και θα δείξουμε ότι $U \cup \{1\} = \mathbb{N}$.

Πράγματι $1 \in U \cup \{1\}$. Αν το $n \in U \cup \{1\}$ τότε για $m = n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $s(n) = s(m)$ και επομένως $s(n) \in U$. Άρα $s(n) \in U \cup \{1\}$. Από μαθηματική επαγωγή έχουμε ότι $U \cup \{1\} = \mathbb{N}$. Επομένως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \neq 1$ έχουμε ότι $n \in U$ και συνεπώς, από τον ορισμό του U, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n = s(m)$. □

Τα αξιώματα του Peano εξασφαλίζουν ότι ουσιαστικά υπάρχει ένα μόνο ζεύγος $(\mathbb{N}, s)$ που τα ικανοποιεί. Με αυτό εννοούμε ότι αν (N', s') είναι ένα άλλο ζεύγος που ικανοποιεί τα αξιώματα του Peano τότε υπάρχει $\Phi : \mathbb{N} \to N'$ 1-1 και επί ώστε $s'(\Phi(n)) = \Phi(s(n))$. Αυτό σημαίνει ότι μία ιδιότητα ισχύει στο $(\mathbb{N}, s)$ αν και μόνο αν ισχύει στο (N', s') και υπό αυτήν την έννοια το ζεύγος $(\mathbb{N}, s)$ είναι μοναδικό. Η απόδειξη αυτής της ιδιότητας δίνεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.4. *Υπάρχει μοναδικό ζεύγος $(\mathbb{N}, s)$ που ικανοποιεί τα αξιώματα Peano.*

Περιγραφή Απόδειξης.. Έστω ζεύγη $(\mathbb{N}, s)$ και (N', s') που ικανοποιούν τα αξιώματα του Peano. Επομένως υπάρχουν $1 \in \mathbb{N}$ και $1' \in N'$. Η Φ ορίζεται με επαγωγή. Ορίζουμε $\Phi(1) = 1'$ και αν το $\Phi(n)$ έχει οριστεί, θέτουμε $\Phi(s(n)) = s'(\Phi(n))$. Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής είναι αυτή που θα μας εξασφαλίσει ότι το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : \text{το } \Phi(n) \text{ έχει οριστεί}\}$ είναι το σύνολο $\mathbb{N}$ καθώς επίσης ότι η Φ είναι 1-1 και επί. Προφανώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\Phi(s(n)) = s'(\Phi(n))$. □

1.2 Αναδρομικοί ορισμοί

Ο προσεκτικός, αλλά όχι με αρκετή εμπειρία αναγνώστης, θα παρατηρήσει ότι η απόδειξη της προηγούμενης πρότασης είναι αρκετά πλήρης, γεγονός που δε δικαιολογεί τον όρο "περιγραφή της απόδειξης" που διατυπώνεται στην αρχή της. Αν εξετάσουμε προσεκτικά το περιεχόμενο της απόδειξης θα συμφωνίσουμε ότι το βασικό στοιχείο της είναι ο ορισμός της συνάρτησης $\Phi : (\mathbb{N}, s) \to (N', s')$. Ο ορισμός της Φ γίνεται επαγωγικά (ή με αναδρομή) και το σημείο που πρέπει να επισημανθεί είναι ότι ο επαγωγικός ορισμός δεν είναι απλή συνέπεια της Μαθηματικής Επαγωγής. Εκτός αυτής χρησιμοποιεί και στοιχεία από τη θεωρία συνόλων. Η δυνατότητα να ολοκληρώνουμε ορισμούς νέων μαθηματικών αντικειμένων μέσω αναδρομής είναι το περιεχόμενο του Θεωρήματος της Αναδρομής που είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 1.5 (Αναδρομής). *Έστω A σύνολο, $h : A \to A$ συνάρτηση και $a \in A$. Τότε υπάρχει συνάρτηση $\Phi : \mathbb{N} \to A$ ώστε*

(i) $\Phi(1) = a$.

(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\Phi(s(n)) = h(\Phi(n))$.

Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει την απόδειξη του Θεωρήματος σε βιβλία Θεωρίας Συνόλων. Για παράδειγμα περιέχεται στο εξαιρετικό κείμενο του Γ. Μοσχοβάκη "Σημειώσεις στη Συνολοθεωρία".

Αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι η πρόταση 1.4 που διασφαλίζει τη μοναδικότητα του ζεύγους $(\mathbb{N}, s)$ είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος της Αναδρομής. Αρκεί να θέσει κανείς όπου $A = N'$, $h = s'$ και $a = 1'$.

1.3 Οι πραξεις στο $\mathbb{N}$

Όταν λέμε ότι ένα σύνολο A είναι εφοδιασμένο με μία πράξη "$*$" εννοούμε την ύπαρξη μίας συνάρτησης $* : A \times A \to A$ ώστε $*(a, b) = a * b$. Θα ορίσουμε τώρα τις δύο θεμελιώδεις πράξεις στο $\mathbb{N}$, δηλαδή την πρόσθεση "$+$" και τον πολλαπλασιασμό "$\cdot$". Δεδομένου ότι οι πράξεις είναι συναρτήσεις ο ακριβής ορισμός τους απαιτεί τη χρήση του Θεωρήματος Αναδρομής που έχουμε ήδη αναφέρει. Στον ορισμό που αναφέρεται αυτό παραλείπεται.

Ορισμός 1.6. (Πρόσθεση) Ορίζουμε μία πράξη $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, την οποία καλούμε πρόσθεση, με τις εξής ιδιότητες:

i. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n + 1 = s(n)$.

ii. Για κάθε $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $n + s(m) = s(n + m)$.

Ενώ για κάθε $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ χρησιμοποιώντας την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής έχουμε ορίσει το $n + m$, εν τούτοις ο ορισμός της πρόσθεσης σαν συνάρτηση απαιτεί το Θεώρημα της Αναδρομής και αυτό το βήμα το παραλείπουμε.

Ορισμός 1.7. (Πολλαπλασιασμός) Ορίζουμε μία πράξη $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, την οποία καλούμε πολλαπλασιασμό, με τις εξής ιδιότητες:

i. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \cdot 1 = n$.

ii. Για κάθε $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $n \cdot s(m) = n \cdot m + n$.

Πρόταση 1.8. *Εάν $n, m, k \in \mathbb{N}$, τότε*

α. i. $n + (m + k) = (n + m) + k$ *(προσεταιριστική ιδιότητα).*
   ii. $n + m = m + n$ *(μεταθετική ιδιότητα).*
   iii. *Εάν $n + m = n + k$, τότε $m = k$ (νόμος διαγραφής).*

β. i. $n(mk) = (nm)k$ *(προσεταιριστική ιδιότητα).*
   ii. $nm = mn$ *(μεταθετική ιδιότητα).*
   iii. *Εάν $nm = nk$, τότε $m = k$ (νόμος διαγραφής).*

γ. $(n + m)k = nk + mk$ *(επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση).*

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε μόνο την α.i. Έστω U το σύνολο όλων των $k \in \mathbb{N}$ για τα οποία

$$n + (m + k) = (n + m) + k$$

για όλα τα $n, m \in \mathbb{N}$. Λόγω του ορισμού 1.6 έχουμε

$$n + (m + 1) = n + s(m) = s(n + m) = (m + n) + 1$$

Άρα $1 \in U$. Έστω $k \in U$, τότε πάλι λογω του ορισμού 1.6 έχουμε

$$n + (m + s(k)) = n + s(m + k) = s(n + (m + k)) = s((n + m) + k) = (n + m) + s(k)$$

Άρα $s(k) \in U$ και λόγω του αξιώματος 1.1 (iv.) $U = \mathbb{N}$, και η ιδιότητα έχει αποδειχθεί.

Οι υπόλοιπες ιδιότητες αποδεικνύονται με χρήση Μαθηματικής Επαγωγής και αφήνονται στον αναγνώστη. □

1.4 Η διάταξη στο $\mathbb{N}$

Η διάταξη των φυσικών αριθμών είναι μία πολύ σημαντική συνιστώσα της δομής τους. Η βασική ιδιότητά της είναι ότι είναι καλή διάταξη, δηλαδή ότι κάθε υποσύνολο έχει ελάχιστο στοιχείο. Αυτή η ιδιότητα που φαίνεται τελείως φυσιολογική είναι τόσο ισχυρή ώστε να μπορεί να αντικαταστήσει το αξίωμα της Μαθηματικής Επαγωγής. Το τελευταίο δείχνεται στην πρόταση 1.17.

Ορισμός 1.9. (Διάταξη) Έστω ένα σύνολο X. Ορίζουμε ως διάταξη στο X μία σχέση στο X, $R \subset X \times X$, που ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

(i.) Για κάθε $x \in X$ έχουμε ότι $(x, x) \in R$. (αυτοπάθεια)

(ii.) Για κάθε $x, y \in X$ έχουμε ότι αν $(x, y) \in R$ και $(y, x) \in R$, τότε $x = y$. (αντισυμμετρικότητα) (iii.) Για κάθε $x, y, z \in X$ τέτοια ώστε $(x, y) \in R$ και $(y, z) \in R$ έχουμε ότι $(x, z) \in R$. (μεταβατικότητα)

Συχνά συμβολίζουμε μία διάταξη με " $\leq$ " και αντί να γράφουμε $(x, y) \in \leq$ γράφουμε $x \leq y$ και θα λέμε ότι το x είναι μικρότερο ή ίσο του y. Το ζεύγος $(X, \leq)$ καλείται διατεταγμένος χώρος. Επίσης αν $x \leq y$ και $x \neq y$, γράφουμε $x < y$.

Αξίζει να παρατηρήσουμε στο σημείο αυτό ότι σε ένα διατεταγμένο χώρο $(X, \leq)$ δεν είναι πάντα σωστό ότι οποιαδήποτε δύο στοιχεία του, $x, y \in X$, είναι συγκρίσιμα, δηλαδή είτε $x \leq y$ είτε $y \leq x$. Θεωρήστε, για παράδειγμα, ένα σύνολο Y με τουλάχιστον δύο στοιχεία, $X = \mathcal{P}(Y)$ το δυναμοσύνολο του Y, δηλαδή το σύνολο που σαν στοιχεία του έχει όλα τα υποσύνολα του Y και τη σχέση διάταξης " $\leq$ " στο X, οπου $A \leq B$ αν $A \subset B$. Αν $x, y \in Y$ με $x \neq y$ και $A = \{x\}, B = \{y\}$, τότε τα A, B δεν είναι συγκρίσιμα.

Ορισμός 1.10. Ένας διατεταγμένος χώρος $(X, \leq)$ καλείται ολικά διατεταγμένος και η " $\leq$ " καλείται ολική διάταξη αν οποιδήποτε δύο στοιχεία του X είναι συγκρίσιμα. Δηλαδή για κάθε $x, y \in X$ έχουμε ότι είτε $x \leq y$ είτε $y \leq x$.

Η διάταξη στο $\mathbb{N}$ θα οριστεί με τη βοήθεια της επόμενης πρότασης.

Πρόταση 1.11. *Έστω $n, m \in \mathbb{N}$. Τότε ακριβώς ένα από τα παρακάτω ισχύει.*

(a) $n = m$.

(b) Υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n = m + k$.

(c) Υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $m = n + k$.

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $\Sigma_n = \{m \in \mathbb{N} : (a)\ n = m$ ή (b) υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n = m + k$ ή (c) υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $m = n + k\}$ και θέτουμε επίσης $U = \{n \in \mathbb{N} : \Sigma_n = \mathbb{N}\}$. Χρησιμοποιώντας την Αρχή της μαθηματικής επαγωγής θα δείξουμε ότι $U = \mathbb{N}$.

Το $1 \in U$. Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι είτε το $n = 1$, το οποίο άμεσα έπεται ότι $n \in \Sigma_1$ (περίπτωση (a)), είτε $n \neq 1$. Τότε από πρόταση 1.3 υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n = s(k) = 1 + k \in \Sigma_1$ (περίπτωση (b)).

Ας υποθέσουμε ότι $n \in U$, δηλαδή $\Sigma_n = \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι $\Sigma_{s(n)} = \mathbb{N}$, δηλαδή $s(n) \in U$. Πράγματι, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $m \in \Sigma_n$. Επομένως

(a) είτε $n = m$. Τότε $s(n) = s(m) = m + 1$ και συνεπώς $m \in \Sigma_{s(n)}$ (περίπτωση (b)).

(b) είτε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n = m + k$. Τότε $s(n) = s(m + k) = m + (k + 1)$. Συνεπώς $m \in \Sigma_{s(n)}$ (περίπτωση (b)).

(c) είτε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $m = n + k$.

   (c′) Αν $k = 1$ τότε $m = n + 1 = s(n)$ και συνεπώς $m \in \Sigma_{s(n)}$ (περίπτωση (a)).

(c$''$) Αν $k \neq 1$, από πρόταση 1.3 υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $s(l) = k$. Τότε $m = n + k = n + s(l) = n + l + 1 = (n+1) + l = s(n) + l$. Συνεπώς $m \in \Sigma_{s(n)}$ (περίπτωση (c)).

Δηλαδή για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $m \in \Sigma_{s(n)}$. Άρα $\Sigma_{s(n)} = \mathbb{N}$ και $s(n) \in U$. Από Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής έχουμε ότι $U = \mathbb{N}$. Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι ακριβώς μία από τις παραπάνω περιπτώσεις θα ισχύει. Ειδάλλως θα υπήρχαν $n, k \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $n+k = n$. Ισοδύναμα $n + k + 1 = n + 1$ και από το νόμο της διαγραφής έπεται ότι $k + 1 = s(k) = 1$ το οποίο αντιφάσκει με τα αξιώματα Peano. □

Ορισμός 1.12. (Διάταξη στο $\mathbb{N}$). Εάν $n, m \in \mathbb{N}$ και υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $n+k = m$, τότε λέμε ότι ο m είναι μεγαλύτερος του n (ή ισοδύναμα ο n μικρότερος του m) και συμβολίζουμε $m > n$ (ή ισοδύναμα $n < m$). Θα γράφουμε $n \leq m$ αν είτε $n = m$ είτε $n < m$.

Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι η σχέση " $\leq$ " που μόλις ορίσαμε αποτελεί σχέση διάταξης στο $\mathbb{N}$ και μάλιστα σύμφωνα με την πρόταση 1.11 αποτελεί ολική διάταξη.

Η ακόλουθη πρόταση παραθέτει κάποιες βασικές ιδιότητες της διάταξης των φυσικών αριθμών που σχετίζονται με τις πράξεις. Η απόδειξή τους αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Πρόταση 1.13. *Έστω $n, m \in \mathbb{N}$.*

i. Εάν $n < m$, τότε $n + k < m + k$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

ii. Εάν $n < m$, τότε $nk < mk$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Ορισμοί 1.14. Έστω $(X, \leq)$ διατεταγμένος χώρος, $A \subset X$ και $a \in A$.

(i.) Το a καλείται ελάχιστο (minimum) του A αν για κάθε $b \in A$ ισχύει ότι $a \leq b$.

(ii.) Το X καλείται καλά διατεταγμένο αν κάθε μη κενό υποσύνολό του έχει ελάχιστο στοιχείο και η $\leq$ καλείται καλή διάταξη.

Ας παρατηρήσουμε ότι κάθε καλά διατεταγμένο σύνολο είναι και ολικά διατεταγμένο. Πράγματι αν $(X, \leq)$ καλά διατεταγμένος χώρος και $x, y \in X$, τότε το σύνολο $S = \{x, y\} \subset X$ έχει ελάχιστο. Αυτό συνεπάγεται άμεσα ότι καθιστά τα δύο αυτά στοιχεία συγκρίσιμα, αφού το ελάχιστο θα είναι μικρότερο ή ίσο του άλλου.

Θεώρημα 1.15. *Το $\mathbb{N}$ είναι καλά διατεταγμένο.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μη κενό $M \subset \mathbb{N}$ που δεν έχει ελάχιστο στοιχείο για να καταλήξουμε σε άτοπο, δείχνοντας ότι $M = \emptyset$. Θέτουμε $B = \{n \in \mathbb{N} : \text{για κάθε } k \leq n \text{ το } k \notin M\}$. Κάνοντας χρήση της επαγωγής θα δείξουμε ότι το $B = \mathbb{N}$ και κατ' επέκταση $M = \emptyset$.

Το $1 \notin M$, διότι αν ανήκε θα αποτελούσε το ελάχιστο στοιχείο του M το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι το M δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Επομένως $1 \in B$. Αν $n \in B$ τότε για κάθε $k \leq n$ το $k \notin M$. Επομένως $s(n) \notin M$, διότι αν άνηκε θα αποτελούσε το ελάχιστο στοιχείο του M, το οποίο οδηγεί σε άτοπο. Από επαγωγή έχουμε ότι $B = \mathbb{N}$. □

Είναι ενδιαφέρον ότι η απόδειξη της ιδιότητας της καλής διάταξης στο $\mathbb{N}$ απαιτεί την χρήση του αξιώματος της Μαθηματικής Επαγωγής. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην αρχή του κεφαλαίου, αυτό είναι αναγκαίο διότι η ιδιότητα της καλής διάταξης είναι σχεδόν ισοδύναμη με την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής.

Η επόμενη πρόταση είναι επίσης συνέπεια της κάλής διάταξης του $\mathbb{N}$.

Πρόταση 1.16. *Έστω M ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Τότε υπάρχει μία απεικόνιση $\phi : \mathbb{N} \to M$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα και επί. Σαν συνέπεια, $M = \{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ όπου $m_n = \phi(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Η συνάρτηση ϕ ορίζεται αναδρομικά ως εξής. Θέτουμε $\phi(1) = \min M$ και $M_1 = M \setminus \{\min M\}$. Υποθέτουμε ότι $M \supset M_1 \supset \ldots \supset M_k \supset \ldots \supset M_n$ έχουν οριστεί ώστε για κάθε $1 < k \leq n$, $M_k = M_{k-1} \setminus \{\min M_{k-1}\}$ και $\phi(k) = \min M_{k-1}$. Τότε ορίζουμε $\phi(n+1) = \min M_n$ και $M_{n+1} = M_n \setminus \{\min M_n\}$. Επομένως, η ϕ έχει οριστεί για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Είναι εύκολο να δειχθεί με επαγωγή ότι η ϕ είναι γνησίως αύξουσα. Μένει να δείξουμε ότι η συνάρτηση ϕ είναι επί. Πράγματι, αν όχι τότε θα υπήρχε $m_0 \in M$ ώστε $m_0 \neq \phi(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $M' = \{m \in M : \ m \neq \phi(n) \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\}$ και έστω $k = \min M'$. Προφανώς, $\phi(1) = \min M < k$ και αν για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\phi(n) < k$ τότε $\phi(n+1) < k$. Άρα, το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : \ \phi(n) < k\} = \mathbb{N}$. Αυτό είναι άτοπο γιατί το σύνολο $\{l \in \mathbb{N} : \ l < k\}$ είναι πεπερασμένο και η ϕ είναι $1-1$ (βλέπε επόμενη άσκηση). □

Ασκηση 1.1. Δείξτε με επαγωγή ότι δεν υπάρχει $\phi : \{1, \ldots, k+1\} \to \{1, \ldots, k\}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ που είναι $1-1$.

Πρόταση 1.17. *Έστω $(N, \leq)$ ένα μη κενό καλά διατεταγμένο σύνολο, $1 = \min N$ και συνάρτηση $s : N \to N$ με τις εξής ιδιότητες:*

(i.) Η s είναι 1-1.

(ii.) Για κάθε $n \in N$ με $n \neq 1$ υπάρχει $m \in N$ τέτοιο ώστε $n = s(m)$.

(iii.) Για κάθε $n \in N$ έχουμε ότι $n < s(n)$.

Το ζεύγος $(N, \leq)$ ικανοποιεί τα αξιώματα Peano και πρόκειται συνεπώς για το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Απόδειξη. Καταρχάς παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in N$, $1 \leq n < s(n)$ και συνεπώς $s(n) \neq 1$. Απομένει να δείξουμε ότι ικανοποιεί την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής. Έστω $U \subset N$

τέτοιο ώστε $1 \in U$ και για κάθε $n \in U$ έχουμε ότι το $s(n) \in U$. Θα δείξουμε ότι $U = N$. Πράγματι θα υποθέσουμε ότι δεν ισχύει και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έστω, λοιπόν, το $V = N \setminus U \neq \emptyset$ και $n = \min V$. Επειδή $1 \in U$ έπεται ότι $n \neq 1$ και συνεπώς υπάρχει $m \in N$ τέτοιο ώστε $s(m) = n$. Επειδή $m < s(m) = n$ και n το ελάχιστο στοιχείο του V έπεται ότι $m \notin V$ και συνεπώς $m \in U$. Από την υπόθεση για το U έχουμε ότι $n = s(m) \in U$, το οποίο είναι άτοπο. □

1.5 Ο Ευκλείδιος Αλγόριθμος

Ο Ευκλείδιος Αλγόριθμος αφορά την εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη (μ.κ.δ.) δύο φυσικών αριθμών. Περιέχεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη σε γεωμετρική μορφή και αφορά μία μέθοδο ελέγχου του κατά πόσο δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ισομετρήσιμα. Δηλαδή κατά πόσο υπάρχει ένα τρίτο ευθύγραμμο τμήμα ακέραια πολλαπλάσια του οποίου είναι τα δύο προηγούμενα. Όπως είναι γνωστό αυτή την ιδιότητα δε την έχουν όλα τα ζεύγη ευθυγράμμων τμημάτων. Για παράδειγμα η υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά ενός ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου δεν είναι ισομετρήσιμα. Το πραγματικό όμως περιεχόμενο του Ευκλείδιου Αλγορίθμου είναι η εύρεση του μ.κ.δ. που έχουμε ήδη αναφέρει.

Ο Ευκλείδιος Αλγόριθμος περιγράφει την ακόλουθη μέθοδο. Ας υποθέσουμε ότι m, n είναι φυσικοί αριθμοί με $n < m$. Τότε $m = np_1 + v_1$ με p_1, v_1 φυσικούς αριθμούς και $v_1 < n$. Αν $v_1 = 0$ τότε η διαδικασία τερματίζεται. Διαφορετικά $n = p_2 v_1 + v_2$ με p_2, v_2 φυσικούς αριθμούς και $v_2 < v_1$. Πάλι αν $v_2 = 0$ η διαδικασία τερματίζεται. Διαφορετικά $v_1 = p_3 v_2 + v_3$ και συνεχίζουμε όπως προηγουμένως. Με τη διαδικασία αυτή ορίζουμε μία γνησίως φθίνουσα ακολουθία $n > v_1 > v_2 > ... > v_k$ η οποία τερματίζεται στο v_k αν και μόνο αν το $v_k = 0$. Το θεώρημα αποφαίνεται ότι αν $v_k = 0$ τότε ο μ.κ.δ. των m και n είναι ο v_{k-1}. Άρα πράγματι η διαδικασία αυτή οδηγεί στην εύρεση του μ.κ.δ. των m, n. Η απόδειξη στηρίζεται στην ακόλουθη απλή πρόταση.

Ας αρχίσουμε με κάποιους συμβολισμούς. Αν $p \in \mathbb{N}$ και $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ θα γράφουμε $p|q$ αν ο p διαιρεί τον q (κάθε $p \in \mathbb{N}$ διαιρεί το 0). Επίσης για $m, n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $\Delta(m, n) = \{p \in \mathbb{N} : p|n \text{ και } p|m\}$.

Πρόταση 1.18. *Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ με $n < m$ και $m = np + v$ όπου $p, v \in \mathbb{N}$. Τότε $\Delta(m, n) = \Delta(n, v)$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $\Delta(n, v) \subset \Delta(m, n)$ και αντίστροφα. Έστω $l \in \Delta(n, v)$. Τότε $l|n$ και $l|v$. Επομένως $l|np + v$. Δηλαδή $l|m$. Αντίστροφα αν $l \in \Delta(m, n)$, τότε $l|m$ και $l|n$. Άρα $l|m - np$. Επομένως $l|v$, αφού $v = m - np$. □

Στον Ευκλείδιο Αλγόριθμο που τερματίζεται στο v_k ($v_k = 0$) η πρόταση έχει την ακόλουθη συνέπεια. $\Delta(m, n) = \Delta(n, v_1) = \Delta(v_1, v_2) = ... = \Delta(v_{k-2}, v_{k-1})$. Επειδή $v_{k-1}|v_{k-2}$ έπεται ότι $v_{k-1} = \max \Delta(v_{k-2}, v_{k-1}) = \max \Delta(m, n)$. Άρα v_{k-1} είναι ο μ.κ.δ. των m, n.

Παρατήρηση. Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο τερματισμός του Ευκλείδιου Αλγόριθμου σε πεπερασμένα βήματα είναι συνέπεια της καλής διάταξης του συνόλου $\mathbb{N}$. Πράγματι μία ολική διάταξη είναι καλή αν και μόνο αν οι γνησίως φθίνουσες ακολουθίες είναι πεπερασμένες. Έτσι θεωρώντας οι αρχαίοι Έλληνες ότι ο Ευκλείδιος Αλγόριθμος τερματίζεται, ουσιαστικά δέχονταν ότι η διάταξη του $\mathbb{N}$ είναι καλή. Θα πρέπει επίσης να επισημάνουμε ότι η Μαθηματική Επαγωγή σαν αποδεικτική μέθοδος διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον F. Maurolicos (Φ. Μαυρόλυκος) (1494-1575) Σικελό Ελληνικής καταγωγής και εν συνεχεία από τον Pascal (1623-1662). Εντούτοις στα Στοιχεία του Ευκλείδη υπάρχουν προτάσεις που η απόδειξή τους απαιτεί Μαθηματική Επαγωγή η οποία εφαρμόζεται ατελώς.

1.6 Ύπαρξη μοντέλου του $\mathbb{N}$

Ένα σημείο που αξίζει επίσης να σχολιάσουμε αφορά την ύπαρξη ενός συνόλου $\mathbb{N}$ εφοδιασμένου με μία συνάρτηση $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ που να ικανοποιεί τα αξιώματα του Peano. Στο ερώτημα αυτό μπορεί να διατυπωθεί ο αντίλογος σε δύο κατευθύνσεις.

Καταρχάς θα μπορούσε κάποιος να απαντήσει ότι βεβαίως και υπάρχει και είναι οι φυσικοί αριθμοί που γενιές και γενιές έχουν μεγαλώσει μαζί τους. Και αυτό ακούγεται λογικό δεδομένου ότι οι φυσικοί αριθμοί θεωρούνται το πιο στέρεο μαθηματικό οικοδόμημα. Αν συλλογιστούμε όμως τους φυσικούς αριθμούς αντιλαμβανόμαστε ότι έχουμε πλήρη γνώση ενός πολύ μικρού αρχικού διαστήματος. Για το υπόλοιπο μέρος τους έχουμε διαμορφώσει ένα ισχυρό πιστεύω ότι εξελίσσεται με τρόπο παρόμοιο με αυτόν που παρατηρούμε στο μικρό αρχικό διάστημα τους. Τα αξιώματα που παραθέσαμε στοχεύουν να ορίσουν στο $\mathbb{N}$ τη δομή που πιστεύουμε ότι πρέπει να έχει. Η απάντηση λοιπόν στον πρώτο αντίλογο είναι ότι είμαστε γνώστες ενός μικρού μέρους του $\mathbb{N}$ και το μεγαλύτερο μέρος του διαφεύγει πλήρως της εμπειρίας μας.

Ο δεύτερος αντίλογος αφορά την έκφραση "να βρούμε ένα σύνολο $\mathbb{N}$ και μία συνάρτηση $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ώστε να ικανοποιούνται τα αξιώματα". Και η ερώτηση είναι απλή. Πως είναι δυνατόν να μπορούμε να αποδείξουμε αξιώματα; Αν αυτό συμβαίνει τότε αυτά δεν είναι αξιώματα αλλά συνέπειες αξιωμάτων!

Όλες αυτές οι παρατηρήσεις έχουν ισχυρή βάση αλήθειας. Πράγματι, οποιαδήποτε μαθηματική θεωρία βασίζεται στις θεμελιώδεις (μη ορίσιμες) έννοιες και θεμελιώδεις (μη αποδείξιμες) προτάσεις απ΄ όπου με βάση τους θεμελιώδεις νόμους της λογικής αναδεικνύεται ο επιστημονικός πλούτος. Το σημαντικό είναι ότι μία μαθηματική θεωρία μπορεί να αποτελεί μέρος μίας ευρύτερης θεωρίας της οποίας τα αξιώματα να επιτρέπουν την κατασκευή συνόλων και συναρτήσεων που να ικανοποιούν τα αξιώματα της επι μέρους θεωρίας. Για παράδειγμα τα αξιώματα Peano για το $\mathbb{N}$ μπορούν να θεωρηθούν στο ευρύτερο πλαίσιο της θεωρίας συνόλων και εκεί είναι εφικτή η κατασκευή ενός συνόλου $\mathbb{N}$ και μίας $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ώστε να ικανοποιούνται τα αξιώματα Peano. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού βρίσκεται εκτός του πλαισίου και των στόχων του μαθήματος και για το λόγο αυτό θα δεχτούμε αξιωματικά ότι υπάρχει ένα ζεύγος $(\mathbb{N}, s)$ που ικανοποιεί τα αξιώματα Peano.

Κεφάλαιο 2

Ακέραιοι και Ρητοί

Έχοντας ολοκληρώσει την θεμελίωση των φυσικών αριθμών, ακολουθούν τα δύο επό- μενα βήματα που είναι οι ακέραιοι και οι ρητοί. Το πέρασμα από τους φυσικούς στους ακεραίους και εν συνεχεία στους ρητούς είναι φυσιολογικό. Θα παραθέσουμε δύο εναλλακτικούς ορισμούς για τα δύο συστήματα. Στο πρώτο μέρος οι ορισμοί είναι πιο αναμενόμενοι. Εν τούτοις υπάρχουν κάποιες ασάφειες, ειδικότερα στον ορισμό των ρητών. Στο δεύτερο μέρος οι ορισμοί στηρίζονται στην έννοια της σχέσης ισοδυναμίας και από άποψη μαθηματικής αυστηρότητας είναι σαφώς πιο ακριβείς. Εν τούτοις η κατ' αρχήν επαφή με αυτούς μπορεί να δημιουργήσει απλοϊκές αντιρρήσεις και αμφιβολίες.

2.1 Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των Ακεραίων

Για να ορίζουμε το σύνολο $\mathbb{Z}$ θα εισάγουμε ένα νέο σύνολο το $-\mathbb{N}$ που ορίζεται ως εξής

$$-\mathbb{N} = \{-n : n \in \mathbb{N}\}$$

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το $-\mathbb{N}$ αποτελείται από κάποια νέα σύμβολα που ορίζονται με χρήση των συμβόλων των φυσικών αριθμών. Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων ορίζεται ως εξής

$$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$$

όπου "0" είναι επίσης ένα νέο σύμβολο. Παρατηρούμε καταρχάς ότι το $\mathbb{N}$ είναι υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ και στο επόμενο βήμα θα επεκτείνουμε τις πράξεις και τη διάταξη του $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{Z}$, ορίζοντας την πρόσθεση " $+$ ", τον πολλαπλασιασμό " $\cdot$ " και τη διάταξη " $<$ ". Η επέκταση των πράξεων γίνεται με τη βοήθεια των πράξεων που έχουμε ήδη στο $\mathbb{N}$ και το ίδιο ισχύει για τη διάταξη. Στους ακόλουθους ορισμούς θα χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα $+_{\mathbb{N}}, \cdot_{\mathbb{N}}, <_{\mathbb{N}}$ για τις πράξεις και τη διάταξη στο $\mathbb{N}$ ώστε να μην δημιουργηθεί σύγχυση με τις αντίστοιχες του $\mathbb{Z}$.

ΠΡΟΣΘΕΣΗ

(i) Για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, $m + 0 = m$.

(ii) Για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$, $n + m = n +_{\mathbb{N}} m$.

(iii) Για κάθε $-m, -n \in -\mathbb{N}$, $(-n) + (-m) = -(n +_{\mathbb{N}} m)$

(iv) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $-n \in -\mathbb{N}$ θα ορίζουμε το $m + (-n)$ διακρίνοντας τις ακόλουθες περιπτώσεις:

α) Αν $n = m$, τότε $m + (-n) = 0$.

β) Αν $m >_{\mathbb{N}} n$, τότε από τις ιδιότητες της διάταξης των φυσικών αριθμών υπάρχει μοναδικό $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $m = n +_{\mathbb{N}} k$ και ορίζουμε $m + (-n) = k$.

γ) Αν $m <_{\mathbb{N}} n$, τότε υπάρχει μοναδικό $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n = m +_{\mathbb{N}} k$ και ορίζουμε $m + (-n) = -k$.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

(i) Για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, $m \cdot 1 = m$.

(ii) Για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, $m \cdot 0 = 0$.

(iii) Για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$, $m \cdot n = m \cdot_{\mathbb{N}} n$.

(iv) Για κάθε $-m, -n \in -\mathbb{N}$, $(-m) \cdot (-n) = m \cdot_{\mathbb{N}} n$.

(v) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $-n \in -\mathbb{N}$, $m \cdot (-n) = -(m \cdot_{\mathbb{N}} n)$.

ΔΙΑΤΑΞΗ

(i) Για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$, $n < m$ αν και μόνον αν $n <_{\mathbb{N}} m$.

(ii) Για κάθε $-m, -n \in -\mathbb{N}$, $(-m) < (-n)$ αν και μόνον αν $n <_{\mathbb{N}} m$.

(iii) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $-n \in -\mathbb{N}$, $-n < m$.

(iv) $-1 < 0 < 1$.

Από τους ορισμούς των πράξεων και της διάταξης είναι εύκολη η διαπίστωση των ακόλουθων ιδιοτήτων.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ

1 Το στοιχείο 0 αποτελεί το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης στο $\mathbb{Z}$, δηλαδή για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, $m + 0 = 0 + m = m$.

2 Για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ υπάρχει ο αντίθετός του $-m$ ώστε $m + (-m) = 0$. (Πράγματι αν $m \in \mathbb{N}$, τότε ο $-m$ έχει ορισθεί. Αν $m \in -\mathbb{N}$ με $m = -n$, τότε $-m = n$.)

3 Για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}$, $n + m = m + n$ (αντιμεταθετική).

4 Για κάθε $m, n, k \in \mathbb{Z}$, $n + (n + k) = (n + m) + k$ (προσεταιριστική).

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

1 Το στοιχείο 1 αποτελεί το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{Z}$, δηλαδή για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, $m \cdot 1 = 1 \cdot m = m$.

2 Για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \cdot m = m \cdot n$ (αντιμεταθετική).

3 Για κάθε $m, n, k \in \mathbb{Z}$, $n \cdot (n \cdot k) = (n \cdot m) \cdot k$ (προσεταιριστική).

ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Για κάθε $m, n, k \in \mathbb{Z}$, $k \cdot (n + m) = k \cdot m + k \cdot m$ (επιμεριστική).

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

1 Η διάταξη " $<$ " στο $\mathbb{Z}$ είναι ολική διάταξη.

1 Για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}$, $n < m$ αν και μόνο αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $m = n + k$.

2 Για κάθε $m, n, k \in \mathbb{Z}$, $n < m$ αν και μόνο αν $n + k < m + k$.

3 Για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}$ και $k \in \mathbb{N}$, $n < m$ αν και μόνο αν $n \cdot k < m \cdot k$.

4 Για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}$ και $k \in -\mathbb{N}$, $n < m$ αν και μόνο αν $n \cdot k > m \cdot k$.

Ορισμός 2.1. Έστω $(X, \leq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο και $A \subseteq X$. Ένα $y \in X$ καλείται άνω φράγμα (αντίστοιχα κάτω φράγμα) του A αν για κάθε $x \in A$ το $x \leq y$ (αντίστοιχα $x \geq y$). Ένα $y \in A$ καλείται μέγιστο (αντίστοιχα ελάχιστο) στοιχειο του A αν για κάθε $x \in A$ το $x \leq y$ (αντίστοιχα $x \geq y$).

Πρόταση 2.2. *Κάθε μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει μέγιστο.*

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$ μη κενό και άνω φραγμένο. Έστω B το σύνολο όλων των άνω φραγμάτων του A. Εφόσον το A άνω φραγμένο έπεται ότι B είναι μη κενό και συνεπώς λόγω της καλής διάταξης του $\mathbb{N}$ το B έχει ελάχιστο στοιχείο n_0. Για να δείξουμε ότι το n_0 αποτελεί μέγιστο στοιχείο για το A αρκεί να δείξουμε ότι $n_0 \in A$. Υποθέτουμε ότι $n_0 \notin A$. Τότε για κάθε $n \in A$, $n <_{\mathbb{N}} n_0$. Επόμένως για κάθε $n \in A$, $n \leq_{\mathbb{N}} n_0 - 1$. Τότε όμως $n_0 - 1 \in B$ που είναι άτοπο καθώς $n_0 - 1 <_{\mathbb{N}} n_0$ και n_0 το ελάχιστο στοιχείο του B. □

Πρόταση 2.3. *Ενα $A \subset \mathbb{Z}$ έχει ελάχιστο στοιχείο αν και μόνο αν το $-A = \{-n : n \in A\}$ έχει μέγιστο και μάλιστα ισχύει $\min(A) = -\max(-A)$.*

Απόδειξη. Έστω n_0 το ελάχιστο στοιχείο του A. Τότε το $-n_0 \in -A$. Αρκει να δείξουμε ότι ο n_0 αποτελεί άνω φράγμα του $-A$. Πράγματι, για κάθε $l = -k \in -A$ το $k \in A$ και $k \geq n_0$. Επομένως το $l = -k \leq -n_0$. Ομοίως αποδεικνύεται και η αντίστροφη φορά. □

Θεώρημα 2.4. *Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο, (αντίστοιχα κάτω φραγμένο) υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ έχει μέγιστο (αντίστοιχα ελάχιστο).*

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathbb{Z}$ μη κενό και άνω φραγμένο. Αν $A \cap \mathbb{N} \neq \varnothing$, τότε το $A \cap \mathbb{N}$ είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$, άρα από την Πρόταση 0.5 θα έχει μέγιστο, το οποίο θα είναι και μέγιστο του A. Αν το $A \cap \mathbb{N} = \emptyset$ τότε το $A \subseteq -\mathbb{N} \cup \{0\}$. Αν το $0 \in A$ τότε αποτελεί και μέγιστο για το A. Αλλιώς το $A \subseteq -\mathbb{N}$ και επομένως το $-A$ μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Από την καλή διάταξη του $\mathbb{N}$ έπεται ότι το $-A$ έχει ελάχιστο και από Πρόταση 2.3 το A έχει μέγιστο. □

2.2 Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των Ρητών

Οι ρητοί προκύπτουν από τους ακεραίους κατά φυσιολογικό τρόπο. Κατ' αρχάς ορίζουμε το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών. Το $\mathbb{Q}$ ορίζεται σαν ένα σύνολο νέων συμβόλων ως εξής:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \text{ και } q \in \mathbb{N} \right\}$$

Το $\frac{p}{q}$ είναι ένα νέο σύμβολο και όταν θα ορίσουμε τις πράξεις θα αναπαριστά τον αντίτοιχο ρητό όπως είναι αναμενόμενο να συμβεί. Μία ιδιαιτερότητα του $\mathbb{Q}$ είναι η ισότητα των στοιχείων του. Συνήθως όταν ορίζουμε ένα σύνολο προνοούμε τα στοιχεία που συμβολίζονται με διαφορετικά σύμβολα να είναι διάφορα μεταξύ τους. Αυτό δε συμβαίνει στο $\mathbb{Q}$ όπως το περιγράφουμε ανωτέρω. Έτσι υπάρχουν στοιχεία που ενώ είναι ίσα μεταξύ τους τους αντιστοιχούν διαφορετικά σύμβολα. Αυτό βεβαίως ισχύει και στους ρητούς όπως τους ορίζει κάποιος στις προπανεπιστημιακές σπουδές. (π.χ οι ρητοί $\frac{1}{2}$ και $\frac{2}{4}$ είναι ίσοι.) Επίσης πρέπει να παρατηρήσουμε ότι στο $\mathbb{Q}$ δεν έχουμε συμπεριλάβει όλους τους $\frac{p}{q}$ με $p, q \in \mathbb{Z}$ και $q \neq 0$. Ο λόγος είναι ότι αυτοί που έχουμε συμπεριλάβει επαρκούν για να περιγράψουμε το σύνολο των ρητών και επίσης μας επιτρέπουν να ορίσουμε τη διάταξη με πιο κομψό τρόπο. Στο $\mathbb{Q}$ η ισότητα, η διάταξη και οι πράξεις ορίζονται ως εξής:

ΙΣΟΤΗΤΑ

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} \Leftrightarrow p_1 q_2 = p_2 q_1$$

ΔΙΑΤΑΞΗ

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} \Leftrightarrow p_1 q_2 < p_2 q_1$$

ΠΡΟΘΕΣΗ

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$$

Ασκηση 2.1. Δείξτε ότι αν $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \mathbb{Q}$ ώστε $r_1 = r_3$ και $r_2 = r_4$, τότε

α. $r_1 + r_2 = r_3 + r_4$.

β. $r_1 \cdot r_2 = r_3 \cdot r_4$.

γ. $r_1 < r_2 \Leftrightarrow r_3 < r_4$.

Οι ιδιότητες των ακεραίων συνεπάγονται τις ακόλουθες ιδιότητες των πράξεων και της διάταξης στο $\mathbb{Q}$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ

(1) Για κάθε $r, s \in \mathbb{Q}$, $r + s = s + r$.

(2) Για κάθε $r, s, t \in \mathbb{Q}$, $r + (s + t) = (r + s) + t$.

(3) Υπάρχει ένα στοιχείο $0 \in \mathbb{Q}$ ώστε για κάθε $r \in \mathbb{Q}$, $0 + r = r$. (Το 0 αναπαρίσταται από οποιοδήποτε $\frac{0}{q}$ με $q \in \mathbb{N}$)

(4) Για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ υπάρχει ο αντίθετός του $-r \in \mathbb{Q}$ ώστε $r + (-r) = 0$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

(5) Για κάθε $r, s \in \mathbb{Q}$, $r \cdot s = s \cdot r$.

(6) Για κάθε $r, s, t \in \mathbb{Q}$, $r \cdot (s \cdot t) = (r \cdot s) \cdot t$.

(7) Υπάρχει ένα στοιχείο $1 \in \mathbb{Q}$ ώστε για κάθε $r \in \mathbb{Q}$, $1 \cdot r = r$.

(8) Για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ με $r \neq 0$ υπάρχει ο αντίστροφός του $r^{-1} \in \mathbb{Q}$ ώστε $r \cdot r^{-1} = 1$.

ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

(9) Για κάθε $r, s, t \in \mathbb{Q}$, $r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

(10) Η διάταξη "$<$" στο $\mathbb{Q}$ είναι ολική. Δηλαδή για κάθε $r, s \in \mathbb{Q}$, είτε $r = s$ ή $r < s$ ή $r > s$.

(11) Για κάθε $r, s, t \in \mathbb{Q}$, αν $r < s$ τότε $r + t < s + t$.

(12) Για κάθε $r, s, t \in \mathbb{Q}$, αν $r < s$ και $t > 0$ τότε $r \cdot t < s \cdot t$.

Παρατηρήσεις.

(i) Για $r \in \mathbb{Q}$ ο αντίστροφός του r^{-1} αναπαρίσταται ως εξής. Αν ο $r = \frac{p}{q}$ επειδή $r \neq 0$ έπεται ότι $p \neq 0$. (Ο q είναι διάφορος του 0 γιατί $q \in \mathbb{N}$). Τότε ο $r^{-1} = \frac{sgn(p) \cdot q}{|p|}$, όπου $sgn(p) = 1$ αν $p > 0$ αλλιώς $sgn(p) = -1$ και $|p| = p$ αν $p > 0$ αλλιώς $|p| = -p$.

(ii) Το $\mathbb{Q}$ σαν διατεταγμένο σύνολο διαφέρει σημαντικά από το $\mathbb{N}$ και το $\mathbb{Z}$. Η βασική διαφορά είναι ότι αν $r, s \in \mathbb{Q}$ με $r < s$ τότε υπάρχει $t \in \mathbb{Q}$ ώστε $r < t < s$. Για παράδειγμα $t = \frac{r+s}{2}$ ικανοποιεί την ιδιότητα. Ακριβέστερα υπάρχουν άπειροι ρητοί μεταξύ αυτών των r και s. Μία άλλη διαφορά είναι ότι τα άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{Q}$ δεν έχουν πάντοτε μέγιστο στοιχείο. π.χ. το σύνολο $A = \{r \in \mathbb{Q} : r < 0\}$ είναι άνω φραγμένο αλλά δεν έχει μέγιστο στοιχείο. Αντίστοιχα φαινόμενα εμφανίζονται για τα κάτω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{Q}$.

(iii) Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων και άρα το σύνολο των φυσικών περιέχονται στο $\mathbb{Q}$. Το $\mathbb{N}$ αναπαρίσταται από το σύνολο $\left\{\frac{p}{q} : \frac{p}{q} = \frac{p'}{1} \text{ για κάποιο } p' \in \mathbb{N}\right\}$ και το $\mathbb{Z}$ από το σύνολο $\left\{\frac{p}{q} : \frac{p}{q} = \frac{p'}{1} \text{ για κάποιο } p' \in \mathbb{Z}\right\}$. Στο εξής τα στοιχεία των $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ θα τα συμβολίζουμε με $p, m, k, \ldots$

Ασκηση 2.2. Δείξτε ότι αν $r < s$ ρητοί, τότε το σύνολο $\{t \in \mathbb{Q} : r < t < s\}$ είναι άπειρο σύνολο.

Ασκηση 2.3. Δείξτε ότι το σύνολο $\{r \in \mathbb{Q} : r < 1\}$ είναι άνω φραγμένο και ότι δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Πρόταση 2.5. *Ισχύουν τα ακόλουθα:*

α) Το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Q}$.

β) Για κάθε $r, t \in \mathbb{Q}$ με $r > 0$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $k \cdot r > t$.

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το α) αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ρητό r υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n ώστε $r < n$. Πράγματι έστω $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, όπου $p \in \mathbb{Z}$ και $q \in \mathbb{N}$. Αν $p \in -\mathbb{N} \cup \{0\}$ τότε $p \cdot 1 = p < 1 \leq q$ και από τον ορισμό της διάταξη στο $\mathbb{Q}$ έπεται ότι $r < 1$. Αν $p \in \mathbb{N}$, τότε $p \cdot 1 = p < p + 1 \leq (p + 1)q$. Από τον ορισμό της διάταξης στο $\mathbb{Q}$ έπεται ότι το $r < p + 1$.

Θα δείξουμε το β) με εις άτοπο απαγωγή. Έστω, λοιπόν, ότι υπάρχουν $r, t \in \mathbb{Q}$ με $r > 0$ τέτοιοι ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $k \cdot r < t$. Ισοδύναμα από τις ιδιότητες της διάταξης στο $\mathbb{Q}$ έχουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $k < t \cdot r^{-1}$, το οποίο είναι άτοπο καθώς από το α) έχουμε ότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο. $\square$

2.3 Εναλλακτικοί Ορισμοί των $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$

Στη συνέχεια θα δώσουμε δύο διαφορετικούς ορισμούς των ακεραίων $\mathbb{Z}$ και των ρητών $\mathbb{Q}$ οι οποίοι είναι αναμφίβολα πιο κομψοί και αποφεύγουν την διευρημένη έννοια της ισότητας που ήδη συζητήσαμε στο $\mathbb{Q}$. Ο λόγος που δεν τους παρουσιάσαμε εξαρχής είναι ότι χρησιμοποιούν πιο προχωρημένη μαθηματική τεχνολογία και πιθανόν να ξενίζουν τον μη εξοικειωμένο αναγνώστη. Και οι δύο ορισμοί στηρίζονται στις σχέσεις ισοδυναμίας και τις εξ' αυτών οριζόμενες κλάσεις ισοδυναμίας. Η σχέση ισοδυναμίας είναι ένα εργαλείο ταξινόμησης με ευρεία χρήση στα μαθηματικά και συναφείς επιστήμες.

2.3.1 Σχέσεις Ισοδυναμίας

Ορισμός 2.6. Έστω X μή κενό σύνολο. Μία σχέση ισοδυναμίας στο X είναι μία διμελής σχέση " $\sim$ " που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Για κάθε $x \in X$, $x \sim x$.

(ii) Για κάθε $x, y \in X$, $x \sim y \Rightarrow y \sim x$.

(iii) Για κάθε $x, y, z \in X$, $x \sim y$ και $y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Το πλέον άμεσο παράδειγμα μίας σχέσης ισοδυναμίας είναι η ισότητα. Η ιδιότητα (i) του ορισμού συνεπάγεται ότι η οποιαδήποτε σχέση ισοδυναμίας σ' ένα σύνολο X επεκτείνει την ισότητα του X, δηλαδή για κάθε σχέση ισοδυναμίας το $x = x$ συνεπάγεται $x \sim x$. Το περιεχόμενο του ορισμού είναι ότι επιτρέπει να ταυτίσουμε αντικείμενα τα οποία αν και διαφορετικά ικανοποιούν κάποιες κοινές ιδιότητες. Τέτοιου είδους ταυτίσεις είναι συνήθεις στην κοινωνία, την επιστήμη και αλλού και επιτρέπουν την ταξινόμηση και κατανόηση πολύπλοκων συστημάτων. Για παράδειγμα η διμελής σχέση μεταξύ των ανθρώπων ο $a \sim b$ αν και μόνο αν οι a, b έχουν τους ίδιους γονείς είναι μία σχέση ισοδυναμίας. Οι ταυτίσεις που υπάρχουν μεταξύ ισοδύναμων αντικειμένων περιγράφονται από τις κλάσεις ισοδυναμίας που ορίζονται ως εξής.

Ορισμός 2.7. Έστω X μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με μία σχέση ισοδυναμίας " $\sim$ " και $x \in X$. Η κλάση ισοδυναμίας του x συμβολίζεται με $[x]$ και είναι:

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\}$$

Πρόταση 2.8. *Έστω X μη κενό σύνολο και " $\sim$ " σχέση ισοδυναμίας στο X. Τότε για κάθε $x, y \in X$ ένα από τα επόμενα συμβαίνει*
είτε $[x] = [y]$
ή $[x] \cap [y] = \emptyset$.
Κατά συνέπεια η οικογένεια υποσυνόλων του X $\{[x] : x \in X\}$ ορίζει μία πλήρης διαμέριση του X σε ξένα ανα δύο σύνολα.

Απόδειξη. Έστω $x, y \in X$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $z \in [x] \cap [y]$. Θα δείξουμε ότι $[x] = [y]$. Προς τούτο αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $w \in [x]$ ισχύει ότι $w \in [y]$ και αντίστροφα. Πράγματι έστω $w \in [x]$. Τότε $x \sim w$ και επειδή $z \in [x]$ έχουμε ομοίως ότι $z \sim x$. Από την ιδιότητα (iii) του ορισμού της σχέσης ισοδυναμίας προκύπτει ότι $z \sim w$. Εν συνεχεία χρησιμοποιώντας ότι $z \in [y]$ συμπεραίνουμε ότι $w \sim y$ και άρα $w \in [y]$. Χρησιμοποιώντας τα ίδια επιχειρήματα δείχνουμε ότι αν $w \in [y]$ τότε $w \in [x]$ και άρα η πρόταση αποδείχτηκε. $\square$

Ορισμός 2.9. Αν X ένα μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με μία σχέση ισοδυναμίας " sin ", τότε ορίζουμε ως χώρο πηλίκο το σύνολο $X/\sim = \{[x] : x \in X\}$. Επίσης αν $[x] \in X/\sim$ τότε κάθε $y \in [x]$ καλείται εκπρόσωπος της κλάσης $[x]$.

Παραδείγμα. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε στο $\mathbb{N}$ την " $\sim_m$ " σχέση ισοδυναμίας ως εξής. Αν $k, l \in \mathbb{N}$, $k \sim_m l$ αν υπάρχει $v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ με $0 \leq v < m$ και $p_1, p_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ώστε $k = p_1 m + v$ και $l = p_2 m + v$. Είναι εύκολο να δούμε ότι " $\sim_m$ " είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{N}$. Επίσης εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\mathbb{N}/\sim_m = \big\{[0], [1], \ldots, [m-1]\big\}$$

όπου $[1] = \{1, m+1, 2m+1, 3m+1, \ldots\}$ και γενικά για κάθε $j = 1, \ldots, m$

$$[j] = \big\{j + m \cdot l : l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\big\}$$

Επίσης ας παρατηρήσουμε ότι $[1] = [m+1] = [2m+1] = \ldots$ και γενικότερα για κάθε $j = 1, \ldots, m$ και $n \in [j]$ έχουμε ότι $[j] = [n]$.

2.4 Η συμβατότητα πράξεων και διάταξης με σχέση ισοδυναμίας

Ορισμός 2.10. Έστω X μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με μία σχέση ισοδυναμίας $\sim$ ".

(i) Αν " $*$ " είναι μία πράξη στο X θα λέμε ότι οι " $*$ " και " $\sim$ " είναι συμβατές αν ισχύει το ακόλουθο. Για κάθε x, x', y, y' στο X ώστε $x \sim x'$ και $y \sim y'$ ισχύει $x * y \sim x' * y'$.

(ii) Αν " $<$ " είναι μία διάταξη στο X θα λέμε ότι οι " $<$ " και " $\sim$ " είναι συμβατές αν ισχύει το ακόλουθο:
Για κάθε x, x', y, y' στο X ώστε $x \sim x'$ και $y \sim y'$ ισχύει $x < y \Leftrightarrow x' < y'$.

Πρόταση 2.11. *Έστω X μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με μία πράξη " $*$ " και μία σχέση ισοδυναμίας " $\sim$ " που είναι συμβατές μεταξύ τους. Τότε η " $*$ " επάγει μία πράξη " $*$ " στο χώρο πηλίκο $X/\sim$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε την πράξη $*$ στον X ως εξής: $[x] * [y] = [x * y]$. Το μόνο που πρέπει να ελέγξουμε είναι ότι η $*$ είναι καλά ορισμένη. Για να είναι καλά ορισμένη η πράξη $*$ στον $X/\sim$ πρέπει να αποδείξουμε ότι το αποτέλεσμα της πράξης είναι ανεξάρτητο από τους εκπροσώπους των κλάσεων $[x], [y]$ που χρησιμοποιούμε για να ορίσουμε το αποτέλεσμα της πράξης. Πράγματι, έστω $x' \in [x]$ και $y' \in [y]$. Τότε από την συμβατότητα των $*$ και $\sim$ προκύπτει ότι $x * y \sim x' * y'$ και άρα $[x * y] = [x' * y']$. □

Ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει και για την διάταξη.

Πρόταση 2.12. *Αν σ' ένα μη κενό σύνολο υπάρχουν μία διάταξη $<$ και μία σχέση ισοδυναμίας $\sim$ συμβατές μεταξύ τους, τότε η $<$ επάγει μία διάταξη στο $X/\sim$.*

Απόδειξη. Για $[x], [y]$ στο $X/\sim$ ορίζουμε $[x] < [y]$ αν $x < y$. Το ότι η διάταξη είναι καλά ορισμένη αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο όπως προηγουμένως. □

2.5 Εναλλακτικός ορισμός του $\mathbb{Z}$

Έχοντας ορίσει το $\mathbb{N}$, το $\mathbb{Z}$ μπορεί να προκύψει από το $\mathbb{N}$ ακολουθώντας τα επόμενα βήματα. Θα θεωρήσουμε το σύνολο $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ όπου $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n,m) : n,m \in \mathbb{N}\}$ το σύνολο των διατεταγμένων ζευγαριών φυσικών αριθμών. Δηλαδή το (n,m) αποτελεί ένα διατεταγμένο ζευγάρι όπου $(n,m) = (n',m') \Leftrightarrow n = n'$ και $m = m'$. Στο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ θα ορίσουμε πρόσθεση, πολλαπλασιασμό και διάταξη. Αυτά θα ορισθούν με χρήση των αντίστοιχων του $\mathbb{N}$. Επιπλέον θα ορίσουμε μία σχέση ισοδυναμίας η οποία θα είναι συμβατή με τις πράξεις και τη διάταξη. Το $\mathbb{Z}$ θα είναι το $\mathbb{N}^2 / \sim$ με τις επαγόμενες πράξεις και διάταξη. Ας δούμε πιο προσεκτικά τα βήματα που περιγράψαμε.

2.5.1 Ορισμοί πράξεων και διάταξης στο $\mathbb{N}^2$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ:

$$(m,n) + (k,l) = (m+k, n+l)$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ:

$$(m,n) \cdot (k,l) = (mk+nl, ml+nk)$$

ΔΙΑΤΑΞΗ:

$$(m,n) < (k,l) \Leftrightarrow m+l < n+k$$

Πιθανόν οι παραπάνω ορισμοί να φαίνονται περίεργοι και ίσως ακατανόητοι. Όμως είναι φυσιολογικοί αν φανταστούμε ότι ο στόχος μας είναι το διατεταγμένο ζευγάρι (m,n) να αναπαριστά τον ακέραιο $m-n$. Με αυτή την αντιστοιχία είναι εύκολο να ελεχθεί ότι οι πράξεις και η διάταξη είναι φυσιολογικά ορισμένες.

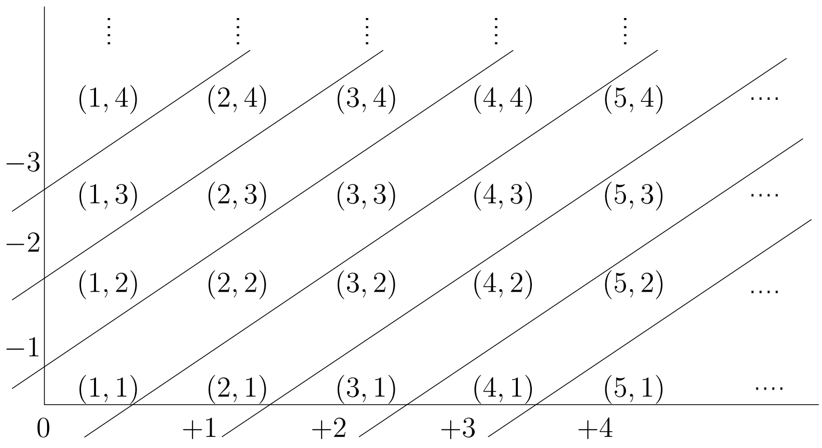
2.5.2 Ορισμός της σχέσης ισοδυναμίας στο $\mathbb{N}^2$

Στο $\mathbb{N}^2$ ορίζουμε $(m,n) \sim (k,l)$ αν $m+l = n+k$. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{N}^2$. Επομένως ορίζεται ο χώρος πηλίκο $\mathbb{N}^2 / \sim$. Στο επόμενο σχήμα περιγράφονται οι κλάσεις ισοδυναμίας στο $\mathbb{N}^2$.

Πρόταση 2.13. *Οι πράξεις $+, \cdot$ στο $\mathbb{N}^2$ καθώς και η διάταξη $<$ είναι συμβατές με τη σχέση ισοδυναμίας.*

Η απόδειξη ότι η πρόσθεση και η διάταξη είναι συμβατές με την $\sim$ είναι εύκολες. Πιο πολύπλοκη είναι η απόδειξη για τον πολλαπλασιασμό. Η απόδειξη της πρότασης αφήνεται στον αναγνώστη.

Το σύνολα $\mathbb{Z}$ είναι ο χώρος πηλίκο $\mathbb{N}^2 / \sim$ εφοδιασμένο με τις πράξεις και τη διάταξη που ορίσαμε στο $\mathbb{N}^2$.



Σχόλια: Ο ορισμός που παραθέσαμε δημιουργεί κάποια εύλογα ερωτήματα που αξίζει να συζητήσουμε.

(α) Κατ' αρχάς ο ορισμός του συνόλου $\mathbb{Z} = \{[(m,n)] : m,n \in \mathbb{N}\}$ εμφανίζεται χαοτικός ως προς τη διάταξη των στοιχείων του. Εν τούτοις όπως εμφανίζεται από το προηγούμενο σχήμα, όπου κάθε κλάση ισοδυναμίας περιγράφεται από μία διαγώνια λωρίδα, ισχύει το ακόλουθο που η απόδειξή του αφήνεται στον αναγνώστη.

Λήμμα 2.14. *Για κάθε $m,n \in \mathbb{N}$, ένα από τα τρία επόμενα ισχύει:*

(i) $(m,n) \sim (1,1)$.

(ii) *Υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $(m,n) \sim (k,1)$.*

(iii) *Υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $(m,n) \sim (1,k)$.*

Αυτό επιτρέπει να περιγράψουμε το $\mathbb{Z}$ ως εξής:

$$\mathbb{Z} = \big\{[(1,k)] : k \in \mathbb{N} \text{ και } k > 1\big\} \cup \big\{[(1,1)]\big\} \cup \big\{[(k,1)] : k \in \mathbb{N} \text{ και } k > 1\big\}$$

Είναι σαφές ότι το πρώτο σύνολο αντιπροσωπεύει το $-\mathbb{N}$, η κλάση $[(1,1)]$ είναι το 0 ενώ το τρίτο σύνολο είναι το $\mathbb{N}$. Με την προηγούμενη αναπαράσταση ο αριθμός 1 αντιστοιχεί στην κλάση $[(2,1)]$ και ο -1 στην $[(1,2)]$.

(β) Επίσης πρέπει να σημειώσουμε το ότι κάθε ακέραιος αναπαρίσταται από μία κλάση ισοδυναμίας και άρα από ένα υποσύνολο του $\mathbb{N}^2$ δεν πρέπει να ξενίζει. Εν γένει στα σύγχρονα μαθηματικά όταν ορίζουμε μία μαθηματική δομή, δηλαδή ένα σύνολο με κάποιες πράξεις και σχέσεις, το κυρίαρχο είναι η σχέση μεταξύ των στοιχείων και δεν ενδιαφέρει καθόλου η φύση των στοιχείων. Το ότι θεωρούμε τους ακέραιους σαν τις κλάσεις $[(m,1)]$ ή $[(1,m)]$ ή $[(1,1)]$ και όχι $(m,1)$, $(1,m)$, $(1,1)$ οφείλεται στο ότι οι πράξεις όπως τις ορίσαμε δεν αντιστοιχούν το άθροισμα των εκπροσώπων που έχουμε επιλέξει σε αντίστοιχο εκπρόσωπο. Για παράδειγμα, για κάθε $m > 1$, $(1,m) + (m,1) = (m+1, m+1)$ και όχι $(1,1)$.

2.6 Εναλλακτικός ορισμός του $\mathbb{Q}$

Ο ορισμός του συνόλου των ρητών με χρήση σχέσης ισοδυναμίας είναι παρόμοιος με τον αντίστοιχο των ακεραίων. Σε αυτή την περίπτωση ο ορισμός είναι σχεδόν ο ίδιος με αυτόν που έχουμε ήδη παραθέσει. Η μόνη διαφορά είναι η ισότητα, που ήδη έχουμε αναφέρει, και όπως παρατηρήσαμε παρουσιάζει την ιδιομορφία να ταυτίζει στοιχεία με διαφορετικό συμβολισμό. Στην εναλλακτική προσέγγιση θα είναι, αυτό που πρέπει να είναι, μία σχέση ισοδυναμίας. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \big\{(p, q) : p \in \mathbb{Z} \text{ και } q \in \mathbb{N}\big\}$$

και ορίζουμε την ακόλουθη σχέση ισοδυναμίας.

$$(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2) \Leftrightarrow p_1 q_2 = p_2 q_1$$

Οι πράξεις και η διάταξη στο $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ορίζονται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που έχουν ήδη ορισθεί στο προηγούμενο ορισμό του $\mathbb{Q}$. Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.15. *Οι πράξεις $+, \cdot$ στο $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ καθώς και η διάταξη $<$ είναι συμβατές με τη σχέση ισοδυναμίας.*

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ είναι ο χώρος πηλίκο $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \big/ \sim$ εφοδιασμένος με τις πράξεις και τη διάταξη που επάγονται από το $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

Σχόλιο: Όπως και στην περίπτωση του εναλλακτικού ορισμού του $\mathbb{Z}$, τα στοιχεία του $\mathbb{Q}$, που ορίζεται εναλλακτικά σαν χώρος πηλίκο του $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, είναι υποσύνολα του $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Η βασική διαφορά αυτού του ορισμού του $\mathbb{Q}$ από τον αρχικό που είχαμε δώσει είναι ότι εδώ η ισότητα είναι ακριβής, δηλαδή κάθε στοιχείο είναι ίσο μόνο με τον εαυτό του.

Κεφάλαιο 3

Οι πραγματικοί αριθμοί

Στα δύο προηγούμενα κεφάλαια έχουμε εισάγει τους φυσικούς αριθμούς $\mathbb{N}$, τους ακεραίους $\mathbb{Z}$ και τους ρητούς $\mathbb{Q}$. Ειδικότερα, οι φυσικοί αριθμοί είναι το πρωτογενές αντικείμενο, την ύπαρξη του οποίου δεχόμαστε αξιωματικά, ενώ οι ακέραιοι και οι ρητοί προκύπτουν από αυτό. Επίσης, υπάρχουν οι φυσιολογικοί εγκλεισμοί του $\mathbb{N}$ ως υποδομή του $\mathbb{Z}$ και οι φυσιολογικοί εγκλεισμοί του $\mathbb{Z}$ ως υποδομή του $\mathbb{Q}$. Στο παρόν κεφάλαιο θα ορίσουμε τους πραγματικούς αριθμούς, $\mathbb{R}$, που αποτελούν την πλήρωση των ρήτων και ο ορισμός τους απασχόλησε επί μακρόν τους μαθηματικούς. Η συνήθης περιγραφή των πραγματικών αριθμών είναι η ταύτισή τους με τα σημεία μίας ευθείας γραμμής. Ενώ αυτό που τους διακρίνει από τους ρητούς αριθμούς είναι η πληρότητά τους ως προς την ύπαρξη ριζών θετικών αριθμών (π.χ το $\sqrt{2}$ που είναι πραγματικός, δεν είναι ρητός), καθώς και η ύπαρξη αριθμών όπως e, π που παίζουν θεμελιώδη ρόλο στα μαθηματικά.

Ή πορεία που θα ακολουθήσουμε για τον ορισμό των πραγματικών αριθμών είναι πλήρως αναλυτική. Στο πρώτο μέρος θα προσδιορίσουμε τις βασικές ιδιότητες των πράξεων και της διάταξης και θα μελετήσουμε τις συνέπειες τους στη δομή του $\mathbb{R}$. Στο δεύτερο μέρος θα περογράψουμε πώς ένα σύνολο που ικανοποιεί αυτές τις ιδιότητες προκύπτει από το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών.

3.1 Ορισμός των πραγματικών αριθμών

Οι πραγματικοί αριθμοί είναι ένα σύνολο $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με δύο πράξεις, την πρόσθεση "$+$", τον πολλαπλασιασμό "$\cdot$" και μία διάταξη "$<$", που ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ

(i) Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta = \beta, \alpha$. (Αντιμεταθετική)

(ii) Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$. (Προσεταιριστική)

(iii) Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο το 0, το οποίο για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$.

(iv) Για κάθε πραγματικό αριθμό υπάρχει ο αντίθετός του, δηλαδή για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ υπάρχει $\beta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\alpha + \beta = 0$ και το συμβολίζουμε με $-\alpha$.

Με τη χρήση των ιδιοτήτων (i) – (iv) προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες. Η απόδειξή τους αφήνεται σαν άσκηση.

Πρόταση 3.1. *Ισχύουν τα ακόλουθα:*

(α) Το 0 είναι το μοναδικό στοιχείο x του $\mathbb{R}$ που ικανοποιεί $\alpha + x = \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

(β) Κάθε στοιχείο α στο $\mathbb{R}$ έχει μοναδικό αντίθετο.

(γ) Η εξίσωση $x + \alpha = \beta$ έχει μοναδική λύση $x = \beta + (-\alpha) = \beta - \alpha$.

(δ) Για κάθε α, β, γ στο $\mathbb{R}$ $\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

(v) Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\beta = \beta\alpha$. (Αντιμεταθετική)

(vi) Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$. (Προσεταιριστική)

(vii) Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο το 1, με $1 \neq 0$, το οποίο για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει $\alpha 1 = 1\alpha = \alpha$.

(viii) Για κάθε μη μηδενικό πραγματικό αριθμό υπάρχει ο αντίστροφός του, δηλαδή για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$ υπάρχει $\beta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\alpha\beta = 1$ και το συμβολίζουμε με α^{-1}.

Όπως στην περίπτωση της πρόσθεσης, οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού συνεπάγονται επί πλέον ιδιότητες που περιγράφονται από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.2. *Ισχύουν τα ακόλουθα:*

(α) Το 1 είναι το μοναδικό στοιχείο του $\mathbb{R}$ που ικανοποιεί $\alpha \cdot 1 = \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

(β) Κάθε στοιχείο α στο $\mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, έχει μοναδικό αντίστροφο.

(γ) Η εξίσωση $\alpha \cdot x = \beta$ με $\alpha \neq 0$ έχει μοναδική λύση $x = \beta \cdot (\alpha)^{-1} = \frac{\beta}{\alpha}$.

(δ) Για κάθε α, β, γ στο $\mathbb{R}$ με $\gamma \neq 0$, $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Η επόμενη ιδιότητα είναι κρίσιμη γιατί συνδέει τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

(ix) Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \beta\gamma$.

Πρόταση 3.3. *Ισχύουν τα ακόλουθα:*

(α) *Για κάθε* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot 0 = 0$.

(β) *Το* 0 *δεν έχει αντίστροφο.*

(γ) *Αν για* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha \cdot \beta = 0$, *τότε είτε* $\alpha = 0$ *ή* $\beta = 0$.

(δ) $(-\alpha) + (-\beta) = -(\alpha + \beta)$ *για κάθε* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(ϵ) $(-\alpha) \cdot \beta = -(\alpha \cdot \beta)$ *για κάθε* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(στ) $(-\alpha) \cdot (-\beta) = \alpha \cdot \beta$ *για κάθε* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

Η διάταξη στους πραγματικούς ικανοποιεί τις γενικές ιδιότητες της διάταξης που περιγράφονται που περιγράφονται στον ορισμό της διαταξης των φυσικών (Κεφάλαιο 1, ορισμός 1.9). Επιπλέον, η διάταξη ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(x) Η διάταξη είναι ολική (γραμμική), δηλαδή
αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είτε $\alpha < \beta$ είτε $\alpha = \beta$ είτε $\alpha > \beta$.

(xi) Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha < \beta$ τότε $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$.

(xii) Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha < \beta$, $\gamma > 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$.

Οι ιδιότητες (x) – (xii) συνδέουν την διάταξη με τις πράξεις και αυτό έχει σημαντικές συνέπειες για τη δομή των πραγματικών αριθμών.

Η επόμενη πρόταση περιγράφει κάποιες από τις επιπλέον ιδιότητες που προκύπτουν από τη σχέση της διάταξης με τις πράξεις. Η απόδειξη αφήνεται στον αναγνώστη.

Πρόταση 3.4. *Ισχύουν τα ακόλουθα:*

(α) *Αν* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ *με* $\alpha > \beta$, $\gamma > \delta$ *τότε* $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

(β) $\alpha > 0 \Leftrightarrow -\alpha < 0$ *για κάθε* $\alpha \in \mathbb{R}$.

(γ) $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$ *για κάθε* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(δ) *Αν* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *με* $\alpha < 0$ *και* $\beta < 0$, *τότε* $\alpha \cdot \beta > 0$.

(ϵ) $1 > 0$ *και* $\alpha + 1 > \alpha$ *για κάθε* $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.2 Οι φυσικοί αριθμοί σαν υποδομή του $\mathbb{R}$

Μία από τις γνωστές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών είναι ότι περιέχουν σαν υποδομές (υποσυστήματα) τους φυσικούς, ακεραίους και ρητούς. Οι ιδιότητες των πράξεων και της διάταξης, που έχουμε παραθέσει μέχρι αυτό το σημείο, επιτρέπουν να υλοποιήσουμε τα προηγούμενα αριθμητικά συστήματα σαν υποδομές του $\mathbb{R}$. Το βασικό βήμα αφορά το σύνολο των φυσικών $\mathbb{N}$.

Ορισμός 3.5. Ένα υποσύνολο $\mathcal{A}$ του $\mathbb{R}$ λέγεται επαγωγικό αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες.

(1) $1 \in \mathcal{A}$.

(2) Για κάθε $\alpha \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι $\alpha + 1 \in \mathcal{A}$.

Πριν διατυπώσουμε την επόμενη πρόταση αξίζει να εξηγήσουμε την έννοια της οικογένειας συνόλων $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$. Εν γένει αυτό σημαίνει ότι έχουμε δώσει «ονόματα» που προέρχονται από ένα σύνολο I σε κάποια σύνολα. Η έννοια αύτή γενικεύει την έννοια της ακολουθίας συνόλων $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ όπου τα «ονόματα» προέρχονται από το σύνολο $\mathbb{N}$. Σε πιο τυπική διατύπωση η οικογένεια $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ είναι μία απεικόνιση $\phi : I \to \mathcal{U}$, όπου $\mathcal{U}$ είναι ένα σύνολο που τα στοιχεία του είναι επίσης σύνολα. Δοθείσης της συνάρτησης ϕ, θέτουμε $\mathcal{A}_i = \phi(i)$ για κάθε $i \in I$. Ο ορισμός αυτός είναι η επέκταση του ορισμού της ακολουθίας, όπου $I = \mathbb{N}$. Ένας από τους λόγους που είμαστε υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε τις οικογένειες είναι ότι οι φυσικοί αριθμοί δεν επαρκούν πάντοτε για να δώσουμε διακριτά ονόματα σε οικογένειες μαθηματικών αντικειμένων. Αυτό οφείλεται στο ότι υπάρχουν υπεραριθμήσιμα σύνολα, κάτι που θα συζητήσουμε αργότερα στο κεφάλαιο αυτό. Ένα παράδειγμα μιας οικογένειας συνόλων είναι τα σύνολα $(I_x)_{x\in\mathbb{R}}$, όπου για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $I_x = [x, \infty)$. Όπως θα δούμε η οικογένεια $(I_x)_{x\in\mathbb{R}}$ δεν μπορεί να γραφεί σαν ακολουθία συνόλων.

Πρόταση 3.6. *Έστω $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ μία οικογένεια επαγωγικών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, τότε η τομή $\cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ είναι επαγωγικό σύνολο.*

Απόδειξη. Όπως είναι γνωστό η τομή $\cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ είναι το υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που περιέχει όλα τα κοινά στοιχεία των $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$. Επομένως, $1 \in \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$. Αν $x \in \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$, τότε $x \in \mathcal{A}_i$ για κάθε $i \in I$ και δεδομένου ότι κάθε $\mathcal{A}_i$ είναι επαγωγικό προκύπτει ότι $x + 1 \in \mathcal{A}_i$ για κάθε $i \in I$, το οποίο συνεπάγεται ότι $x + 1 \in \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$. Άρα, η τομή $\cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ είναι επαγωγικό σύνολο. □

Άμεση συνέπεια του προηγουμένου είναι το ακόλουθο.

Πόρισμα 3.7. *Υπάρχει το ελάχιστο επαγωγικό σύνολο. Δηλαδή, υπάρχει $\mathcal{A}_0$ υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που είναι επαγωγικό και περιέχεται σε κάθε άλλο επαγωγικό σύνολο.*

Απόδειξη. Θέτουμε $\mathcal{A}_0 = \cap\{\mathcal{A} : \ \mathcal{A} \text{ επαγωγικό σύνολο}\}$. Είναι άμεσο ότι το σύνολο $\mathcal{A}_0$ περιέχεται σε κάθε επαγωγικό σύνολο $\mathcal{A}$. □

Παρατηρήση. Είναι άμεσο ότι το σύνολο $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R} : \ \ 1 \leq x\}$ είναι επαγωγικό σύνολο. Άρα το σύνολο $\mathcal{A}_0$ έχει το 1 σαν ελάχιστο στοιχείο. Επίσης, επειδή το $\mathcal{A}_0$ είναι επαγωγικό, για κάθε $x \in \mathcal{A}_0$ έπεται ότι $x + 1 \in \mathcal{A}_0$.

Ορισμός 3.8. Ορίζουμε $s : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_0$ με τον κανόνα $s(x) = x + 1$.

Πρόταση 3.9. *Το ζευγάρι $(\mathcal{A}_0, s)$ ικανοποιεί τα αξιώματα Peano και άρα ταυτίζεται με τους φυσικούς αριθμούς.*

Απόδειξη. Πράγματι, η συνάρτηση s είναι $1-1$ και επίσης $1 \neq s(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{A}_0$. Επίσης, το ζευγάρι $(\mathcal{A}_0, s)$ ικανοποιεί το αξίωμα της επαγωγής, διότι κάθε υποσύνολο V του $\mathcal{A}_0$ που ικανοποιεί τις υποθέσεις του αξιώματος είναι επαγωγικό και άρα θα ταυτίζεται με το $\mathcal{A}_0$ καθώς αυτό είναι το ελάχιστο επαγωγικό σύνολο και άρα $\mathcal{A}_0 \subset V$. □

Παρατηρήση. Η πράξη της πρόσθεσης που ορίζεται από την s στο $\mathcal{A}_0$ ταυτίζεται με την πρόσθεση που προυπάρχει στο $\mathcal{A}_0$ σαν υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Το ίδιο συμβαίνει με τον πολλαπλασιασμό που επάγει η s στο $\mathcal{A}_0$ και με τη διάταξη του $\mathcal{A}_0$. Άρα, το $\mathcal{A}_0$ με τις πράξεις και τη διάταξη που επάγονται από το $\mathbb{R}$ ταυτίζεται με τους φυσικούς αριθμούς και στο εξής θα το συμβολίζουμε με $\mathbb{N}$.

Τα επόμενα αποδεικνύονται εύκολα.

Πρόταση 3.10. *(i) Το υποσύνολο $\mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}$ του $\mathbb{R}$ με τις πράξεις και τη διάταξη που επάγονται από το $\mathbb{R}$ ταυτίζεται με το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$.*

(ii) Το σύνολο $\{\frac{p}{q} : \ \ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$ ταυτίζεται με το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$.

Η προηγούμενη πρόταση εξηγεί ότι οι ακέραιοι και οι ρητοί είναι επίσης υποδομές του $\mathbb{R}$. Επίσης, αξίζει να σημειώσουμε ότι οι ιδιότητες που έχουμε παραθέσει μέχρι στιγμής ισχύουν όλες για το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ και κατά συνέπεια δεν μπορούν να διαφοροποιήσουν τους πραγματικούς αριθμούς από τους ρητούς. Για παράδειγμα, δεν μπορούν να εξασφαλίσουν την ύπαρξη του αριθμού $\sqrt{2}$. Ο ορισμός του $\mathbb{R}$ επιτυγχάνεται με την εισαγωγή της ιδιότητας της πληρότητας που ακολουθεί.

3.3 Η ιδιότητα της πληρότητας του $\mathbb{R}$

Το $\mathbb{R}$ έχει επιπλέον την ιδιότητα της πληρότητας, η διατύπωση της οποίας απαιτεί τους ορισμούς που ακολουθούν.

Ορισμός 3.11. Έστω $A \subset \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$. Το x καλείται άνω φράγμα του A αν για κάθε $y \in A$ ισχύει $y \leq x$.

Παρατηρήση. Έστω $A \subset \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$ ώστε το x άνω φράγμα του A. Τότε κάθε $x' > x$ είναι άνω φράγμα του A, λόγω της μεταβατικότητας της "$<$".

Ορισμός 3.12 (Supremum (ελάχιστο άνω φράγμα) του A)**.** Έστω $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ και $s \in \mathbb{R}$. Το s καλείται supremum του A (supA) αν ικανοποιει τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) Το s είναι άνω φράγμα του A.

(ii) Για κάθε s' άνω φράγμα του A έχουμε $s \leq s'$.

Η επόμενη πρόταση είναι άμεση συνέπεια του ορισμού.

Πρόταση 3.13. *Έστω $A \subset \mathbb{R}$. Αν υπάρχει το $\sup A$ τότε αυτό είναι μοναδικό.*

Παρατηρήση. Το supremum ενός συνόλου A μπορεί να ανήκει στο A (π.χ για A=$[0,1]$, τότε $\sup A = 1$ και $1 \in A$). σε αυτή την περίπτωση το supA ταυτίζεται με το maximum του A (maxA). Σε άλλες περιπτώσεις, το supA, αν υπάρχει, δεν ανήκει στο A. Για παράδειγμα, αν $A = (0,1)$ και δεχθούμε ότι υπάρχει το supA= s, τότε το s δεν ανήκει στο A. Είναι εύκολο να δούμε ότι κανένα στοιχείο του $(0,1)$ δεν είναι ανω φράγμα του $(0,1)$.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ $\mathbb{R}$

(xiii) Κάθε μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει supremum.

Η επόμενη πρόταση δίνει ένα χρήσιμο χαρακτηρισμό του supremum ενός άνω φραγμένου υποσυνόλου του $\mathbb{R}$.

Πρόταση 3.14. *Έστω A ένα μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

1. *Το s είναι το supremum του A.*
2. *(α) Το s είναι ανω φράγμα του A.*

   (β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $s - \varepsilon < x \leq s$.

Απόδειξη. $1 \Rightarrow 2$
Από τον ορισμό του supremum, αν $s = \sup A$, τότε το s είναι ανω φράγμα του A και άρα η $2(\alpha)$ ισχύει. Επίσης, επειδή το s είναι το ελάχιστο άνω φράγμα έπεται ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, το $s - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα και άρα υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $s - \varepsilon < x$. Από το $2(\alpha)$ $x \leq s$ και άρα η $2(\beta)$ ισχύει.
$2 \Rightarrow 1$
Το $2(\alpha)$ εξασφαλίζει ότι το s είναι ανω φράγμα και το $2(\beta)$ εξασφαλίζει ότι κάθε $s' < s$ δεν είναι ανω φράγμα του A, άρα το s είναι το ελάχιστο άνω φράγμα, δηλαδή $s = \sup A$. $\square$

Παρατηρήση. Ας παρατηρήσουμε ότι η ιδιότητα της πληρότητας του $\mathbb{R}$ είναι αποκλειστική ιδιότητα της διάταξης. Εντούτοις, έχει σημαντικές συνέπειες για την αλγεβρική, συνολοθεωρητική και τοπολογική δομή του $\mathbb{R}$. Για παράδειγμα, μας εξασφαλίζει την ύπαρξη των ριζών και των υπερβατικών αριθμών.

3.3.1 Το Infimum υποσυνόλων του $\mathbb{R}$

Ορισμός 3.15 (Infimum (μέγιστο κάτω φράγμα) του A). Έστω $A \subset \mathbb{R}$ και $s \in \mathbb{R}$. Το s καλείται infimum του A ($\inf A$) αν ικανοποιει τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) Το s είναι κάτω φράγμα του A.

(ii) Για κάθε s' κάτω φράγμα του A έχουμε $s' \leq s$.

Η επόμενη πρόταση είναι η ανάλογη για το infimum της πρότασης 3.14 και η απόδειξη γίνεται με παρόμοια επιχειρήματα.

Πρόταση 3.16. *Έστω A ένα μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

1. *Το s είναι το infimum του A.*

2. *(α) Το s είναι κάτω φράγμα του A.*

   (β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $s \leq x < s + \varepsilon$.

Πρόταση 3.17. *Έστω A μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $-A = \{-x : \ x \in A\}$. Τότε, το $-A$ είναι άνω φραγμένο και $\inf A = -\sup(-A)$.*

Απόδειξη. Εύκολα βλέπουμε ότι αν s είναι κάτω φράγμα του Α, τότε το $-s$ είναι άνω φράγμα του $-A$. Επομένως, αν το A είναι κάτω φραγμένο τότε το $-A$ είναι άνω φραγμένο και άρα απο ιδιότητα πληρότητας υπάρχει $s = \sup(-A)$. Τότε το $-s$ είναι κάτω φράγμα για το A και επομένως ικανοποιείται το $2(\alpha)$ της πρότασης 3.16. Θα δείξουμε ότι ισχύει το $2(\beta)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $s = \sup(-A)$ θα υπάρχει $-x \in -A$ ώστε $s - \varepsilon < -x \leq s$. Τότε $-s \leq x < -s + \varepsilon$. Επομένως, το $-s$ ικανοποιεί το 2 της πρότασης 3.16 και άρα $-s = \inf A$. □

Η προηγούμενη πρόταση μας επιτρέπει να αποδείξουμε για το infimum το ανάλογο που η ιδιότητα της πληρότητας μας εξασφαλίζει για το supremum.

Πόρισμα 3.18. *Κάθε μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει infimum.*

3.3.2 Συνέπειες της πληρότητας στη δομή του $\mathbb{R}$

Η ιδιότητα της πληρότητας του $\mathbb{R}$ έχει σαν συνέπεια οι πραγματικοί αριθμοί να συμπεριφέρονται με τρόπο φυσιολογικό. Σε αυτήν την ενότητα θα δούμε κάποιες ιδιότητες που προκύπτουν από την πληρότητα. Πρέπει κατ΄ αρχας να τονίσουμε ότι χωρίς τη χρήση της πληρότητας (δηλαδή δεχόμενοι μόνο τις ιδιότητες (i)-(xii)) φυσιολογικά ερωτήματα δεν μπορούν να απαντηθούν. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το σύνολο $A = \{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\}$. Προφανώς, το A είναι κάτω φραγμένο και είναι αναμενόμενο ότι $\inf A = 0$. Για να το αποδείξουμε, δεδομένου ότι το 0 είναι κάτω φράγμα του Α, πρέπει για κάθε $\varepsilon > 0$ να βρούμε ένα $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Αυτό δεν μπορεί να εξασφαλιστεί χωρίς την ιδιότητα της πληρότητας! Ισοδύναμα, χωρίς την ιδιότητα της πληρότητας δεν αποδεικνύεται ότι $\frac{1}{n} \to 0$.

Θα δείξουμε κατ΄ αρχάς ότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Το αντίθετο ίσως ξενίζει τον αναγνώστη γιατί φαίνεται παράλογο να υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος από όλους τους φυσικούς. Αν αυτό συνέβαινε, δηλαδή υπήρχε $x \in \mathbb{R}$, με $x > n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\frac{1}{x} < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και τέτοιοι αριθμοί που ονομάζονταν απειροστά είχαν απασχολήσει τους μαθηματικούς από την αρχαιότητα. Παρά το γεγονός ότι δεν είχαν αποδείξει την ύπαρξή τους, δεν την είχαν αποκλείσει μέχρι την εποχή που ανακαλύφθηκαν η ιδιότητα της πληρότητας και οι ισοδύναμες μορφές της. Η απόδειξη ότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι βασική συνέπεια της πληρότητας.

Πρόταση 3.19. *Το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Έστω ότι το $\mathbb{N}$ ήταν άνω φραγμένο. Τότε λόγω της πληρότητας του $\mathbb{R}$ υπάρχει $s \in \mathbb{R}$ να είναι το supremum του $\mathbb{N}$. Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $s - \frac{1}{2} < n_0 \leq s$. Τότε $s < s + \frac{1}{2} < n_0 + 1$, το οποίο είναι άτοπο καθώς $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ και το s αποτελεί άνω φράγμα για το $\mathbb{N}$. □

Πόρισμα 3.20. *Αν $A = \{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\}$ τότε $\inf A = 0$.*

Απόδειξη. Κατ΄ αρχας είναι προφανές ότι το 0 είναι κάτω φράγμα του A. Για να είναι το 0 το $\inf A$ θα πρέπει για κάθε $\varepsilon > 0$, να υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Ισοδύναμα για κάθε $\varepsilon > 0$, να υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{\varepsilon} < n$ που προκύπτει από την προηγούμενη πρόταση. □

Πρόταση 3.21 (Ιδιότητα Αρχιμήδους-Ευδόξου)**.** *Έστω $a > 0$ και $b \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $b < na$.*

Απόδειξη. Αν $b \leq 0$ τότε είναι προφανές για $n = 1$.
Αν $b > 0$,υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $b < na$ αν και μόνο αν $\frac{b}{a} < n$. Από την πρόταση 3.19 επειδή το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\frac{b}{a} < n$, διότι αλλιώς το $\frac{b}{a}$ θα αποτελούσε άνω φράγμα του $\mathbb{N}$. □

Πρόταση 3.22 (Πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$)**.** *Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Τότε υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ τέτοιος ώστε $a < q < b$.*

Απόδειξη. Θα υποθέσουμε ότι $a > 0$, ομοίως εργαζόμαστε και για $a \leq 0$. Θέτουμε $d = b - a > 0$. Επειδή το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο, πρόταση 3.19, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n > \frac{1}{d}$ και ισοδύναμα $\frac{1}{n} < d$. Έστω $S = \{k \in \mathbb{N} | a < \frac{k}{n}\}$. Επειδή το $\mathbb{N}$ είναι καλά διατεταγμένο το S έχει ελάχιστο στοιχείο, το k_0. Τότε $\frac{k_0}{n} \in \mathbb{Q}$ και επειδή $k_0 \in S$ έχουμε $a < \frac{k_0}{n}$. Αρκεί να δέξουμε ότι $\frac{k_0}{n} < b$. Αν $k_0 = 1$ τότε $\frac{k_0 - 1}{n} = 0 < a$. Αν $k_0 \neq 1$ επειδή $k_0 = \min S$ έπεται ότι $k_0 - 1 \notin S$ και κατά συνέπεια $\frac{k_0 - 1}{n} = 0 \leq a$. Δηλαδή σε κάθε περίπτωση $\frac{k_0 - 1}{n} = 0 \leq a$. Χρησιμοποιώντας ότι $\frac{1}{n} < \frac{d}{2}$ έχουμε ότι $\frac{k_0}{n} = \frac{k_0 - 1}{n} + \frac{1}{n} < \frac{k_0 - 1}{n} + d \leq a + d = b$. □

Πρόταση 3.23 (Αρχή κιβωτισμού). *Αν $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών και φραγμένων διαστημάτων του $\mathbb{R}$ τότε*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$$

Απόδειξη. Έστω ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $I_n = [a_n, b_n]$. Θέτουμε $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ και $B = \{b_n | n \in \mathbb{N}\}$. Επειδή η ακολουθία των διαστημάτων είναι φθίνουσα έχουμε ότι κάθε στοιχείο του A είναι μικρότερο από κάθε στοιχείο του B. Επομένως, κάθε στοιχείο του B είναι άνω φράγμα του A. Άρα το $\sup A$ (το ελάχιστο άνω φράγμα του A) είναι μικρότερο ή ίσο από κάθε στοιχείο του B. Δηλαδή το $\sup A$ είναι κάτω φράγμα του B. Επομένως, $\sup A \leq \inf B$. Η απόδειξη ολοκληρώνεται με το να δείξουμε ότι

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \supset [\sup A, \inf B]$$

Πράγματι για κάθε $x \in [\sup A, \inf B]$ έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \sup A \leq x \leq \inf B \leq b_n$. Άρα $x \in I_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. □

3.4 Η υπεραριθμησιμότητα του $\mathbb{R}$

Μία από τις αξιοσημείωτες ανακαλύψεις των μαθηματικών οφείλεται στον G. Cantor (1845-1918) και αφορά την ύπαρξη περισσότερων του ενός απείρων. Το άπειρο είναι εμπειρικά απρόσιτο και μέχρι τον Cantor οι μαθηματικοί πίστευαν ότι η απειρία των φυσικών αριθμών περιγράφει πλήρως κάθε έκφανση του απείρου. Η ευφυία του Cantor με το περίφημο διαγώνιο επιχείρημα, απέδειξε ότι αυτό δεν είναι σωστό. Μεταξύ των άλλων έδειξε ότι η απειρία του $\mathbb{R}$ είναι μεγαλύτερη από αυτή του $\mathbb{N}$. Για να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το Θεώρημα του Cantor χρειαζόμαστε τις έννοιες του αριθμήσιμου και υπεραριθμήσιμου συνόλου.

Ορισμός 3.24. Ένα σύνολο A λέγεται αριθμήσιμο αν υπάρχει συνάρτηση $\phi : \mathbb{N} \to A$ επί.

Παρατηρήσεις. (1) Τα αριθμήσιμα σύνολα είναι αυτά που ταυτίζονται με σύνολο των τιμών μιας ακολουθίας.
(2) Κάθε πεπερασμένο σύνολο είναι αριθμήσιμο.
(3) Κάθε μη κενό υποσύνολο αριθμήσιμου συνόλου είναι αριθμήσιμο.
(4) Όπως θα δούμε και στο κεφάλαιο 7, οι ακέραιοι $\mathbb{Z}$ και οι ρητοί $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμα σύνολα.

Ορισμός 3.25. Ένα σύνολο λέγεται υπεραριθμήσιμο αν δεν είναι αριθμήσιμο.

Είναι σχετικά εύκολο, με χρήση του παραδόξου του Russel να δούμε ότι υπάρχουν υπεραριθμήσιμα σύνολα. Αυτό περιγράφει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.26. *Το σύνολο* $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A : A \subset \mathbb{N}\}$ *είναι υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το σύνολο $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ είναι αριθμήσιμο, άρα υπάρχει $\phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ επί. Θα δείξουμε ότι αυτό δεν είναι δυνατόν. Δηλαδή, υπάρχει $A \subset \mathbb{N}$ που δεν είναι εικόνα μέσω της ϕ, κανενός στοιχείου $n \in \mathbb{N}$. Αυτό θα οδηγήσει σε άτοπο και θα δείξει την υπεριθμησιμότητα του $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Θέτουμε $A = \{n \in \mathbb{N} : n \notin \phi(n)\}$. Προφανώς, $A \subset \mathbb{N}$ (μπορεί $A = \emptyset$)! Ισχυριζόμαστε ότι δεν υπάρχει $n \in A$ ώστε $\phi(n) = A$. Πράγματι αν υπήρχε τότε είτε $n \in A$ ή $n \notin A$. Αν $n \in A$, τότε $n \notin \phi(n) = A$, άτοπο. Αν $n \notin A$, τότε $n \notin \phi(n)$ άρα $n \in A$, άτοπο. □

Θα δείξουμε τώρα ότι το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Η βασική στρατηγική της απόδειξης είναι παρόμοια με την προηγούμενη. δηλαδή, θα υποθέσουμε ότι υπάρχει $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ επί και θα καταλήξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ που δεν είναι εικόνα κανενός $n \in \mathbb{N}$. Αυτό θα οδηγήσει σε άτοπο. Το βασικό εργαλείο για τον εντοπισμό του x_0 θα είναι η αρχή κιβωτισμού, η οποία είναι μία από τις συνέπειες της πληρότητας του $\mathbb{R}$. Άρα, η υπεραριθμησιμότητα του $\mathbb{R}$ είναι συνέπεια της πληρότητας αυτού. Στην απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.27. *Έστω* $[\alpha, \beta]$ *διάστημα του* $\mathbb{R}$ *ώστε* $\alpha < \beta$. *Έστω* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *πεπερασμένο υποσύνολο του* $\mathbb{R}$. *Τότε, υπάρχουν* $\alpha < \gamma < \delta < \beta$ *ώστε* $[\gamma, \delta] \cap \{x_1, \ldots, x_n\} = \emptyset$.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Θέτουμε $I = \{1 \leq k \leq n : x_k \in (\alpha, \beta)\}$. Αν $I = \emptyset$, τότε επιλέγουμε $\alpha < \gamma < \delta < \beta$ και το $[\gamma, \delta]$ είναι το ζητούμενο. Αν $I \neq \emptyset$, τότε θέτουμε $k_0 = \min I$ και επιλέγουμε $\alpha < \gamma < \delta < x_{k_0}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι $[\gamma, \delta] \cap \{x_1, \ldots, x_n\} = \emptyset$. □

Θεώρημα 3.28. *Το* $\mathbb{R}$ *είναι υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Έστω ότι το $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο. Άρα υπάρχει $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ επί. Θέτουμε $x_n = \phi(n)$ και $I_0 = [0, 1]$. Επαγωγικά κατασκευάζουμε $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία διαστημάτων ώστε $I_1 \subset I_0$ και $I_1 \cap \{x_1\} = \emptyset$. Επίσης, για $n \geq 1$ $I_{n+1} \subset I_n$ και $I_{n+1} \cap \{x_1, \ldots, x_{n+1}\} = \emptyset$. Παρατηρούμε ότι $I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_n \supset I_{n+1}$ και από την αρχή του κιβωτισμού υπάρχει $x_0 \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$.
Ισχυρισμός : $x_0 \neq x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Πράγματι, κάθε $n \in \mathbb{N}$ $x_n \notin I_n$ και $x_0 \in I_n$ άρα $x_0 \neq x_n$. Συμπεραίνουμε ότι η ϕ δεν είναι επί και αυτό οδηγεί σε άτοπο. □

Παρατηρήσεις. (1). Όπως έχουμε αναφέρει, το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο. Επίσης, όπως θα δούμε αν το A είναι υπεραριθμήσιμο και $B \subset A$ αριθμήσιμο, τότε $A \backslash B$ είναι υπεραριθμήσιμο. Άμεση συνέπεια αυτού είναι ότι οι άρρητοι είναι υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Επομένως, οι "εξωτικοί" άρρητοι όχι μόνο υπάρχουν αλλά έχουν απειρία μεγαλύτερη των ρητών.
(2). Παρόμοια ισχύουν και για τους υπερβατικούς αριθμούς. δηλαδή τους αριθμούς (όπως π, e) που δεν είναι ρίζχα πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές και αυτοί είναι επίσης υπεραριθμήσιμοι ώς συμπλήρωμα αριθμησίμου υποσυνόλου του $\mathbb{R}$.

Κεφάλαιο 4

Μετρικοί χώροι και παραδείγματα

4.1 Ορισμός μετρικού χώρου

Ορισμός 4.1. ***Μετρικός χώρος*** είναι ένα ζεύγος (X, ρ) όπου X είναι ένα μη κενό σύνολο και $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ μία απεικόνιση που ικανοποιεί τις ιδιότητες:

(i) $\rho(x, y) \geq 0$ για κάθε $x, y \in X$ και $\rho(x, y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$.

(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ για κάθε $x, y \in X$ (συμμετρική ιδιότητα).

(iii) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ για κάθε $x, y, z \in X$ (τριγωνική ανισότητα).

Η απεικόνιση ρ ονομάζεται ***μετρική***, τα στοιχεία του συνόλου X ονομάζονται ***σημεία***, και ο αριθμός $\rho(x, y)$ ονομάζεται ***απόσταση*** του x από το y.

Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης ως προς τη μετρική που θεωρούμε σε ένα σύνολο X χρησιμοποιούμε και την έκφραση ‘‘ο μετρικός χώρος X’’.

Παραθέτουμε τώρα κάποια απλά παραδείγματα μετρικών χώρων

1. Η ***συνήθης μετρική*** στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ορίζεται ως

$$\rho(x, y) = |x - y|$$

για $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Η ***ευκλείδεια μετρική*** ρ_2 στο σύνολο $\mathbb{R}^k$ των διατεταγμένων $k-$άδων πραγματικών αριθμών ορίζεται ως εξής: Για δυό στοιχεία $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ του $\mathbb{R}^k$ είναι

$$\rho_2(\vec{x}, \vec{y}) = \Big(\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

3. Η ***διακριτή μετρική*** σε οποιοδήποτε μη κενό σύνολο X ορίζεται ως εξής: Για $x, y \in X$ ορίζουμε

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \neq y \\ 0 & \text{αν } x = y. \end{cases}$$

4. Αν (X, ρ) είναι ένας μετρικός χώρος και A οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο του X, ο περιορισμός ρ_A της ρ στο $A \times A$ δηλαδή η απεικόνιση $\rho_A : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ με $\rho_A(x,y) = \rho(x,y)$ είναι μετρική στο σύνολο A. Η μετρική αυτή ονομάζεται ***σχετική μετρική*** που επάγεται στο A από τη ρ. Έτσι για παράδειγμα κάθε μη κενό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών είναι μετρικός χώρος με τη σχετική μετρική που επάγεται σε αυτό από τη συνήθη μετρική.

4.2 Μετρικές σε διανυσματικούς χώρους που ορ΄-ιζονται από νόρμες

Μία σημαντική κλάση μετρικών χώρων είναι αυτές που ορίζονται σε ένα διανυσματικό χώρο μέσω μίας νόρμας. Παρακάτω υπενθυμίζουμε τον ορισμό του πραγματικού διανυσματικού χώρου και της νόρμας σε ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο και δίνουμε κάποια παραδείγματα.

Ορισμός 4.2. Πραγματικός ***διανυσματικός χώρος*** (ή ***γραμμικός χώρος***) ονομάζεται μία τριάδα $(V, +, \cdot)$ όπου V είναι ένα σύνολο, $+ : V \times V \longrightarrow V$ μία εσωτερική πράξη (***πρόσθεση***) και $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ μία εξωτερική πράξη (***βαθμωτό γινόμενο***) που ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $(x + y) + z = x + (y + z)$ για κάθε $x, y, z \in V$.

(ii) $x + y = y + x$ για κάθε $x, y \in V$.

(iii) Υπάρχει ένα στοιχείο $0 \in V$(μηδενικό στοιχείο) ώστε $x + 0 = 0 + x = x$ για κάθε $x \in V$.

(iv) Για κάθε $x \in V$ υπάρχει $-x \in V$ ώστε $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

(v) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ για κάθε $x, y \in V$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

(vi) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ για κάθε $x \in V$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. (όπου $\lambda + \mu$ στο πρώτο μέλος είναι το άθροισμα των πραγματικών αριθμών λ και μ).

(vii) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ για κάθε $x \in V$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (όπου $\lambda\mu$ στο δεύτερο μέλος είναι το γινόμενο των πραγματικών αριθμών λ και μ).

(viii) $1x = x$ για κάθε $x \in V$.

Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου ονομάζονται ***διανύσματα***.
(Εαν στον ορισμό αντικαταστήσουμε το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών με το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών έχουμε την έννοια του μιγαδικού διανυσματικού χώρου.)

Βάση του διανυσματικού χώρου V ονομάζεται ένα σύνολο $B \subset V$ έτσι ώστε για κάθε $x \in V$ με $x \neq 0$ υπάρχουν μοναδικά $k \in \mathbb{N}$, $b_1, b_2, \ldots, b_k$ διαφορετικά ανά δύο στοιχεία του B και μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ ώστε $x = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_k b_k$.

Παραδείγματα διανυσματικών χώρων

(α) Ο χώρος $\mathbb{R}^k$ με πρόσθεση και βαθμωτό γινόμενο οριζόμενο από τις σχέσεις:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) + (y_1, y_2, \ldots, y_k) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_k + y_k)$$

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_k).$$

Η κανονική (standard) βάση του $\mathbb{R}^k$ αποτελείται από τα διανύσματα $e_1, e_2, \ldots, e_k$ όπου $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (η μονάδα βρίσκεται στην j-θέση).

(β) Ο χώρος $c_{00}(\mathbb{N})$ των τελικά μηδενικών πραγματικών ακολουθιών αποτελείται από όλες τις ακολουθίες πραγματικών αριθμών της μορφής $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ για τις οποίες υπάρχει $i_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_i = 0$ για κάθε $i \geq i_0$. Η πρόσθεση και το βαθμωτό γινόμενο ορίζονται κατά σημείο δηλαδή

$$(x_1, x_2, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$$

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots).$$

Σημειώνουμε ότι το άθροισμα δύο τελικά μηδενικών ακολουθιών καθώς και το γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού με μία τελικά μηδενική ακολουθία είναι τελικά μηδενική ακολουθία και άρα οι πράξεις όπως ορίστηκαν είναι καλά ορισμένες στο $c_{00}(\mathbb{N})$. Ο διανυσματικός χώρος $c_{00}(\mathbb{N})$ είναι ένας χώρος που επεκτείνει κατά φυσιολογικό τρόπο κάθε $\mathbb{R}^k$, $k = 1, 2, \ldots$ Η κανονική (standard) βάση του $c_{00}(\mathbb{N})$ είναι η $e_1, e_2, \ldots$ όπου $e_j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ για $j = 1, 2, \ldots$ (η μονάδα βρίσκεται στην j-θέση).

(γ) Ο χώρος P όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές.

(δ) Ο χώρος P_n όλων των πολυωνύμων με βαθμό μικρότερο ή ίσο του n και πραγματικούς συντελεστές.

(ε) Αν X είναι ένα μη κενό σύνολο κάθε συνάρτηση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ καλείται ***πραγματική συνάρτηση***. Ο χώρος $\mathcal{F}(X)$ που αποτελείται από όλες τις πραγματικές συναρτήσεις $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με πράξεις οριζόμενες κατά σημείο, δηλαδή

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

είναι διανυσματικός χώρος.

(στ) Ο χώρος $C[a, b]$ των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το κλειστό διάστημα $[a, b]$. Σημειώνουμε εδώ ότι το άθροισμα συνεχών συναρτήσεων καθώς και κάθε πραγματικό πολλαπλάσιο μίας συνεχούς συνάρτησης είναι συνεχής συνάρτηση.

Ορισμός 4.3. Έστω $(V, +, \cdot)$ ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος. Μία απεικόνιση $\| \, \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται ***νόρμα*** αν ικανοποιεί τις ιδιότητες:

(i) $\|x\| \geq 0$ για κάθε $x \in V$ και $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ για κάθε $x \in V$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in V$ (τριγωνική ανισότητα).

Το ζεύγος $(V, \| \, \|)$ ονομάζεται ***χώρος με νόρμα***.

Για κάθε χώρο με νόρμα $(V, \| \, \|)$ η απεικόνιση $\rho = \rho_{\| \, \|} : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ με $\rho(x, y) = \|x - y\|$ είναι μετρική στο V. Πράγματι

- $\rho(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ για κάθε $x, y \in V$, ενώ $\rho(x, y) = 0$, δηλαδή $\|x - y\| = 0$ αν και μόνο αν $x - y = 0$ δηλαδή αν και μόνο αν $x = y$.
- $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \rho(y, x)$ για κάθε $x, y \in V$.
- Για κάθε $x, y, z \in V$ έχουμε $\rho(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Η μετρική αυτή ονομάζεται ***μετρική που επάγει η νόρμα*** στο διανυσματικό χώρο V.

Δίνουμε τώρα κάποια παραδείγματα χώρων με νόρμα.

1. Η ***ευκλείδεια νόρμα*** $\| \, \|_2$ στον $\mathbb{R}^k$ ορίζεται ως εξής: Για $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$ της μορφής $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ θέτουμε

$$\|\vec{x}\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Η ευκλείδεια μετρική ρ_2 στον $\mathbb{R}^k$ είναι η μετρική που επάγεται από τη νόρμα $\| \, \|_2$.

2. Στον $\mathbb{R}^k$ θεωρούμε επίσης τις νόρμες $\| \, \|_1$ και $\| \, \|_\infty$ που για $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$ της μορφής $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ ορίζονται ως εξής:

$$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{k} |x_i|$$

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max\{|x_i| : \ i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Η απόδειξη ότι οι $\| \, \|_1$ και $\| \, \|_\infty$ είναι όντως νόρμες στον $\mathbb{R}^k$ αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

3. Στον $\mathbb{R}^k$ ορίζονται επίσης οι νόρμες $\| \, \|_p$ για $1 < p < \infty$ ως εξής: Για $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ ορίζουμε

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Η απόδειξη ότι η $\| \ \|_p$ είναι πράγματι νόρμα παρουσιάζει δυσκολία μόνο στην απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας. Για την απόδειξη αυτή θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Minkowski η απόδειξη της οποίας βασίζεται στην ανισότητα Hölder. Ξεκινάμε την απόδειξη με την ακόλουθη ανισότητα:

Αν $p > 1$ και $q > 1$ ικανοποιούν τη σχέση $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ τότε για κάθε $a, b \geq 0$ ισχύει

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{1}$$

Απόδειξη.. Αν $a = 0$ ή $b = 0$ η ανισότητα (1) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $a > 0$ και $b > 0$. Η συνάρτηση $\log : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με $\log''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και άρα είναι κοίλη συνάρτηση. Συνεπώς για $x, y \in (0, +\infty)$ και $0 < \lambda < 1$ είναι $\lambda \log x + (1 - \lambda) \log y \leq \log(\lambda x + (1 - \lambda) y)$. Για $x = a^p$, $y = b^q$ και $\lambda = \dfrac{1}{p}$ (οπότε $1 - \lambda = \dfrac{1}{q}$) προκύπτει ότι $\dfrac{1}{p} \log a^p + \dfrac{1}{q} \log b^q \leq \log(\dfrac{1}{p} a^p + \dfrac{1}{q} b^q)$ δηλαδή $\log(ab) \leq \log(\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q})$ από την οποία προκύπτει η ανισότητα (1). □

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Δυο πραγματικοί αριθμοί $p, q > 1$ ώστε $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ λέγονται ***συζυγείς εκθέτες*** ή λέμε ότι ο q είναι ο συζυγής εκθέτης του p (και λόγω συμμετρίας ο p είναι συζυγής εκθέτης του q). Παρατηρούμε ότι για $p > 1$ ο συζυγής εκθέτης του p είναι ο $q = \dfrac{p}{p-1}$ και ότι η σχέση $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ που ορίζει τους συζυγείς εκθέτες είναι ισοδύναμη της $p + q = pq$.

Ανισότητα Hölder: Αν p, q είναι συζυγείς εκθέτες (δηλαδή $p > 1$ και $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$) και $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $b_1, b_2, \ldots, b_k$ είναι $2k$ πραγματικοί αριθμοί τότε

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i b_i| \leq \Big(\sum_{i=1}^{k} |a_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\sum_{i=1}^{k} |b_i|^q \Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{2}$$

Στην ειδική περίπτωση που $p = q = 2$ έχουμε την ανισότητα Cauchy-Scwartz.

Απόδειξη.. Κατ΄ αρχήν παρατηρούμε ότι αν $\sum\limits_{i=1}^{k} |a_i|^p = 0$ τότε $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$ και η (2) ισχύει προφανώς ως ισότητα. Το ίδιο συμπέρασμα έχουμε και στην περίπτωση που $\sum\limits_{i=1}^{k} |b_i|^q = 0$. Στα παρακάτω υποθέτουμε ότι $\sum\limits_{i=1}^{k} |a_i|^p > 0$ και $\sum\limits_{i=1}^{k} |b_i|^q > 0$.

Εξετάζουμε πρώτα την ειδική περίπτωση που $\sum\limits_{i=1}^{k} |a_i|^p = \sum\limits_{i=1}^{k} |b_i|^q = 1$. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $\sum\limits_{i=1}^{k} |a_i b_i| \leq 1$. Για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$ από την ανισότητα (1) για τους μη αρνητικούς $|a_i|$ και $|b_i|$ έχουμε

$$|a_i b_i| \leq \frac{|a_i|^p}{p} + \frac{|b_i|^q}{q}.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις k αυτές ανισότητες προκύπτει ότι

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i b_i| \leq \sum_{i=1}^{k} (\frac{|a_i|^p}{p} + \frac{|b_i|^q}{q}) = \frac{1}{p}\Big(\sum_{i=1}^{k} |a_i|^p\Big) + \frac{1}{q}\Big(\sum_{i=1}^{k} |b_i|^q\Big) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Για τη γενική περίπτωση, θέτοντας $A_i = \dfrac{a_i}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{k} |a_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}}$ και $B_i = \dfrac{b_i}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{k} |b_i|^q\Big)^{\frac{1}{q}}}$ για $i = 1, 2, \ldots, k$ παρατηρούμε ότι για τους πραγματικούς αριθμούς A_1,A_2,..., A_k,B_1,B_2,...,B_k ισχύει $\sum\limits_{i=1}^{k} |A_i|^p = \sum\limits_{i=1}^{k} |B_i|^q = 1$. Άρα από την ειδική περίπτωση προκύπτει ότι $\sum\limits_{i=1}^{k} |A_i B_i| \leq 1$ δηλαδή $\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{|a_i|}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{k} |a_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}} \cdot \dfrac{|b_i|}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{k} |b_i|^q\Big)^{\frac{1}{q}}} \leq 1$. Επομένως

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i b_i| \leq \Big(\sum_{i=1}^{k} |a_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\sum_{i=1}^{k} |b_i|^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

□

Ανισότητα Minkowski: Αν $p \geq 1$ και $x_1, x_2, \ldots, x_k,\ y_1, y_2, \ldots, y_k$ είναι $2k$ πραγματικοί αριθμοί τότε

$$\Big(\sum_{i=1}^{k} |x_i + y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

Απόδειξη.. Για $p = 1$ η ανισότητα είναι προφανής οπότε υποθέτουμε ότι $p > 1$. Θέτοντας $A = (\sum\limits_{i=1}^{k} |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ έχουμε

$$\begin{aligned} A^p &= \sum_{i=1}^{k} |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{k} |x_i + y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} (|x_i| + |y_i|) \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \\ &= \sum_{i=1}^{k} |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{k} |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1}. \end{aligned} \tag{4}$$

Θεωρούμε το συζυγή εκθέτη q του p δηλαδή τον αριθμό $q = \dfrac{p}{p-1}$. Από την ανισότητα Hölder για τους αριθμούς $a_i = |x_i|$, $b_i = |x_i + y_i|^{p-1}$ για $i = 1, 2, \ldots, k$ προκύπτει ότι

$$\sum_{i=1}^{k} |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \leq \Big(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\sum_{i=1}^{k} \cdot |x_i + y_i|^{(p-1)q} \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Εφόσον $(p-1)q = pq - q = p$ και $A = (\sum\limits_{i=1}^{k} |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ έπεται ότι

$$\sum_{i=1}^{k} |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \leq \Big(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \cdot (A^p)^{\frac{1}{q}}. \tag{5}$$

Με όμοιο τρόπο από την ανισότητα Hölder για τους αριθμούς $a_i = |y_i|$, $b_i = |x_i + y_i|^{p-1}$ για $i = 1, 2, \ldots, k$ έπεται ότι

$$\sum_{i=1}^{k} |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \leq \Big(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \cdot (A^p)^{\frac{1}{q}}. \tag{6}$$

Από τις (4),(5),(6) συνάγουμε ότι

$$\begin{aligned} A^p &\leq \Big(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \cdot (A^p)^{\frac{1}{q}} + \Big(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \cdot (A^p)^{\frac{1}{q}} \\ &= \bigg(\Big(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \bigg) \cdot (A^p)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

και άρα

$$(A^p)^{1-\frac{1}{q}} \leq \Big(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}}$$

δηλαδή

$$A \leq \Big(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}}$$

η οποία είναι ακριβώς η ανισότητα Minkowski (3). □

Η ανισότητα Minkowski συνεπάγεται ότι για $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^k$ ισχύει $\|\vec{x} + \vec{y}\|_p \leq \|\vec{x}\|_p + \|\vec{y}\|_p$ δηλαδή την τριγωνική ανισότητα στο χώρο $(\mathbb{R}^k, \| \ \|_p)$. Έτσι ο $(\mathbb{R}^k, \| \ \|_p)$ είναι χώρος με νόρμα και η μετρική ρ_p που επάγει η νόρμα αυτή στον $\mathbb{R}^k$ περιγράφεται ως εξής: Για δυο στοιχεία $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ και $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ του $\mathbb{R}^k$

$$\rho_p(\vec{x}, \vec{y}) = \Big(\sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Αξίζει να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο ότι για $p = 2$ η $\| \|_p$ και η ρ_p αντίστοιχα είναι η ευκλείδεια νόρμα και η ευκλείδεια μετρική.

4. Στο διανυσματικό χώρο $c_{00}(\mathbb{N})$ των τελικά μηδενικών ακολουθιών πραγματικών ορίζονται οι νόρμες $\| \|_\infty$ και $\| \|_p$ για $1 \leq p < \infty$ ως εξής: Για $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in c_{00}(\mathbb{N})$ θέτουμε

$$\|\vec{x}\|_\infty = \sup\{|x_i| : \ i \in \mathbb{N}\}$$

$$\|\vec{x}\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Η επαλήθευση ότι οι $\| \|_\infty$ και $\| \|_p$ είναι πράγματι νόρμες στο $c_{00}(\mathbb{N})$ γίνεται ακριβώς όπως και για τις αντίστοιχες νόρμες στον $\mathbb{R}^k$.

5. Ο χώρος $(C[a,b], \| \|_\infty)$ των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ όπου $\| \|_\infty$ είναι η supremum νόρμα δηλαδή

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : \ x \in [a,b]\}.$$

Επαληθεύουμε ότι η $\| \|_\infty$ είναι πράγματι νόρμα στο χώρο $C[a,b]$. Καταρχήν παρατηρούμε ότι η $\| \|_\infty$ είναι καλά ορισμένη εφόσον κάθε συνεχής πραγματική συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ είναι φραγμένη.

- Προφανώς $\|f\|_\infty \geq 0$ για κάθε $f \in C[a,b]$ ενώ αν $\|f\|_\infty = 0$ δηλαδή $\sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\} = 0$ τότε $|f(x)| = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ άρα $f = 0$.

- Για $f \in C[a,b]$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup\{|\lambda f(x)| : \ x \in [a,b]\} = |\lambda| \sup\{|f(x)| : \ x \in [a,b]\} = |\lambda| \|f\|_\infty$$

- Αν $f, g \in C[a,b]$ τότε για κάθε $x \in [a,b]$ είναι

$$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

  και άρα $\sup\{|(f+g)(x)| : \ x \in [a,b]\} \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ δηλαδή $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Ο $C[a,b]$ γίνεται μετρικός χώρος με τη μετρική που επάγει η νόρμα $\| \|_\infty$. Η μετρική αυτή περιγράφεται από τον τύπο

$$\rho_\infty(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : \ x \in [a,b]\}.$$

6. Στο χώρο $C[a,b]$ ορίζονται οι νόρμες $\| \|_p$ για $1 \leq p < +\infty$ ως εξής. Για $f \in C[a,b]$ θέτουμε

$$\|f\|_p = \Big(\int_a^b |f(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Η απόδειξη της ιδιότητας (i) της νόρμας είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι αν $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση με $g(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [a,b]$ τότε $g = 0$. Η ιδιότητα (ii) της νόρμας προκύπτει επίσης εύκολα ενώ η απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας έπεται από την ανισότητα Minkowski για συναρτήσεις. Η ανισότητα αυτή αποδεικνύεται μέσω της ανισότητας Hölder για συναρτήσεις.

Ανισότητα Hölder για συναρτήσεις: Αν p, q είναι συζυγείς εκθέτες (δηλαδή $p > 1$ και $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$) και $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι δυο συνεχείς συναρτήσεις τότε

$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \leq \Big(\int_a^b |f(t)|^p dt \Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\int_a^b |g(t)|^q dt \Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{7}$$

Στην ειδική περίπτωση που $p = q = 2$ έχουμε την ανισότητα Cauchy-Scwartz για συναρτήσεις.

Απόδειξη.. Η απόδειξη βασίζεται στην ανισότητα (1) και είναι όμοια με την απόδειξη της ανισότητας Hölder για $k-$άδες πραγματικών αριθμών με τη μόνη διαφοροποίηση ότι χρησιμοποιούμε ολοκληρώματα στη θέση των αθροισμάτων. □

Ανισότητα Minkowski για συναρτήσεις: Αν $p \geq 1$ και $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ δυο συνεχείς συναρτήσεις τότε

$$\Big(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p dt \Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int_a^b |f(t)|^p dt \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_a^b |g(t)|^p dt \Big)^{\frac{1}{p}} \tag{8}$$

Απόδειξη.. Για $p = 1$ η ανισότητα προκύπτει εύκολα ενώ για $p > 1$ αποδεικνύεται με τη χρήση της ανισότητας Hölder για συναρτήσεις και με τον ίδιο τρόπο που αποδείχθηκε η ανισότητα Minkowski για $k-$άδες πραγματικών αριθμών. □

Η ανισότητα Minkowski για συναρτήσεις συνεπάγεται ότι για $f, g \in C[a,b]$ ισχύει $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ δηλαδή την τριγωνική ανισότητα της τριγωνική ανισότητα της νόρμας στο χώρο $(C[a,b], \| \|_p)$. Η μετρική ρ_p που επάγει η νόρμα $\| \|_p$ στο χώρο $C[a,b]$ περιγράφεται από τον τύπο

$$\rho_p(f,g) = \Big(\int_a^b |f(t) - g(t)|^p dt \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι για κάθε $x, y, z, w \in X$ ισχύει:

(i) $|\rho(x,y) - \rho(x,z)| \leq \rho(y,z)$.

(ii) $|\rho(x,y) - \rho(z,w)| \leq \rho(x,z) + \rho(y,w)$.

2. Έστω X μη κενό σύνολο και $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ μία 1-1 συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ με $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$ είναι μετρική στο X.

3. Αν $X \neq \emptyset$ και ρ_1, ρ_2 δυο μετρικές στο X τότε η $\rho_1 + \rho_2$ είναι επίσης μετρική στο X.

4. Έστω (X, ρ), (Y, d) δύο μετρικοί χώροι και $p > 1$. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $\rho : (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow \mathbb{R}$ με $\rho_p\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = |\rho(x_1, x_2)^p + d(y_1, y_2)^p|^{\frac{1}{p}}$ είναι μετρική στο $X \times Y$

(Υπόδειξη: Για την απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας χρησιμοποιήστε την ανισότητα Minkowski.)

Γενικεύστε, διατυπώνοντας και αποδεικνύοντας αντίστοιχο αποτέλεσμα για το γινόμενο k μετρικών χώρων.

5. Εξετάστε αν για κάθε μετρικό χώρο (X, ρ) οι $\rho_1 = \sqrt{\rho}$, $\rho_2 = \rho^2$ είναι μετρικές.
(Υπόδειξη: Μία από τις ρ_i, $i = 1, 2$ είναι πάντα μετρική (βρείτε ποια). Για την άλλη βρείτε κατάλληλο παράδειγμα μετρικού χώρου (X, ρ) και καταλλήλων $x, y, z \in X$ ώστε να αποτυγχάνει η τριγωνική ανισότητα για την αντίστοιχη ρ_i.)

Κεφάλαιο 5

Ακολουθίες και συναρτήσεις

5.1 Ακολουθίες

5.1.1 Γενικοί ορισμοί

Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Με τον όρο ***ακολουθία*** στο X εννοούμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Αν $f(n) = x_n$, $n \in \mathbb{N}$, τότε συμβολίζουμε την ακολουθία f με το σύμβολο (x_n) ή και $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Οι τιμές της f, δηλαδή τα στοιχεία x_n του συνόλου X καλούνται ***όροι*** της ακολουθίας.

Δεν είναι απαραίτητο οι όροι μίας ακολουθίας στο X να είναι διαφορετικοί μεταξύ τους (π.χ. οι σταθερές ακολουθίες $x_n = x_0$ για κάθε $n \in N$, όπου x_0 είναι τυχόν στοιχείο του X).

Αν (x_n) είναι μία ακολουθία και $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_n < \cdots$ φυσικοί αριθμοί τότε η ακολουθία (x_{k_n}) δηλαδή η $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \ldots$ καλείται ***υπακολουθία*** της (x_n). Οι δείκτες των όρων μίας υπακολουθίας αποτελούν μία γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Π.χ αν (x_n) είναι μία ακολουθία τότε οι (x_{2n}) και (x_{2n-1}) αποτελούν δυο υπακολουθίες της (x_n). Η (x_{2n}) ή $x_2, x_4, x_6, \ldots$ καλείται και υπακολουθία των αρτίων όρων της (x_n) και η (x_{2n-1}) δηλαδή η $x_1, x_3, x_5, \ldots$ λέγεται και υπακολουθία των περιττών όρων της (x_n). Σημειώστε επίσης ότι αν (x_{k_n}) είναι μία υπακολουθία της (x_n) τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $k_n \geq n$. Πράγματι $k_1 \geq 1$ αφού $k_1 \in \mathbb{N}$. Επιπλέον αν για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, $k_n \geq n$ τότε αφού $k_{n+1} > k_n$ έχουμε ότι $k_{n+1} > n$ και επειδή $k_{n+1} \in \mathbb{N}$ έπεται $k_{n+1} \geq n+1$. Άρα με επαγωγή συμπεραίνουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $k_n \geq n$.

Σκοπός μας στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου αυτού, είναι να δώσουμε τον ορισμό του ορίου μίας ακολουθίας σε ένα μετρικό χώρο (X, ρ), δηλαδή τον ορισμό της συγκλίνουσας ακολουθίας σε ένα μετρικό χώρο καθώς και να μελετήσουμε ακολουθίες στον $\mathbb{R}^k$ με την ευκλείδεια μετρική ρ_2. Ξεκινούμε με μία σύντομη επανάληψη γνωστών εννοιών από ακολουθίες στο $\mathbb{R}$.

5.1.2 Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

Έστω (x_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι το x_0 είναι ***όριο*** της (x_n) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ φυσικός αριθμός ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $|x_n - x_0| < \varepsilon$. Αν η (x_n) έχει όριο το x_0 τότε λέμε ότι η (x_n) ***συγκλίνει*** στο x_0 και γράφουμε $x_n \to x_0$. Κάθε ακολουθία στο $\mathbb{R}$ που συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό καλείται ***συγκλίνουσα*** ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Υπενθυμίζουμε ακόμη ότι:

(α) Το όριο μίας ακολουθίας (αν αυτό υπάρχει) είναι μοναδικό. Αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $\lim_n x_n$ για το όριο μίας συγκλίνουσας ακολουθίας. Έτσι ο συμβολισμός $x_n \to x_0$ είναι ισοδύναμος του $\lim_n x_n = x_0$.

(β) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία (x_n) στο $\mathbb{R}$ είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε $|x_n| < M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) Κάθε υπακολουθία μίας συγκλίνουσας ακολουθίας συγκλίνει στο ίδιο όριο με αυτή.

Επίσης ένα από τα πλέον θεμελιώδη Θεωρήματα που αφορούν ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ είναι το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass: ''Κάθε φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία''.

5.1.3 Ακολουθίες σε ένα μετρικό χώρο (X, ρ)

Ορισμός 5.1. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, (x_n) ακολουθία στον (X, ρ) και $x_0 \in X$. Τότε το x_0 καλείται ***όριο*** της (x_n) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$.

Αν η (x_n) έχει όριο το $x_0 \in X$ λέμε ότι η (x_n) ***συγκλίνει*** στο x_0 και συμβολίζουμε αυτό με $x_n \to x_0$. Επίσης μία ακολουθία (x_n) στο μετρικό χώρο (X, ρ) καλείται ***συγκλίνουσα*** αν υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $x_n \to x_0$.

Παρατηρείστε ότι η έννοια του ορίου μίας ακολουθίας σε ένα μετρικό χώρο είναι απλή γενίκευση της αντίστοιχης έννοιας για ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική ($\rho(x, y) = |x - y|$).

Μία γεωμετρική ερμηνεία για την έννοια της σύγκλισης μίας ακολουθίας (x_n) στο x_0 είναι η εξής: $x_n \to x_0$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in S_\rho(x_0, \varepsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$, όπου $S_\rho(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : \ \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$ είναι η ανοιχτή σφαίρα με κέντρο x_0 και ακτίνα ε.

Επίσης εύκολα αποδεινύεται και η εξής πρόταση:

Πρόταση 5.2. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, (x_n) ακολουθία στο X και $x_0 \in X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) $x_n \to x_0$.

(ii) Η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\rho(x_n, x_0))$ συγκλίνει στο μηδέν.

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι το όριο μίας ακολουθίας είναι μοναδικό.

Πρόταση 5.3 (Μοναδικότητα του ορίου)**.** *Έστω (x_n) ακολουθία σε ένα μετρικό χώρο (X, ρ). Αν υπάρχει το όριο της (x_n) τότε αυτό είναι μοναδικό.*

Απόδειξη.. Ας υποθέσουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι υπάρχουν δυο στοιχεία $x_0, x_0' \in X$ με $x_0 \neq x_0'$ ώστε $x_n \to x_0$ και $x_n \to x_0'$. Αφού $x_0 \neq x_0'$ έχουμε ότι $\rho(x_0, x_0') = \delta > 0$. Επειδή $x_n \to x_0$ για $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $\rho(x_n, x_0) < \frac{\delta}{2}$. Ομοίως, αφού $x_n \to x_0'$ υπάρχει $n_0' \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0'$, $\rho(x_n, x_0') < \frac{\delta}{2}$. Αλλά τότε, αν $n_0'' = \max\{n_0, n_0'\}$ έχουμε ότι

$$\delta = \rho(x_0, x_0') \leq \rho(x_0, x_{n_0''}) + \rho(x_{n_0''}, x_0') = \rho(x_{n_0''}, x_0) + \rho(x_{n_0''}, x_0') < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

δηλαδή $\delta < \delta$ άτοπο. □

Η πρόταση αυτή μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $\lim_n x_n$ για το μοναδικό όριο μίας συγκλίνουσας ακολουθίας (x_n). Έτσι η έκφραση $x_n \to x_0$ γράφεται ισοδύναμα $\lim_n x_n = x_0$.

Πρόταση 5.4. *Κάθε υπακολουθία μίας συγκλίνουσας ακολουθίας σε ένα μετρικό χώρο συγκλίνει στο ίδιο όριο που συγκλίνει και ολόκληρη η ακολουθία.*

Απόδειξη.. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, (x_n) ακολουθία στο X, $x_0 \in X$ και ας υποθέσουμε ότι $x_n \to x_0$. Έστω (x_{k_n}) υπακολουθία της (x_n). Θα δείξουμε ότι $x_{k_n} \to x_0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x_0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς αν $n \geq n_0$ τότε αφού $k_n \geq n$ έχουμε ότι και $k_n \geq n_0$. Άρα για κάθε $n \geq n_0$, $\rho(x_{k_n}, x_0) < \varepsilon$. Αφού λοιπόν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_{k_n}, x_0) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$, έχουμε ότι $x_{k_n} \to x_0$. □

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Οι αποδείξεις των Προτάσεων 5.3 και 5.4 δεν είναι τίποτα άλλο παρά οι γνωστές αποδείξεις για τις αντίστοιχες προτάσεις στο $\mathbb{R}$ με τη μόνη διαφορά ότι αντί για την απόλυτη τιμή έχουμε γενικά τη μετρική ρ. Επίσης, όταν θα ορισθεί και η έννοια του φραγμένου υποσυνόλου ενός μετρικού χώρου, θα δούμε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία σε ένα μετρικό χώρο (X, ρ) είναι φραγμένη. Συνεπώς οι ιδιότητες (α),(β),(γ) των ακολουθιών στο $\mathbb{R}$ που αναφέραμε προηγουμένως ισχύουν γενικά για μετρικούς χώρους. Το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass δεν ισχύει γενικά σε μετρικούς χώρους. Όμως στην περίπτωση του $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$ ισχύει, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

5.1.4 Ακολουθίες στον ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$

Μία ακολουθία στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^k$, $k \geq 2$ είναι μια ακολουθία διανυσμάτων του $\mathbb{R}^k$ και για το λόγο αυτό θα συμβολίζεται γενικά με $(\vec{x}_n)$. Παρατηρείστε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\vec{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k)$ όπου $x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k$ είναι οι συντεταγμένες του $\vec{x}_n$. Έτσι σε κάθε ακολουθία $(\vec{x}_n)$ στον $\mathbb{R}^k$ αντιστοιχούν k ακολουθίες $(x_n^1), (x_n^2), \ldots, (x_n^k)$ στον $\mathbb{R}$. Η επόμενη πρόταση είναι πολύ χρήσιμη για τη μελέτη ακολουθιών στον $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$.

Πρόταση 5.5. *Έστω $(\vec{x}_n)$ ακολουθία στον $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$ και $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^k$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) $\vec{x}_n \to \vec{x}_0$.

(ii) $x_n^i \to x_0^i$ *στο* $\mathbb{R}$ *για κάθε* $i = 1, 2, \ldots, k$ *όπου* $\vec{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k)$, $n \in \mathbb{N}$ *και* $\vec{x}_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^k)$.

Απόδειξη.. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Έστω ότι $\vec{x}_n \to \vec{x}_0$ και $i_0 \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Θα δείξουμε ότι $x_n^{i_0} \to x_0^{i_0}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho_2(\vec{x}_n, \vec{x}_0) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Επειδή $|x_n^{i_0} - x_0^{i_0}| \leq \Big(\sum\limits_{i=1}^{k} |x_n^i - x_0^i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \rho_2(\vec{x}_n, \vec{x}_0)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$, $|x_n^{i_0} - x_0^{i_0}| < \varepsilon$. Άρα $x_n^{i_0} \to x_0^{i_0}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Έστω ότι $x_n^i \to x_0^i$ για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, k$. Θα δείξουμε ότι $\vec{x}_n \to \vec{x}_0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n^i \to x_0^i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ υπάρχει $n_i \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_i$, $|x_n^i - x_0^i| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_i : \ i = 1, 2, \ldots, k\}$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε ότι

$$\rho_2(\vec{x}_n, \vec{x}_0) = \Big(\sum_{i=1}^{k} |x_n^i - x_0^i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \Big(\sum_{i=1}^{k} (\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}})^2\Big)^{\frac{1}{2}} = (k \cdot \frac{\varepsilon^2}{k})^{\frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

Άρα $\vec{x}_n \to \vec{x}_0$. □

Θεώρημα 5.6 (Θεώρημα Bolzano-Weierstrass στον $\mathbb{R}^k$). *Κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^k$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. (Μία ακολουθία $(\vec{x}_n)$ στον $\mathbb{R}^k$ καλείται* ***φραγμένη*** *αν υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\|\vec{x}_n\|_2 \leq M$).*

Απόδειξη.. Για $k = 1$ το θεώρημα είναι γνωστό. Για λόγους απλότητας το δείχνουμε πρώτα για $k = 2$. Έστω λοιπόν $(\vec{x}_n)$ φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^2$, $\vec{x}_n = (x_n^1, x_n^2)$ για $n = 1, 2, \ldots$. Αφού $|x_n^1| \leq \|\vec{x}_n\|_2$ έχουμε ότι η (x_n^1) είναι φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}$ και συνεπώς η (x_n^1) έχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_n}^1)$. Επειδή $|x_{k_n}^2| \leq \|\vec{x}_{k_n}\|_2$ για κάθε n, η $(x_{k_n}^2)$ είναι μία φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$ και συνεπώς έχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_{l_n}}^2)$. Η $(x_{k_{l_n}}^1)$ είναι υπακολουθία της συγκλίνουσας ακολουθίας $(x_{k_n}^1)$ άρα είναι και αυτή συγκλίνουσα. Έτσι οι υπακολουθίες $(x_{k_{l_n}}^1)$, $(x_{k_{l_n}}^2)$ των $(x_{k_n}^1)$ και $(x_{k_n}^2)$ αντίστοιχα είναι συγκλίνουσες στον $\mathbb{R}$. Από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι η $(\vec{x}_{k_{l_n}})$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία του $\mathbb{R}^2$. Η $(\vec{x}_{k_{l_n}})$ είναι προφανώς υπακολουθία της $(\vec{x}_n)$.

Για την απόδειξη στη γενική περίπτωση είναι βολικό να υιοθετήσουμε ένα διαφορετικό συμβολισμό για τις ακολουθίες και τις υπακολουθίες. Έτσι αν (y_n) είναι μία ακολουθία σε ένα σύνολο Y αυτή θα συμβολίζεται και με $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και μία υπακολουθία (y_{k_n}) της $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θα συμβολίζεται και με $(y_n)_{n\in M}$ όπου $M = \{k_1, k_2, k_3, \ldots\}$.

Έστω λοιπόν $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^k$, $\vec{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k)$, $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$ έχουμε $|x_n^i| \leq \|\vec{x}_n\|_2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς η $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Αφού $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$ υπάρχει $M_1 \subset \mathbb{N}$ άπειρο ώστε $(x_n^1)_{n\in M_1}$ συγκλίνουσα. Όμοια η $(x_n^2)_{n\in M_1}$ είναι φραγμένη ακολουθία στο

$\mathbb{R}$ και συνεπώς υπάρχει $M_2 \subset M_1 \subset \mathbb{N}$ άπειρο ώστε $(x_n^2)_{n\in M_2}$ να είναι συγκλίνουσα. Πάλι η $(x_n^3)_{n\in M_2}$ είναι φραγμένη και συνεπώς υπάρχει $M_3 \subset M_2 \subset M_1 \subset \mathbb{N}$ άπειρο ώστε $(x_n^3)_{n\in M_3}$ συγκλίνουσα. Συνεχίζοντας κατά αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε μία πεπερασμένη (μήκους k) ακολουθία απείρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \cdots \supset M_k$ ώστε για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$ η $(x_n^i)_{n\in M_i}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία στο $\mathbb{R}$.

Θέτουμε $M = M_k$. Τότε για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, k$ η $(x_n^i)_{n\in M}$ είναι υπακολουθία της συγκλίνουσας ακολουθίας $(x_n^i)_{n\in M_i}$, οπότε είναι και αυτή συγκλίνουσα. Καταλήξαμε σε ένα άπειρο σύνολο $M \subset \mathbb{N}$ ώστε η $(x_n^i)_{n\in M}$ είναι συγκλίνουσα υπακολουθία της $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$. Από Πρόταση 5.5 έχουμε ότι η $(\vec{x}_n)_{n\in M}$ είναι συγκλίνουσα υπακολουθία της $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Πρόταση 5.7. *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$ είναι φραγμένη.*

Απόδειξη.. Έστω $(\vec{x}_n)$ φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^k$ και $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^k$ ώστε $\vec{x}_n \to \vec{x}_0$. Τότε για $\varepsilon = 1$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για όλα τα $n \geq n_0$, $\rho_2(\vec{x}_n, \vec{x}_0) < 1$. Έχουμε $\rho_2(\vec{x}_n, \vec{x}_0) = \|\vec{x}_n - \vec{x}_0\|_2$ οπότε από την τριγωνική ανισότητα για τη $\| \ \|_2$ παίρνουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$

$$\|\vec{x}_n\|_2 = \|(\vec{x}_n - \vec{x}_0) + \vec{x}_0\|_2 \leq \|\vec{x}_n - \vec{x}_0\|_2 + \|\vec{x}_0\|_2 < 1 + \|\vec{x}_0\|_2.$$

Αν λοιπόν θέσουμε $M = \max\{\|\vec{x}_1\|_2, \ldots, \|\vec{x}_{n_0-1}\|_2, 1 + \|\vec{x}_0\|_2\}$ έχουμε ότι $\|\vec{x}_n\| \leq M$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Επομένως η ακολουθία $(\vec{x}_n)$ είναι φραγμένη. $\square$

5.2 Συνεχείς συναρτήσεις

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την έννοια της συνέχειας για συναρτήσεις $f : (X, \rho) \longrightarrow (Y, d)$ όπου $(X, \rho), (Y, d)$ μετρικοί χώροι. Πριν διατυπώσουμε το σχετικό ορισμό είναι χρήσιμο να υπενθυμίσουμε κάποιες γνωστές έννοιες για συναρτήσεις $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ όπου $X \subset \mathbb{R}$. Όπως είναι γνωστό αν $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ είναι μία πραγματική συνάρτηση και $x_0 \in X$ τότε η f λέγεται ***συνεχής στο*** $x_0 \in X$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Αν η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in X$ τότε η f λέγεται ***συνεχής στο*** X. Γενικά το δ εξαρτάται και από το ε αλλά και από το x_0. Η συνέχεια μίας συνάρτησης $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ στο $x_0 \in X$ χαρακτηρίζεται με ακολουθίες. Η ***αρχή μεταφοράς σύγκλισης ακολουθιών*** αναφέρει ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν μεταφέρει συγκλίνουσες ακολουθίες στο x_0 σε συγκλίνουσες ακολουθίες στο $f(x_0)$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \to x_0$ έχουμε ότι $f(x_n) \to f(x_0)$.

Θα δείξουμε ότι τα παραπάνω επεκτείνονται γενικά για μετρικούς χώρους. Παρατηρείστε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν το $f(x)$ είναι όσο κοντά θέλουμε στο $f(x_0)$ αρκεί το x να είναι αρκετά κοντά στο x_0. Έτσι ο ορισμός της συνέχειας πραγματικών συναρτήσεων στηρίζεται ουσιαστικά στην έννοια της απόστασης και είναι φυσικό να περιμένει κανείς ότι θα μπορεί να γενικευθεί και για συναρτήσεις που δεν ορίζονται ή που δεν παίρνουν τιμές μόνο στο $\mathbb{R}$.

5.2.1 Συνεχείς συναρτήσεις σε μετρικούς χώρους

Ορισμός 5.8. Έστω $(X,\rho),(Y,d)$ μετρικοί χώροι, $f:(X,\rho)\longrightarrow(Y,d)$ συνάρτηση και $x_0\in X$. Η f λέγεται ***συνεχής στο*** x_0 αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε $x\in X$ με $\rho(x,x_0)<\delta$ να ισχύει ότι $d(f(x),f(x_0))<\varepsilon$.

Αν η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0\in X$ τότε η f θα λέγεται ***συνεχής***.

Παρατηρείστε ότι ο παραπάνω ορισμός είναι μία φυσιολογική επέκταση του γνωστού ορισμού της συνέχειας για συναρτήσεις $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$. Το δ γενικά εξαρτάται από το ε αλλά και από το x_0. Τα πιο προφανή παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων $f:(X,\rho)\longrightarrow(Y,d)$ είναι οι σταθερές συναρτήσεις δηλαδή $f(x)=y_0$ για κάθε $x\in X$, όπου $y_0\in Y$. Επίσης σε κάθε μετρικό χώρο (X,ρ) η ταυτοτική συνάρτηση, δηλαδή η $I:(X,\rho)\longrightarrow(X,\rho)$ με $I(x)=x$ για κάθε $x\in X$, είναι ένα ακόμα προφανές παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης.

Άμεση από τον ορισμό είναι και η επόμενη πρόταση που χαρακτηρίζει γεωμετρικά με ανοιχτές σφαίρες τη συνέχεια.

Πρόταση 5.9. *Έστω $(X,\rho),(Y,d)$ μετρικοί χώροι, $f:(X,\rho)\longrightarrow(Y,d)$ συνάρτηση και $x_0\in X$. Τότε η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε*

$$f\big(S_\rho(x_0,\delta)\big)\subset S_d(f(x_0),\varepsilon).$$

Μία σημαντική κλάση συναρτήσεων είναι οι συναρτήσεις που ικανοποιούν τη ***συνθήκη Lipschitz***. Μία συνάρτηση $f:(X,\rho)\longrightarrow(Y,d)$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz αν υπάρχει σταθερά $C>0$ ώστε για κάθε $x,y\in X$ να ισχύει

$$d(f(x),f(y))\leq C\rho(x,y).$$

Πρόταση 5.10. *Αν η $f:(X,\rho)\longrightarrow(Y,d)$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz τότε είναι συνεχής.*

Απόδειξη.. Έστω ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz με σταθερά C. Θεωρούμε $x_0\in X$ και $\varepsilon>0$. Θέτοντας $\delta=\dfrac{\varepsilon}{C}$, για κάθε $x\in X$ με $\rho(x,x_0)<\delta=\dfrac{\varepsilon}{C}$ έχουμε

$$d(f(x),f(x_0))\leq C\rho(x,y)<\varepsilon.$$

Επομένως η f είναι συνεχής. □

Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο την **εμπηάρνηση** του ορισμού της συνέχειας:

Αν $f:(X,\rho)\longrightarrow(Y,d)$ και $x_0\in X$ τότε η f δεν είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε για κάθε $\delta>0$ να υπάρχει $x_\delta\in X$ με $\rho(x_\delta,x_0)<\delta$ και $d(f(x_\delta),f(x_0))\geq\varepsilon$.

5.2.2 Αρχή μεταφοράς συγκλινουσών ακολουθιών

Θεώρημα 5.11. *Έστω $(X,\rho),(Y,d)$ μετρικοί χώροι, $f:(X,\rho)\longrightarrow(Y,d)$ συνάρτηση και $x_0\in X$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. Η f είναι συνεχής στο x_0.

2. Για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \to x_0$ ισχύει ότι $f(x_n) \to f(x_0)$.

Δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν μεταφέρει από τον (X, ρ) συγκλίνουσες ακολουθίες στο x_0 σε συγκλίνουσες του (Y, d) στο $f(x_0)$.

Απόδειξη.. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Έστω ακόμη (x_n) ακολουθία στον (X, ρ) με $x_n \to x_0$. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $(f(x_n))$ του (Y, d) συγκλίνει στο $f(x_0)$. Πράγματι έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ με $\rho(x, x_0) < \delta$ να έχουμε ότι $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Αφού $x_n \to x_0$ έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $\rho(x_n, x_0) < \delta$. Άρα για κάθε $n \geq n_0$, $d(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$. Επομένως αφού για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $d(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$, η ακολουθία $(f(x_n))$ του (Y, d) συγκλίνει στο $f(x_0)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Έστω ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στον (X, ρ) με $x_n \to x_0$ έχουμε ότι $f(x_n) \to f(x_0)$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Έστω, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0. Τότε από την άρνηση του ορισμού της συνέχειας (δείτε την προηγούμενη παράγραφο) έχουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x_\delta \in X$ με $\rho(x_\delta, x_0) < \delta$ και $d(f(x_\delta), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αν $\delta = \dfrac{1}{n}$ υπάρχει $x_n \in X$ με $\rho(x_n, x_0) < \dfrac{1}{n}$ και $d(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Έτσι αφού $0 \leq \rho(x_n, x_0) < \dfrac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\rho(x_n, x_0) \to 0$ και άρα $x_n \to x_0$ (δείτε και πρόταση (5.2». Όμως αφού $d(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $(f(x_n))$ δεν συγκλίνει στο $f(x_0)$ (πράγματι, αν $f(x_n) \to f(x_0)$ θα έπρεπε να υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $d(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$). Αυτό όμως είναι αδύνατο να συμβαίνει από την αρχική μας υπόθεση. Επομένως η f είναι συνεχής στο x_0. $\square$

Με την αρχή της μεταφοράς μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής. Υπενθυμίζουμε ότι αν $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ τότε η ***σύνθεση της f με τη g*** είναι η συνάρτηση $g \circ f : X \longrightarrow Z$ με $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ για κάθε $x \in X$.

Πρόταση 5.12. *Έστω (X, ρ), (Y, d), (Z, σ) μετρικοί χώροι, $f : (X, \rho) \longrightarrow (Y, d)$, $g : (Y, d) \longrightarrow (Z, \sigma)$ συναρτήσεις και $x_0 \in X$ ώστε η f είναι συνεχής στο x_0 και η g συνεχής στο $f(x_0)$. Τότε η σύνθεση $g \circ f : (X, \rho) \longrightarrow (Z, \sigma)$ είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη.. Θα εφαρμόσουμε την αρχή της μεταφοράς. Έστω (x_n) ακολουθία στο X ώστε $x_n \to x_0$. Αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία $((f \circ g)(x_n))$ του (Z, σ) συγκλίνει στο $(f \circ g)(x_0) \in Z$. Πράγματι, αφού η f είναι συνεχής στο x_0 και $x_n \to x_0$ από την αρχή της μεταφοράς για την $f : (X, \rho) \longrightarrow (Y, d)$ έχουμε ότι $f(x_n) \to f(x_0)$. Εφαρμόζοντας πάλι την ίδια αρχή για τη συνάρτηση $g : (Y, d) \longrightarrow (Z, \sigma)$, αφού η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, έχουμε ότι $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$ δηλαδή $(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(x_0)$. $\square$

5.2.3 Πραγματικές συναρτήσεις

Ας θυμηθούμε σε αυτό το σημείο ότι κάθε συνάρτηση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, όπου X είναι ένα μη κενό σύνολο, ονομάζεται πραγματική συνάρτηση. Το άθροισμα δυο πραγματικών συναρτήσεων $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $f + g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ για κάθε $x \in X$ ενώ το γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού $\lambda \in \mathbb{R}$ με μία πραγματική συνάρτηση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $\lambda f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ για κάθε $x \in X$. Επίσης το ***γινόμενο*** δυο συναρτήσεων $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται να είναι η συνάρτηση $f \cdot g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ για κάθε $x \in X$. Ομοίως αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$ το ***πηλίκο*** των f και g είναι η συνάρτηση $\dfrac{f}{g} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με $(\dfrac{f}{g})(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ για κάθε $x \in X$.

Αν το σύνολο X εφοδιασθεί με μία μετρική και οι πραγματικές συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς τότε αποδεικνύεται ότι και οι συναρτήσεις $f + g$, $f \cdot g$, λf (όπου $\lambda \in \mathbb{R}$) είναι συνεχείς. Πράγματι ισχύει η εξής πρόταση:

Πρόταση 5.13. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $f, g : (X, \rho) \longrightarrow \mathbb{R}$ πραγματικές συναρτήσεις, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x_0 \in X$. Αν οι f και g είναι συνεχείς στο x_0 τότε*

(i) Το άθροισμα $f + g$ των f και g είναι συνεχής στο x_0.

(ii) Το γινόμενο $f \cdot g$ των f και g είναι συνεχής στο x_0.

(iii) Η συνάρτηση λf είναι συνεχής στο x_0.

(iv) Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$ τότε η $\dfrac{f}{g}$ είναι συνεχής στο x_0.

Απόδειξη.. Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της μεταφοράς και τις γνωστές ιδιότητες που αναφέρονται στις πράξεις και τα όρια των πραγματικών ακολουθιών.
(i) Έστω (x_n) ακολουθία στο X με $x_n \to x_0$. Αρκεί να δειχθεί ότι $(f+g)(x_n) \to (f+g)(x_0)$. Πράγματι αφού οι f, g είναι συνεχείς στο x_0 έχουμε ότι $f(x_n) \to f(x_0)$ και $g(x_n) \to g(x_0)$. Άρα $f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0)$ δηλαδή $(f + g)(x_n) \to (f + g)(x_0)$.
(ii) Ομοίως αν $x_n \to x_0$ τότε $f(x_n) \to f(x_0)$ και $g(x_n) \to g(x_0)$ και άρα $f(x_n)g(x_n) \to f(x_0)g(x_0)$ δηλαδή $(f \cdot g)(x_n) \to (f \cdot g)(x_0)$.
Οι (iii),(iv) αποδεικνύονται ανάλογα. □

Πρόταση 5.14. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $x_0 \in X$. Τότε η πραγματική συνάρτηση $f : (X, \rho) \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \rho(x, x_0)$ είναι συνεχής και ειδικότερα ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με σταθερά $C = 1$.*

Απόδειξη.. Αρκεί να δειχθεί ότι $|f(x) - f(y)| \leq \rho(x, y)$ για όλα τα $x, y \in X$. Πράγματι, έστω $x, y \in X$. Τότε $\rho(x, x_0) \leq \rho(x, y) + \rho(y, x_0)$ δηλαδή $f(x) \leq \rho(x, y) + f(y)$ και άρα

$$f(x) - f(y) \leq \rho(x, y) \tag{1}$$

Επίσης $\rho(y,x_0) \leq \rho(y,x) + \rho(x,x_0)$ δηλαδή $f(y) \leq \rho(x,y) + f(x)$ και άρα

$$f(y) - f(x) \leq \rho(x,y) \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι $|f(x) - f(y)| \leq \rho(x,y)$. $\square$

Η παραπάνω πρόταση γενικεύεται ως εξής. Αν (X,ρ) μετρικός χώρος, $A \subset X$ μη κενό και $x \in X$ ορίζουμε την ***απόσταση του*** x ***από το*** A να είναι $\rho(x,A) = \inf\{\rho(x,z) : z \in A\}$. Παρατηρείστε ότι για κάθε $x \in X$ και A μη κενό υποσύνολο του X ο $\rho(x,A)$ είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός και ότι για κάθε $x \in A$, $\rho(x,A) = 0$.

Πρόταση 5.15. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $\emptyset \neq A \subset X$. Τότε η συνάρτηση $f : (X,\rho) \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \rho(x,A)$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με σταθερά $C = 1$ και συνεπώς είναι συνεχής.*

Απόδειξη.. Όπως και στην προηγούμενη πρόταση πρέπει να δείξουμε ότι $|f(x) - f(y)| \leq \rho(x,y)$ για όλα τα $x,y \in X$. Έστω λοιπόν $x,y \in X$.

Για κάθε $z \in A$ έχουμε ότι $f(x) = \rho(x,A) \leq \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$. Άρα $f(x) - \rho(x,y) \leq \rho(y,z)$ για κάθε $z \in A$, συνεπώς, αφού $\rho(y,A) = \inf\{\rho(y,z) : z \in A\}$, έπεται ότι $f(x) - \rho(x,y) \leq \rho(y,A)$ δηλαδή $f(x) - \rho(x,y) \leq f(y)$. Συνεπώς

$$f(x) - f(y) \leq \rho(x,y). \tag{3}$$

Ομοίως, αντιμεταθέτοντας το x με το y στην παραπάνω απόδειξη, συμπεραίνουμε ότι

$$f(y) - f(x) \leq \rho(x,y) \tag{4}$$

Από τις (3) και (4) έχουμε ότι $|f(x) - f(y)| \leq \rho(x,y)$. $\square$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος (x_n), (y_n) ακολουθίες στο X και $x,y \in X$ με $x_n \to x$ και $y_n \to y$. Αποδείξτε ότι $\rho(x_n,y_n) \to \rho(x,y)$.

2. Δείξτε ότι αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι δυο ακολουθίες σε ένα μετρικό χώρο (X,ρ) και $x \in X$ ώστε $x_n \to x$ και $\rho(x_n,y_n) \to 0$ τότε $y_n \to x$.

3. Έστω (X,ρ_δ) μετρικός χώρος όπου ρ_δ η διακριτή μετρική στο X. Αποδείξτε ότι:

(i) Μία ακολουθία (x_n) στο X είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι τελικά σταθερή.

(ii) Αν (Y,d) είναι τυχόν μετρικός χώρος, κάθε συναρτηση $f : X \longrightarrow Y$ είναι συνεχής.

4. Μία ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σε ένα μετρικό χώρο (X,ρ) συγκλίνει στο $x \in X$ αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει περαιτέρω υπακολουθία που συγκλίνει στο x.

5. Έστω X μη κενό σύνολο, $n \in \mathbb{N}$, και $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1,2,\ldots,n$ ώστε για κάθε $x,y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχει $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ ώστε $f_i(x) \neq f_i(y)$. Δείξτε ότι:

(i) Η $\rho(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |f_i(x) - f_i(y)|$ είναι μετρική στο X.

(ii) Για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ η $f_i : (X, \rho) \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

6. Έστω $f : (X, \rho) \longrightarrow (Y, d)$ και $x \in X$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X με $x_n \to x$ η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία στον (Y, d).

Κεφάλαιο 6

Ανοικτά και κλειστά υποσύνολα μετρικών χώρων.

6.1 Οριακά σημεία

Ορισμός 6.1. Έστω $A \subset X$ όπου (X, ρ) είναι μετρικός χώρος. Ένα σημείο $x \in X$ λέγεται ***οριακό σημείο*** του συνόλου A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$S(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Παρατήρηση. Είναι προφανές ότι κάθε $x \in A$ είναι οριακό σημείο του A. Το γεγονός που καθιστά ενδιαφέρον τον παραπάνω ορισμό είναι η ύπαρξη συνόλων A και σημείων $x \in X$ που ενώ $x \notin A$ εντούτοις το x είναι οριακό σημείο του A. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το ανοικτό διάστημα $(0, 1)$ σαν υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και οι αριθμοί $0, 1$ που είναι οριακά σημεία του $(0, 1)$.

Ορισμός 6.2. Η ***κλειστότητα*** ενός συνόλου A, υποσυνόλου ενός μετρικού χώρου (X, ρ) συμβολίζεται με $\overline{A}$ και ορίζεται ως εξής:

$$\overline{A} = \{x \in X : x \text{ είναι οριακό σημείο του } A\}.$$

Παρατηρήσεις.

1. Όπως προείπαμε στην προηγούμενη παρατήρηση κάθε $x \in A$ είναι οριακό σημείο του A κατά συνέπεια $A \subset \overline{A}$.
2. Η αντιστοίχιση $A \mapsto \overline{A}$ ορίζει μία συνάρτηση από το σύνολο των υποσυνόλων $\mathcal{P}(X)$ στον εαυτό του.
3. Υπάρχουν δύο υποσύνολα οποιουδήποτε μετρικού χώρου (X, ρ) τα οποία έχουν τελείως προσδιορισμένη κλειστότητα. Αυτά είναι το κενό σύνολο $\emptyset$ και ο χώρος X. Πράγματι είναι άμεσο ότι $\overline{X} = X$, δεδομένου ότι περιέχει όλα τα σημεία. Επιπλέον $\overline{\emptyset} = \emptyset$ διότι για κάθε $x \in X$ και κάθε $\varepsilon > 0$ $S(x, \varepsilon) \cap \emptyset = \emptyset$ άρα $x \notin \overline{\emptyset}$.

4. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η κλειστότητα του A αφορά αφ' ενός μεν το σύνολο A αφ' ετέρου τον μετρικό χώρο που αυτό περιέχεται. Παρατηρείστε για παράδειγμα, ότι αν $A = (0,1)$ και $(X,\rho) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ τότε $\overline{A} = [0,1]$ ενώ αν $(X,\rho) = ((0,\infty), |\cdot|)$ τότε $\overline{A} = (0,1]$ και ακόμα αν $(X,\rho) = ((0,1), |\cdot|)$ τότε $\overline{A} = (0,1)$.

Ασκηση 6.1.

1. Δείξτε ότι αν (X,ρ) όπου ρ είναι η διακριτή μετρική σ' ένα σύνολο X, τότε για κάθε $A \subset X$ ισχύει $\overline{A} = A$.

2. Υπολογίστε το $\overline{A}$ όπου A συμβολίζει τα επόμενα σύνολα

   (α) $A = (a,b)$ σαν υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με τη συνήθη καθώς και με τη διακριτή μετρική.

   (β) $A = \mathbb{Q}$, το σύνολο των ρητών στο $\mathbb{R}$.

   (γ) $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ σαν υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένου με την ευκλείδεια μετρική.

3. Δείξτε ότι αν A είναι πεπερασμένο υποσύνολο του X τότε $\overline{A} = A$.

Θεώρημα 6.3. *Η κλειστότητα συνόλων ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *Αν $A \subset B$ τότε $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

2. *$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ (δηλαδή η κλειστότητα της κλειστότητας ενός συνόλου A δεν συνεισφέρει επιπλέον στοιχεία πέραν αυτών του $\overline{A}$).*

Απόδειξη. Έστω ότι $A \subset B$ και $x \in \overline{A}$. Για δείξουμε ότι $x \in \overline{B}$ αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, $S(x,\varepsilon) \cap B \neq \emptyset$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x \in \overline{A}$ έπεται ότι $S(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ και άρα, αφού $A \subset B$ $S(x,\varepsilon) \cap B \neq \emptyset$. Επομένως $x \in \overline{B}$.

Εφόσον $A \subset \overline{A}$ από το (1) έπεται ότι $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$. Για να δείξουμε ότι $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$ αρκεί να θεωρήσουμε x_0 ένα οριακό σημείο του $\overline{A}$ (δηλ. $x_0 \in \overline{\overline{A}}$) και να δείξουμε ότι το x_0 είναι οριακό σημείο του A (δηλ. $x_0 \in \overline{A}$).

Έστω $\varepsilon > 0$. Δεδομένου ότι το x_0 είναι οριακό σημείο του $\overline{A}$, $S(x_0,\varepsilon) \cap \overline{A} \neq \emptyset$, δηλαδή υπάρχει $y_0 \in S(x_0,\varepsilon) \cap \overline{A}$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει y_0 οριακό σημείο του A και $\rho(x_0,y_0) < \varepsilon$. Θέτουμε

$$\varepsilon_1 = \varepsilon - \rho(x_0,y_0) > 0$$

και με απλή εφαρμογή της τριγωνικής ιδιότητας της μετρικής ρ δείχνουμε ότι

$$S(y_0,\varepsilon_1) \subset S(x_0,\varepsilon). \tag{1}$$

Δεδομένου ότι το y_0 είναι οριακό σημείο του A έπεται εξ' ορισμού ότι

$$S(y_0,\varepsilon_1) \cap A \neq \emptyset. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\emptyset \neq S(y_0,\varepsilon_1) \cap A \subset S(x_0,\varepsilon) \cap A.$$

Έχουμε δείξει ότι για δοθέν x_0 οριακό σημείο του $\overline{A}$ (δηλ. $x_0 \in \overline{\overline{A}}$) και για κάθε $\varepsilon > 0$

$$S(x_0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

και άρα $x_0 \in \overline{A}$. Επομένως $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$ και άρα $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ □

6.2 Σημεία συσσώρευσης

Ορισμός 6.4. Ένα σημείο $x \in X$ λέγεται ***σημείο συσσώρευσης*** ενός υποσυνόλου A του X αν για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$A \cap (S(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Παρατηρήση. Το σύμβολο $S(x, \varepsilon) \setminus \{x\}$ δηλώνει την ανοικτή σφαίρα $S(x, \varepsilon)$ χωρίς το κέντρο της x. Η διαφορά μεταξύ ενός οριακού σημείου x_0 και ενός σημείου συσσώρευσης y_0 είναι ότι στη δεύτερη περίπτωση υπάρχει η απαίτηση ότι για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ να υπάρχει $x \in A \cap S(y_0, \varepsilon)$ ώστε $x \neq y_0$ κάτι που δεν απαιτείται για τα οριακά σημεία.

Το επόμενο Θεώρημα αφορά μία σειρά από ισοδύναμες ιδιότητες των σημείων συσσώρευσης ενός συνόλου.

Θεώρημα 6.5. *Έστω A ένα υποσύνολο του μετρικού χώρου (X, ρ) και $x_0 \in X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A.*

2. *Για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $A \cap S(x_0, \varepsilon)$ έχει άπειρα στοιχεία.*

3. *Υπάρχει ακολουθία $(x_n)_n \subset A$ ώστε $x_n \neq x_0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και $x_n \to x_0$.*

Παρατηρήση. Παρατηρείστε ότι με βάση την προηγούμενη παρατήρηση, ο ορισμός του σημείου συσσώρευσης έχει την ισοδύναμη μορφή ότι το σύνολο $S(x_0, \varepsilon) \cap A$ περιέχει ένα τουλάχιστον $x \neq x_0$. Το (2) του Θεωρήματος μας βεβαιώνει ότι το $S(x_0, \varepsilon) \cap A$ θα περιέχει άπειρα στοιχεία του A. Στο ερώτημα που τίθεται φυσιολογικά πώς από την γνώση ότι υπάρχει ένα $x \in S(x_0, \varepsilon) \cap A$ με $x \neq x_0$ προκύπτει ότι υπάρχουν άπειρα τέτοια, η απάντηση βρίσκεται στην παρατήρηση ότι το τυπικά ασθενέστερο ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ και αυτό επιβάλλει το ισχυρότερο.

Απόδειξη του Θεωρήματος. (1)⇒(2). Θα χρησιμοποιήσουμε εις άτοπον επαγωγή. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε το σύνολο $A \cap S(x_0, \varepsilon)$ είναι πεπερασμένο. Έστω ότι

$$A \cap (S(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

όπου n είναι φυσικός αριθμός. Θέτουμε

$$\varepsilon_0 = \min\{\rho(x_0, x_1), \rho(x_0, x_2), \ldots, \rho(x_0, x_n)\}.$$

Δεδομένου ότι κάθε $x_i \neq x_0$ και το σύνολο $\{x_i : i = 1, \dots, n\}$ είναι πεπερασμένο προκύπτει ότι $\varepsilon_0 > 0$. Αλλά τότε

$$A \cap (S(x_0, \varepsilon_0) \setminus \{x_0\}) = \emptyset$$

και αυτό αντιφάσκει με τον ορισμό του σημείου συσσώρευσης. Άρα η αρχική υπόθεση ότι το σύνολο $A \cap S(x_0, \varepsilon)$ είναι πεπερασμένο απορρίπτεται και το (2) έχει αποδειχτεί.

(2)⇒(3). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $x_n \in A \cap S(x_0, \frac{1}{n})$ με $x_n \neq x_0$. Αυτό είναι δυνατό επειδή το $A \cap S(x_0, \frac{1}{n})$ είναι άπειρο. Άμεσα προκύπτει ότι $x_n \to x_0$ και λόγω της επιλογής τους $x_n \neq x_0$.

(3)⇒(1). Έστω $\varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $A \cap (S(x_o, \varepsilon) \setminus \{x_o\})$ είναι μη κενό. Από το (3) επιλέγουμε $(x_n)_n \subset A$, $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Λόγω της σύγκλισης της $(x_n)_n$ στο x_0, για το δοθέν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon)$ ώστε για κάθε $n > n_0(\varepsilon)$, $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$ ή ισοδύναμα $x_n \in S(x_0, \varepsilon)$, άρα $x_n \in A \cap S(x_0, \varepsilon)$ και επειδή $x_n \neq x_0$, ισχύει ότι $x_n \in A \cap (S(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\})$, άρα

$$A \cap (S(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset.$$

□

Μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή της έννοιας του σημείου συσσώρευσης αφορά τα σημεία $x \in \overline{A} \setminus A$ και περιγράφεται από το επόμενο

Πόρισμα 6.6. *Έστω A υποσύνολο του X. Τότε κάθε $x \in \overline{A} \setminus A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A.*

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια του ορισμού του οριακού σημείου και του ότι $x \notin A$. □

Ασκηση 6.2. Δείξτε ότι $x \in \overline{A}$ αν και μόνο αν $\rho(x, A) = 0$.

6.3 Ανοικτά υποσύνολα

Ορισμός 6.7. Ένα υποσύνολο U ενός μετρικού χώρου (X, ρ) λέγεται ανοικτό αν ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε $x \in U$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ωστε $S(x, \varepsilon) \subset U$.

Η έννοια του ανοικτού συνόλου κατέχει κεντρική θέση στη θεωρία μετρικών χώρων και στη συνέχεια θα δούμε ορισμένες ιδιότητες των ανοικτών συνόλων.

Αρχίζουμε με την επόμενη.

Πρόταση 6.8. *Κάθε ανοικτή σφαίρα είναι ανοικτό σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω $S(x_0, \varepsilon)$ ανοιχτή σφαίρα του (X, ρ) και $x \in S(x_0, \varepsilon)$. Θέτουμε $\varepsilon_1 = \varepsilon - \rho(x_0, x)$ που είναι γνήσια μεγαλύτερο του μηδενός. Θα δείξουμε ότι

$$S(x, \varepsilon_1) \subset S(x_0, \varepsilon)$$

το οποίο συνεπάγεται ότι πράγματι η $S(x_0, \varepsilon)$ είναι ανοικτό σύνολο.

Έστω $y \in S(x, \varepsilon_1)$. Τότε $\rho(x, y) < \varepsilon_1 = \varepsilon - \rho(x_0, x)$ και

$$\rho(x_0, y) \leq \rho(x_0, x) + \rho(x, y) < \varepsilon$$

συνεπώς $y \in S(x_0, \varepsilon)$. □

Θεώρημα 6.9 (Θεμελιώδεις ιδιότητες ανοικτών συνόλων)**.** *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τότε*

1. *Τα σύνολα $\emptyset$, X είναι ανοικτά.*

2. *Αν $\{U_i\}_{i=1}^n$ είναι πεπερασμένη οικογένεια από ανοικτά υποσύνολα του X τότε το $\cap_{i=1}^n U_i$ είναι επίσης ανοικτό.*

3. *Αν $\{U_i\}_{i \in I}$ είναι οποιαδήποτε οικογένεια ανοικτών συνόλων, τότε $\cup_{i \in I} U_i$ είναι επίσης ανοικτό.*

Απόδειξη. (1). Το ότι το X είναι ανοικτό είναι άμεσο διότι για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ προφανώς $S(x, \varepsilon) \subset X$. Όσον αφορά το κενό, αυτό επίσης ικανοποιεί τις απαιτήσεις του ορισμού του ανοικτού συνόλου. Πράγματι, αν κάποιο σύνολο A δεν είναι ανοικτό τότε θα υπάρχει κάποιο $x_0 \in A$ ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ να ισχύει $S(x_0, \varepsilon) \not\subset A$. Αλλά βεβαίως δεν υπάρχει δυνατότητα να βρούμε ένα τέτοιο $x_0 \in \emptyset$.

(2). Έστω $U_1, U_2, \ldots, U_n$ ανοικτά υποσύνολα του X. Αν $\cap_{i=1}^n U_i = \emptyset$ τότε από το (1) είναι ανοικτό. Έστω τώρα $x_0 \in \cap_{i=1}^n U_i$. Θα βρούμε $\varepsilon_0 > 0$ ώστε $S(x_0, \varepsilon_0) \subset \cap_{i=1}^n U_i$ ή ισοδύναμα $S(x_0, \varepsilon_0) \subset U_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$.

Πράγματι, επειδή $x_0 \in \cap_{i=1}^n U_i$ έπεται $x_0 \in U$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Άρα για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ υπάρχει $\varepsilon_i > 0$ ώστε $S(x_0, \varepsilon_i) \subset U_i$. Θέτουμε $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n > 0$. Παρατηρούμε ότι

$$S(x_0, \varepsilon_0) \subset S(x_0, \varepsilon_i) \subset U_i$$

για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ και άρα $S(x_0, \varepsilon_0) \subset \cap_{i=1}^n U_i$ που δείχνει ότι $\cap_{i=1}^n U_i$ είναι ανοικτό σύνολο.

(3). Θεωρούμε $\{U_i\}_{i \in I}$ οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X, και έστω $x_0 \in \cup_{i \in I} U_i$. Έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $i_0 \in I$ ώστε $x_0 \in U_{i_0}$. Επειδή το U_{i_0} είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ ώστε $S(x_0, \varepsilon_0) \subset U_{i_0}$. Αλλά $U_{i_0} \subset \cup_{i \in I} U_i$ άρα $S(x_0, \varepsilon_0) \subset \cup_{i \in I} U_i$ που δείχνει ότι πράγματι το $\cup_{i \in I} U_i$ είναι ανοικτό σύνολο. □

6.3.1 Ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$

Ορισμός 6.10. Ένα μη κενό υποσύνολο U του $\mathbb{R}$ λέγεται διάστημα του $\mathbb{R}$ αν για κάθε δύο στοιχεία x, y του U και για κάθε $z \in \mathbb{R}$ ώστε $x < z < y$ συνεπάγεται ότι $z \in U$.

Εύκολα βλέπουμε ότι διαστήματα του $\mathbb{R}$ είναι της μορφής (α, β) , $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$, $[\alpha, \beta]$ όπου $\alpha \neq \beta$.

Ορισμός 6.11. Ένα υποσύνολο V του $\mathbb{R}$ λέγεται ανοικτό αν για κάθε $x \in V$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset V$.

Πρόταση 6.12. *Αν $\alpha \neq \beta$ δείξτε ότι το διάστημα (α, β) είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \leq \alpha < \beta$. Για $\alpha < 0 < \beta$ ή $\alpha < \beta \leq 0$ η απόδειξη γίνεται με παρόμοια επιχειρήματα. Έστω $x \in (\alpha, \beta)$. Θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{x-\alpha, \beta-x\}$. Θα δείξουμε ότι $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (\alpha, \beta)$. Έστω $x-\varepsilon < z < x+\varepsilon$ τότε εύκολα βλέπουμε ότι $x-\varepsilon > \alpha$ και $x+\varepsilon < \beta$ και άρα $z \in (\alpha, \beta)$. Πράγματι, από τον ορισμό του ε, έχουμε ότι $\varepsilon \leq \frac{x-\alpha}{2}$ και $\varepsilon \leq \frac{\beta-x}{2}$. Επομένως, $-\varepsilon > \alpha - x$ και $-\varepsilon > x - \beta$ αντίστοιχα και άρα $\alpha < x-\varepsilon < z < x+\varepsilon < \beta$. □

Παρατηρήση. Έστω U ανοικτό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, ρ). Εξ' ορισμού, για κάθε $x \in U$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $S(x, \varepsilon_x) \subset U$. Είναι σχεδόν άμεσο ότι $U = \cup_{x\in U} S(x, \varepsilon_x)$. Δηλαδή το ανοικτό σύνολο U είναι η ένωση μίας οικογένειας ανοικτών σφαιρών. Με άλλα λόγια τα ανοικτά υποσύνολα του X περιγράφονται σαν ενώσεις ανοικτών σφαιρών. Είναι επίσης εύκολο να δούμε ότι η αναπαράσταση ενός ανοικτού σαν ένωση ανοικτών σφαιρών δεν είναι εν γένει μοναδική. Στο επόμενο Θεώρημα, που παραθέτουμε δίδεται μία ενδιαφέρουσα περιγραφή των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.

Θεώρημα 6.13. *Έστω V ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τότε υπάρχει μία πεπερασμένη ή άπειρη οικογένεια ξένων ανά δύο διαστηματων του $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i\in I}$ ώστε $V = \cup_{i\in I}(\alpha_i, \beta_i)$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε μία διμελή σχέση στο V $\sim$ ώστε για x, y στο V, $x \sim y$ αν $x < y$ και $[x, y] \subset V$ ή $y < x$ και $[y, x] \subset V$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η σχέση $\sim$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο V και ότι $V = \cup_{x\in V}[x]$. Από Πρόταση 2.8 συνεπάγεται ότι η οικογένεια $\{[x]\}_{x\in V}$ είναι μία οικογένεια από ξένα ανα δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και επομένως αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in V$, το σύνολο $[x]$ είναι ένα ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$. Έστω λοιπόν $x \in V$. Πρώτα δείχνουμε ότι η κλάση ισοδυναμίας $[x]$ είναι διάστημα του $\mathbb{R}$. Πράγματι, έστω $\alpha, \beta \in [x]$ και $z \in \mathbb{R}$ ώστε $\alpha < z < \beta$. Διακρίνουμε τις άκόλουθες περιπτώσεις.

1. Αν $\alpha < z < \beta \leq x$ ή $x \leq \alpha < z < \beta$, τότε εύκολα παρατηρούμε ότι επειδή $\alpha, \beta \in [x]$, τότε $[z, x] \subset [\alpha, x] \subset V$ ή $[x, z] \subset [x, \beta] \subset V$ αντίστοιχα. Επομένως, σε κάθε μία περίπτωση έχουμε ότι $z \sim x$ και άρα $z \in [x]$.

2. Αν $\alpha \leq x < z < \beta$ ή $\alpha < z < x \leq \beta$, τότε χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα με την πρώτη περίπτωση έχουμε ότι $[z, x] \subset V$ ή $[x, z] \subset V$ και άρα $z \in [x]$.

Αν δείξουμε ότι το σύνολο $[x]$ είναι της μορφής (α, β) με $\alpha \neq \beta$, τότε απο Πρόταση 6.12 έχουμε το ζητούμενο. Αν υποθέσουμε ότι το σύνολο $[x]$ είναι της μορφής $[\alpha, \beta)$ όπου $\alpha \neq \beta$, τότε επειδή $\alpha \in V$ και το V είναι ανοικτό σύνολο έχουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon) \subset V$. Όμως, για $\alpha-\varepsilon < y < \alpha$, είναι άμεσο ότι $[y, x] \subset (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon) \cup [x] \subset V$ και άρα $y \in [x]$. Αυτό μας οδηγεί σε άτοπο καθώς $y < \alpha = \min[x]$. Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο αν το σύνολο $[x]$ είναι της μορφής $(\alpha, \beta]$ με $\alpha \neq \beta$. □

6.4 Κλειστά υποσύνολα

Πριν προχωρήσουμε στις θεμελιώδεις ιδιότητες των κλειστών συνόλων παραθέτουμε κάποιες ιδιότητες των συμπληρωμάτων συνόλων που θα τις χρησιμοποιήσουμε στις αποδείξεις. Οι ιδιότητες αυτές που ονομάζονται και κανόνες του De Morgan αφορούν τα ακόλουθα ερωτήματα:

Έστω $\{A_i\}_{i\in I}$ μία οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλυ X. Θεωρούμε τα σύνολα

$$\cup_{i\in I}(X\setminus A_i) \text{ ή } \cup_{i\in I} A_i^c$$
$$\text{και } \cap_{i\in I}(X\setminus A_i) \text{ ή } \cap_{i\in I} A_i^c$$

και ζητάμε να βρούμε ποιών συνόλων αυτά είναι συμπληρώματα.

Πρόταση 6.14. *Έστω $\{A_i\}_{i\in I}$ οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου X. Τότε τα επόμενα ισχύουν:*

1. $\cup_{i\in I}(X\setminus A_i) = X\setminus(\cap_{i\in I}A_i)$
2. $\cap_{i\in I}(X\setminus A_I) = X\setminus(\cup_{i\in I}A_i)$

Απόδειξη. Όταν ζητείται να δείξουμε ότι δυο σύνολα A, B είναι ίσα ο πλέον ασφαλής τρόπος είναι να δείξουμε ότι $A\subset B$ και $B\subset A$ απ΄ όπου βεβαίως προκύπτει η ισότητα. Τώρα $A\subset B$ αν για κάθε $x\in A$ μπορούμε να δείξουμε ότι $x\in B$. Αυτή είναι η μέθοδος που ακολουθείται για την απόδειξη των (1) και (2). Δείχνουμε κατ΄ αρχάς την (1).

Βήμα 1ο $\cup_{i\in I}(X\setminus A_i)\subset X\setminus(\cap_{i\in I}A_i)$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} x\in\cup_{i\in I}(X\setminus A_i) &\Rightarrow \exists i_0\in I : x\in X\setminus A_{i_0}\\ &\Rightarrow x\notin A_{i_0}\\ &\Rightarrow x\notin \cap_{i\in I}A_i\\ &\Rightarrow x\in X\setminus\cap_{i\in I}A_i. \end{aligned}$$

Βήμα 2ο $X\setminus(\cap_{i\in I}A_i)\subset\cup_{i\in I}(X\setminus A_i)$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} x\in X\setminus\cap_{i\in I}A_i &\Rightarrow x\notin\cap_{i\in I}A_i\\ &\Rightarrow \exists i_0\in I : x\notin A_{i_0}\\ &\Rightarrow x\in X\setminus A_{i_0}\\ &\Rightarrow x\in\cup_{i\in I}(X\setminus A_i) \end{aligned}$$

Άρα η (1) αποδείχτηκε.

Η (2) χρησιμοποιεί παρόμοια βήματα και η απόδειξή της αφήνεται στον αναγνώστη. □

Ορισμός 6.15. Ένα υποσύνολο F τού μετρικού χώρου (X,ρ) λέγεται κλειστό, αν το συμπλήρωμά του $X \setminus F$ (ή F^c) είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Παραδείγματα. (1). Κάθε μονοσύνολο $\{x\}$ με $x \in X$ είναι κλειστό. Πράγματι, το $X \setminus \{x\}$ είναι ανοικτό, διότι αν $y \in X \setminus \{x\}$ δηλαδή $y \neq x$ και $\varepsilon = \rho(x,y) > 0$ η ανοικτή σφαίρα $S(y,\varepsilon)$ δεν περιέχει το x άρα περιέχεται στο $X \setminus \{x\}$.

(2). Η κλειστή σφαίρα
$$S[x,\varepsilon] = \{y : \rho(x,y) \leq \varepsilon\}$$
είναι κλειστό σύνολο. Έστω $z \in X \setminus S[x,\varepsilon]$. Τότε $\rho(x,z) > \varepsilon$ άρα $\varepsilon_1 = \rho(x,z) - \varepsilon > 0$. Απλή εφαρμογή της τριγωνικής ιδιότητας συνεπάγεται ότι
$$S(z,\varepsilon_1) \cap S[x,\varepsilon] = \emptyset$$
$$\text{άρα } S(z,\varepsilon_1) \subset X \setminus S[s,\varepsilon].$$

Συνεπώς το $X \setminus S[x,\varepsilon]$ είναι ανοικτό και εξ' ορισμού $S[x,\varepsilon]$ είναι κλειστό.

Θεώρημα 6.16 (Θεμελιώδεις ιδιότητες κλειστών συνόλων)**.** *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τα επόμενα ισχύουν:*

1. *Τα σύνολα $\emptyset$ και X είναι κλειστά.*

2. *Αν $\{F_i\}_{i=1}^n$ είναι πεπερασμένη οικογένεια κλειστών τότε $\cup_{i=1}^n F_i$ είναι επίσης κλειστό.*

3. *Αν $\{F_i\}_{i\in I}$ είναι οποιαδήποτε οικογένεια κλειστών, τότε $\cap_{i\in I} F_i$ είναι επισης κλειστό.*

Απόδειξη. (1). Από το αντίστοιχο θεώρημα για ανοικτά σύνολα έχουμε ότι τα σύνολα $\emptyset$, X είναι ανοικτά και επίσης $X \setminus \emptyset = X$, $X \setminus X = \emptyset$, άρα τα $\emptyset$, X είναι κλειστά σαν συμπληρώματα κλειστών.

(2) Επειδή $\{F_i\}_{i=1}^n$ είναι κλειστά, έπεται ότι $\{X \setminus F_i\}_{i=1}^n$ είναι ανοικτά άρα $\cap_{i=1}^n (X \setminus F_i)$ είναι επίσης ανοικτό. Από την προηγούμενη πρόταση $\cap_{i=1}^n (X \setminus F_i) = X \setminus \cup_{i=1}^n F_i$ και άρα $\cup_{i=1}^n F_i$ είναι συμπλήρωμα ανοικτού και εξ ορισμού κλειστό.

(3). Με παρόμοια επιχειρήματα. Η $\{X \setminus F_i\}_{i\in I}$ δηλαδή είναι οικογένεια ανοικτών συνόλων, άρα το $\cup_{i\in I}(X \setminus F_i)$ είναι ανοικτό, συνεπώς το $X \setminus \cup_{i\in I}(X \setminus F_i) = \cap_{i\in I} F_i$ είναι κλειστό σαν συμπλήρωμα ανοικτού. □

Παρατηρήσεις. (1). Είναι χρήσιμο να συγκρίνει ο αναγνώστης τα θεωρήματα που αφορούν τις θεμελιώδεις ιδιότητες των ανοικτών και κλειστών συνόλων και να παρατηρήσει την συμπληρωματικότητα που παρουσιάζουν ως προς τις πράξεις ένωσης και τομής.

(2). Έχοντας ορίσει τα ανοικτά και κλειστά μπορούμε να επιχειρήσουμε μία ποιοτική περιγραφή αυτών. Κατ' αρχάς τα ανοικτά μπορούν να προσδιοριστούν σαν ''μεγάλα'' υποσύνολα του μετρικού χώρου. Βεβαίως το $\emptyset$ είναι ανύπαρκτο και ταυτόχρονα ανοικτό. Αλλά αυτό αποτελεί εξαίρεση. Κάθε άλλο ανοικτό σύνολο περιέχει ανοικτές σφαίρες οι οποίες είναι ''μεγάλα'' σύνολα. Για παράδειγμα οι ανοικτές σφαίρες στο $\mathbb{R}$ είναι ανοικτά διαστήματα, ενώ στον $\mathbb{R}^2$ με την ευκλείδεια μετρική είναι ανοικτοί κύκλοι. Τα κλειστά σαν συμπληρώματα ανοικτών, καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα συνόλων. Έτσι υπάρχουν κλειστά σύνολα που είναι "μεγάλα", για παράδειγμα το $\mathbb{R} \setminus (0,1)$ είναι κλειστό και μεγάλο ενώ τα $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι αναμφίβολα "μικρά" υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αυτό που χαρακτηρίζει τα κλειστά είναι η πληρότητα τους υπό την έννοια ότι περιέχουν τα οριακά τους σημεία όπως θα δείξουμε στη συνέχεια.

(3). Μία ενδιαφέρουσα υποκλάση των ανοικτών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου (X,ρ) είναι αυτά που είναι ταυτόχρονα και ανοικτά και κλειστά. Από τις θεμελειώδεις ιδιότητες προκύπτει ότι σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο τα σύνολα $\emptyset$ και X είναι ταυτόχρονα ανοικτά και κλειστά. Σε μετρικούς χώρους όπως το $\mathbb{R}$ ή ο $\mathbb{R}^n$ με την Ευκλείδεια μετρική, ο X και το $\emptyset$ είναι τα μοναδικά σύνολα με αυτή την ιδιότητα. Αυτό δεν είναι προφανές και η απόδειξή του στηρίζεται στην ιδιότητα της συνεκτικότητας αυτών των χώρων, την οποία δεν θα την ορίσουμε. Στο αντίθετο άκρο βρίσκεται η διακριτή μετρική σ' ένα σύνολο X όπου κάθε $A \subset X$ είναι ανοικτό και κλειστό (η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη). Τέλος από την συμπληρωματικότητα ανοικτών και κλειστών προκύπτει ότι αν $A \subset X$ είναι ανοικτό και κλειστό, την ίδια ιδιότητα έχει και το συμπλήρωμά του.

Πρόταση 6.17. *Έστω F υποσύνολο του μετρικού χώρου (X,ρ). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το σύνολο F είναι κλειστό.*
2. $F = \overline{F}$.

Απόδειξη. (1)⇒(2). Έστω F κλειστό υποσύνολο του X. Από τον ορισμό του κλειστού συνόλου έπεται ότι $X \setminus F$ είναι ανοικτό, άρα αν $x \notin F$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $S(x,\varepsilon) \subset X \setminus F$ ισοδύναμα $S(x,\varepsilon) \cap F = \emptyset$ άρα το x δεν είναι οριακό σημείο του F. Άρα $X \setminus F \subset X \setminus \overline{F}$ συνεπώς $\overline{F} \subset F$. Αφού πάντα ισχύει $F \subset \overline{F}$ έπεται ότι $F = \overline{F}$.

(2)⇒(1). Αρκεί να δείξουμε ότι $X \setminus F$ είναι ανοικτό. Πράγματι, αν $x \in X \setminus F$, τότε $x \notin F$ άρα εξ' υποθέσεως $x \notin \overline{F}$ δηλαδή το x δεν είναι οριακό σημείο του F. Έτσι θα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $S(x,\varepsilon) \cap F = \emptyset$ που είναι ισοδύναμο με το ότι $S(x,\varepsilon) \subset X \setminus F$ άρα $X \setminus F$ ανοικτό συνεπώς το F είναι κλειστό. □

Πόρισμα 6.18. *Έστω A υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X,ρ). Τότε*

$$\overline{A} = \cap\{F : A \subset F,\ F \text{ κλειστό}\}.$$

Δηλαδή η κλειστότητα του A είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το σύνολο A.

Απόδειξη. Από την προηγούμενη πρόταση $\overline{A}$ είναι κλειστό σύνολο και $A \subset \overline{A}$. Άρα

$$\cap\{F : A \subset F,\ F \text{ κλειστό}\} \subset \overline{A}.$$

Αντίστροφα αν F είναι κλειστό και $A \subset F$ από τις ιδιότητες της κλειστότητας προκύπτει ότι $\overline{A} \subset \overline{F} = F$ άρα $\overline{A} \subset F$. Συνεπώς

$$\overline{A} \subset \cap\{F : A \subset F,\ F \text{ κλειστό}\}$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατηρήση. Υπάρχει η δυνατότητα να ορίσουμε την κλειστότητα ενός συνόλου A σαν το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το A, όπως αυτό περιγράφεται στο προηγούμενο πόρισμα. Εν συνεχεία αποδεικνύεται ως ιδιότητα ο ορισμός που δώσαμε για την κλειστότητα. Αυτή η προσέγγιση είναι ισοδύναμη με αυτή που παρουσιάζεται εδώ και ακολουθείται σε ορισμένα βιβλία.

6.5 Χαρακτηρισμοί της συνέχειας συναρτήσεων με χρήση ανοικτών ή κλειστών συνόλων.

Έστω X, Y σύνολα και $f : X \to Y$ συνάρτηση. Για $A \subset Y$ η αντίστροφη εικόνα του A μέσω της f συμβολίζεται με $f^{-1}(A)$ και ισούται με

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}.$$

Ας παρατηρήσουμε ότι η f^{-1} δεν είναι εν γένει συνάρτηση, και βεβαίως δεν συνδέεται με την $1/f$ η οποία ορίζεται για πραγματικές συναρτήσεις. Στο επόμενο θεώρημα δίνουμε ορισμένες ιδιότητες της f^{-1}.

Θεώρημα 6.19. *Έστω $f : X \to Y$, και A, B υποσύνολα του Y. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \tag{1}$$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \tag{2}$$

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A). \tag{3}$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος είναι εύκολη και αφήνεται στον αναγνώστη.

Παρατηρήση. Το περιεχόμενο του προηγούμενου Θεωρήματος είναι ότι η f^{-1} διατηρεί τις πράξεις της ένωσης, τομής και συμπληρώματος. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η f δεν έχει αυτή την ιδιότητα. Ειδικότερα για την τομή ισχύει

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

και δεν είναι δύσκολο ο αναγνώστης να βρεί παραδείγματα συναρτήσεων όπου η προηγούμενη σχέση ισχύει χωρίς ισότητα.

Περνάμε τώρα στη διατύπωση ενός ενδιαφέροντος χαρακτηρισμού της συνέχειας συναρτήσεων μεταξύ μετρικών χώρων.

Θεώρημα 6.20. *Έστω (X, ρ), (Y, d) μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ μία συνάρτηση. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η συνάρτηση f είναι συνεχής.*

2. *Για κάθε ανοικτό $U \subset Y$ το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.*

3. *Για κάθε κλειστό $F \subset Y$ το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. (1)$\Rightarrow$(2). Ας θυμηθούμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in X$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ ώστε

$$f[S_\rho(x_0, \delta)] \subset S_d(f(x_0), \varepsilon).$$

Έστω $U \subset Y$ ανοικτό. Αν $U = \emptyset$ τότε $f^{-1}(U) = \emptyset$ που είναι ανοικτό. Αν $U \neq \emptyset$ και $x \in f^{-1}(U)$ θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε $S_\rho(x, \delta) \subset f^{-1}(U)$. Πράγματι, επειδή U είναι ανοικτό και $f(x) \in U$ έπεται ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $S_d(f(x), \varepsilon) \subset U$. Από τη συνέχεια της f στο σημείο x έπεται ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f[S_\rho(x, \delta)] \subset S_d(x, \varepsilon) \subset U$$

άρα $S_\rho(x, \delta) \subset f^{-1}(U)$ το οποίο εξ' ορισμού σημαίνει ότι $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

(2)$\Rightarrow$(1). Έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεση το $f^{-1}(S_d(f(x_0), \varepsilon))$ είναι ανοικτό ενώ το x_0 ανήκει σε αυτό και άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $S_\rho(x_0, \delta) \subset f^{-1}(S_d(f(x_0), \varepsilon))$ ή ισοδύναμα

$$f[S_\rho(x_0, \delta)] \subset S_d(f(x_0), \varepsilon)$$

δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

(2)$\Rightarrow$(3). Η απόδειξη εδώ είναι συνέπεια του ότι η f^{-1} διατηρεί τα συμπληρώματα. Πράγματι, έστω $F \subset Y$ κλειστό. Θα δείξουμε ότι $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό ή ισοδύναμα ότι $X \setminus f^{-1}(F)$ είναι ανοικτό. Αλλά $X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus F)$ με $Y \setminus F$ ανοικτό, και λόγω της (2), $f^{-1}(Y \setminus F)$ επίσης ανοικτό, άρα $f^{-1}(F)$ κλειστό.

(3)$\Rightarrow$(2). Χρησιμοποιεί παρόμοια επιχειρήματα και η πλήρης απόδειξη αφήνεται στον αναγνώστη. $\square$

Το επόμενο θεώρημα χαρακτηρίζει την σύγκλιση ακολουθιών με χρήση ανοικτών συνόλ-ων.

Θεώρημα 6.21. *Έστω $(x_n)_n$, x στοιχεία του μετρικού χώρου (X, ρ). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η ακολουθία $(x_n)_n$ συγκλίνει στο x.*

2. *Για κάθε U ανοικτό υποσύνολο του X ώστε $x \in U$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n > n_0$ $x_n \in U$.*

Απόδειξη. (1)⇒(2). Έστω U ανοικτό σύνολο και $x \in U$. Από τον ορισμό του ανοικτού συνόλου υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $S(x, \varepsilon) \subset U$. Από την παρατήρηση μετά τον ορισμό της σύγκλισης ακολουθίας θα υπάρχει $n_0(\varepsilon)$ ώστε για κάθε $n > n_0$, $x_n \in S(x, \varepsilon)$. Άρα υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n > n_0$, $x_n \in U$.

(2)⇒(1). Έστω $\varepsilon > 0$. Η σφαίρα $U = S(x, \varepsilon)$ είναι ανοικτό σύνολο, άρα υπάρχει n_0 ώστε για $n > n_0$ $x_n \in S(x, \varepsilon)$ το οποίο είναι ισοδύναμο με το ότι $x_n \to x$. □

Σχόλιο: Τα δύο προηγούμενα θεωρήματα αποτελούν καλή αφορμή για να εξηγήσουμε πώς τα μαθηματικά υιοθετούν πιο αφηρημένες δομές και τις επεξεργάζονται. Το θεώρημα που αφορά τους χαρακτηρισμούς της συνέχειας με χρήση ανοικτών ή κλειστών συνόλων έχει ουσιαστική διαφορά από τον ορισμό της συνέχειας αλλά και την αρχή της μεταφοράς. Αυτή περικλείεται στο ότι οι ποσότητες ε και δ που εμπλέκονται στον ορισμό της συνέχειας έχουν αντικατασταθεί από την απλή διατύπωση ότι η f αντιστρέφει ανοικτά υποσύνολα του Y σε ανοικτά του X και αντίστοιχα για τα κλειστά. Αυτό σημαίνει ότι αν υπάρχει η έννοια του ανοικτού ή κλειστού συνόλου, τότε μπορούμε να έχουμε και έννοια συνέχειας κατά τρόπο ώστε να επεκτείνεται η συνέχεια συναρτήσεων μεταξύ μετρικών χώρων.

Για να γίνουμε πιό συγκεκριμμένοι, παραθέτουμε τον ορισμό της τοπολογίας και του τοπολογικού χώρου.

Ορισμός 6.22. Έστω X σύνολο και $\mathcal{T}$ υποσύνολο του συνόλου $\mathcal{P}(X)$ των υποσυνόλων του X. Η οικογένεια $\mathcal{T}$ λέγεται τοπολογία, αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. Τα σύνολα $\emptyset$ και X ανήκουν στην $\mathcal{T}$.
2. Αν $\{U_i\}_{i=1}^n$ πεπερασμένη επιλογή στοιχείων της $\mathcal{T}$ τότε το $\cap_{i=1}^n U_i$ ανήκει στήν $\mathcal{T}$.
3. Αν $\{U_i\}_{i\in I}$ είναι οικογένεια στοιχείων της $\mathcal{T}$ τότε το σύνολο $\cup_{i\in I} U_i$ ανήκει στην $\mathcal{T}$.

Ορισμός 6.23. Τα στοιχεία μίας τοπολογίας $\mathcal{T}$ λέγονται ανοικτά σύνολα της $\mathcal{T}$ ενώ το ζεύγος $(X, \mathcal{T})$ λέγεται τοπολογικός χώρος.

Ορισμός 6.24. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Ένα F υποσύνολο του X λέγεται κλειστό αν $X \setminus F \in \mathcal{T}$ (δηλαδη αν το $X \setminus F$ είναι ανοικτό).

Θεώρημα 6.25. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Τα κλειστά υποσύνολά του ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *Τα σύνολα $\emptyset$ και X είναι κλειστά.*
2. *Αν $\{F_i\}_{=1}^n$ είναι πεπερασμένη οικογένεια κλειστών τότε $\cup_{i=1}^n F_i$ είναι επέσης κλειστό.*
3. *Αν $\{F_i\}_{i\in I}$ είναι οικογένεια κλειστών τότε $\cap_{i\in I} F_i$ είναι επίσης κλειστό.*

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος είναι ακριβώς η ίδια με αυτή του θεωρήματος των θεμελιωδών ιδιοτήτων κλειστών υποσυνόλων σε μετρικούς χώρους.

Παρατηρήσεις. (1). Παρατηρώντας τον ορισμό των ανοικτών συνόλων της τοπολογίας $\mathcal{T}$ βλέπουμε ότι αυτός ταυτίζεται με τις θεμελιώδεις ιδιότητες των ανοικτών συνόλων ενός μετρικού χώρου. Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο $\mathcal{T}$ των ανοικτών συνόλων ενός μετρικού χώρου, τα οποία βεβαίως έχουν οριστεί με άλλο τρόπο, αποτελεί μία τοπολογία. Άρα η έννοια του τοπολογικού χώρου επεκτείνει αυτή του μετρικού χώρου κατά τρόπο ουσιαστικό δεδομένου ότι δεν έχει την οποιαδήποτε αναφορά σε αποστάσεις μεταξύ στοιχείων ή οποιαδήποτε αριθμητική σχέση αυτών.

(2). Η μικρότερη τοπολογία που ορίζεται σε οποιοδήποτε σύνολο είναι η $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$. Αν το σύνολο X έχει δύο τουλάχιστον στοιχεία τότε είναι εύκολο (άσκηση) να δούμε ότι δεν υπάρχει μετρική ρ στον X ώστε να έχει τα ίδια ανοικτά με αυτά της τοπολογίας $\mathcal{T}$. Άρα η έννοια του τοπολογικού χώρου είναι γνήσια ευρύτερη από αυτή του μετρικού χώρου.

(3). Για να θεωρηθεί η έννοια του τοπολογικού χώρου μέρος της αφηρημένης ανάλυσης θα πρέπει να μας δίνει την δυνατότητα να ορίσουμε συνέχεια συναρτήσεων και σύγκλιση ακολουθιών. Αυτό περιέχεται στούς ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 6.26. Έστω $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ τοπολογικοί χώροι. Μία συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται συνεχής αν για κάθε $U \subset Y$ ανοικτό (δηλ. $U \in \mathcal{S}$) το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο X (δηλ. $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.

Παρατηρείστε ότι οι συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων ικανοποιούν τον ορισμό της συνέχειας μεταξύ τοπολογικών χώρων και κατά συνέπεια ο ορισμός της συνέχειας συναρτήσεων μεταξύ τοπολογικών χώρων επεκτείνει τον αντίστοιχο μεταξύ μετρικών χώρων. Αντίστοιχα ισχύουν και για τον ορισμό της σύγκλισης ακολουθιών που είναι ο επόμενος.

Ορισμός 6.27. Έστω $(x_n)_n$, x στοιχεία του $(X, \mathcal{T})$. Η ακολουθία $(x_n)_n$ συγκλίνει στο x αν για κάθε U ανοικτό με $x \in U$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $x_n \in U$.

Παρατήρηση. Η θεωρία τοπολογικών χώρων, αποτελεί σημαντικό μέρος της σύγχρονης ανάλυσης και συνδέεται ισχυρά με την γραμμική και μη γραμμική ανάλυση.

6.6 Ισοδύναμες μετρικές

Όπως φαίνεται και από τα παραδείγματα που έχουμε δώσει μετά τον ορισμό των μετρικών χώρων, σ' ένα σύνολο X μπορούν να οριστούν περισσότερες από μία μετρικές. Για παράδειγμα θυμηθείτε τις μετρικές που ορίζονται στον $\mathbb{R}^k$ από τις p-νόρμες, για $1 \leq p \leq \infty$. Στη συνέχεια θα συζητήσουμε με συντομία την έννοια των ισοδύναμων μετρικών που ορίζονται σ' ένα σύνολο.

Στα επόμενα με $I : X \to X$ θα συμβολίζουμε την ταυτοτική συνάρτηση του συνόλου X δηλαδή, $I(x) = x$ για κάθε $x \in X$.

Ορισμός 6.28. Έστω X σύνολο εφοδιασμένο με δύο μετρικές ρ_1 και ρ_2. Οι μετρικές ρ_1, ρ_2 λέγονται ισοδύναμες, αν η ταυτοτική συνάρτηση

$$I : (X, \rho_1) \to (X, \rho_2)$$

είναι αμφισυνεχής (δηλαδή $I : (X, \rho_1) \to (X, \rho_2)$ είναι συνεχής και $I : (X, \rho_2) \to (X, \rho_1)$ είναι επίσης συνεχής).

Πρίν προχωρήσουμε σε χαρακτηρισμούς των ισοδύναμων μετρικών, ας δούμε ένα παράδειγμα δύο μετρικών στο $\mathbb{R}$ που δεν είναι ισοδύναμες.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την συνήθη μετρική $\rho_{|\cdot|}$ στο $\mathbb{R}$ και επίσης την διακριτή μετρική d στο ίδιο σύνολο. Ας θυμηθούμε ότι τα μονοσύνολα $\{t\}$, $t \in \mathbb{R}$ είναι ανοικτές σφαίρες ως προς την μετρική d και κατά συνέπεια, κάθε $A \subset \mathbb{R}$ είναι d-ανοικτό. Έστω τώρα

$$I : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, \rho_{|\cdot|}).$$

Η I είναι συνεχής, διότι αν $U \subset \mathbb{R}$ είναι $\rho_{|\cdot|}$-ανοικτό, το $U = I^{-1}(U)$ είναι d-ανοικτό. Αντίθετα, η

$$I : (\mathbb{R}, \rho_{|\cdot|}) \to (\mathbb{R}, d)$$

δεν είναι συνεχής. Για παράδειγμα το $\{t\}$ είναι d-ανοικτό, ενώ δεν είναι $\rho_{|\cdot|}$-ανοικτό. Άρα οι δύο μετρικές δεν είναι ισοδύναμες.

Θεώρημα 6.29 (1ος χαρακτηρισμός ισοδυνάμων μετρικών)**.** *Έστω (X, ρ_1), (X, ρ_2) δύο μετρικές, σ΄ ένα σύνολο X. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *Οι ρ_1, ρ_2 είναι ισοδύναμες.*
2. *Αν $\mathcal{T}_{\rho_1}$, $\mathcal{T}_{\rho_2}$ συμβολίζουν τα ανοικτά ως προς τις δύο μετρικές, τότε $\mathcal{T}_{\rho_1} = \mathcal{T}_{\rho_2}$. (Δηλαδή, ένα $U \subset X$ είναι ρ_1-ανοικτό αν και μόνο αν είναι ρ_2-ανοικτό).*
3. *Ένα $F \subset X$ είναι ρ_1-κλειστό, αν και μόνο αν είναι ρ_2-κλειστό.*

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι άμεση από τον ορισμό των ισοδυνάμων μετρικών (δηλαδή η $I : (X, \rho_1) \to (X, \rho_2)$ είναι αμφισυνεχής) και του χαρακτηρισμού της συνέχειας με χρήση των ανοικτών ή των κλειστών συνόλων.

Παρατηρήση. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι όταν λέμε ότι κάθε U ρ_1-ανοικτό είναι και ρ_2-ανοικτό και αντίστροφα δεν εννοούμε ότι κάθε ρ_1-ανοικτή σφαίρα είναι και ρ_2-ανοικτή σφαίρα ή αντίστροφα.

Ο επόμενος χαρακτηρισμός των ισοδυνάμων μετρικών είναι επίσης συνέπεια αντίστοιχων χαρακτηρισμών συνέχειας.

Θεώρημα 6.30 (2ος χαρακτηρισμός ισοδυνάμων μετρικών)**.** *Έστω (X, ρ_1), (X, ρ_2) δύο μετρικές σ΄ ένα σύνολο X. Τα επόμενα είναι εσοδύναμα*

1. *Οι μετρικές* ρ_1 *και* ρ_2 *είναι ισοδύναμες.*

2. *Για κάθε* $x \in X$ *και* $\varepsilon > 0$ *υπάρχουν* $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ *ώστε* $S_{\rho_1}(x, \delta_1) \subset S_{\rho_2}(x, \varepsilon)$ *και* $S_{\rho_2}(x, \delta_2) \subset S_{\rho_1}(x, \varepsilon)$.

3. *Για κάθε* $(x_n)_n$, x *στοιχεία του* X, *ισχύει* $x_n \xrightarrow{\rho_1} x$ *αν και μόνο αν* $x_n \xrightarrow{\rho_2} x$.

Η συνθήκη (2), περιγράφει την αμφισυνέχεια της ταυτοτικής $I : (X, \rho_1) \to (X, \rho_2)$ με βάση τον αρχικό ορισμό της συνέχειας, ενώ η (3) κάνει το ίδιο με βάση την αρχή της μεταφοράς.

Θα ολοκληρώσουμε την παράγραφο των ισοδυνάμων μετρικών με δύο ενδιαφέρουσες εφαρμογές όσων αναπτύξαμε προηγουμένως.

Ας θυμηθούμε ότι στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^k$ ορίζονται οι p-νόρμες για $1 \leq p \leq \infty$ και με την βοήθεια αυτών οι p-μετρικές που συμβολίζονται με ρ_p.

Λήμμα 6.31. *Αν* $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ *είναι διανύσματα του* $\mathbb{R}^k$ *και* $1 \leq p < \infty$ *τότε*

$$\rho_\infty(\vec{x}, \vec{y}) \leq \rho_p(\vec{x}, \vec{y}) \leq k \cdot \rho_\infty(\vec{x}, \vec{y}).$$

Απόδειξη.

$$\rho_\infty(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq k} \{|x_i - y_i|\}$$
$$\rho_p(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|^p \Big)^{1/p}$$

Επίσης $\vec{x} - \vec{y} = \sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)\vec{e}_i$ και άρα

$$\begin{aligned} \|\vec{x} - \vec{y}\|_p &= \| \sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)\vec{e}_i \|_p \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} \|(x_i - y_i)\vec{e}_i\|_p \\ &= \sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|. \end{aligned}$$

Άρα

$$
\begin{aligned}
\rho_\infty(\vec{x},\vec{y}) &= \max_{1\le i\le k}\{|x_i-y_i|\} \\
&\le \Big(\sum_{i=1}^{k}|x_i-y_i|^p\Big)^{1/p} \\
&= \rho_p(\vec{x},\vec{y}) \\
&\le \sum_{i=1}^{k}|x_i-y_i| \\
&\le k\cdot \max_{1\le i\le k}\{|x_i-y_i|\} \\
&= k\cdot\rho_\infty(\vec{x},\vec{y})
\end{aligned}
$$

□

Θεώρημα 6.32. *Η σχέση "Οι μετρικές ρ_1, ρ_2 είναι ισοδύναμεσ" είναι μεταβατική. Δηλαδή, αν ρ_1, ρ_2, ρ_3 είναι τρεις μετρικές σε ένα σύνολο X και ρ_1, ρ_2 είναι ισοδύναμες, ρ_2, ρ_3 είναι ισοδύναμες, τότε και ρ_1, ρ_3 είναι επίσης ισοδύναμες.*

Απόδειξη. Η $I : (X,\rho_1) \to (X,\rho_3)$ γράφεται ως $(X,\rho_1) \xrightarrow{I} (X,\rho_2) \xrightarrow{I} (X,\rho_3)$ άρα είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών. Παρόμοια η $I : (X,\rho_3) \to (X,\rho_1)$ γράφεται ως $(X,\rho_3) \xrightarrow{I} (X,\rho_2) \xrightarrow{I} (X,\rho_1)$ και για ίδιους λόγους είναι συνεχής, άρα η $I : (X,\rho_1) \to (X,\rho_3)$ είναι αμφισυνεχής. □

Θεώρημα 6.33. *Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $1 \le p < q \le \infty$. Τότε οι μετρικές $(\mathbb{R}^k, \rho_p)$, $(\mathbb{R}^k, \rho_q)$ είναι ισοδύναμες*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι για κάθε $1 \le p < \infty$ η ρ_p στον $\mathbb{R}^k$ είναι ισοδύναμη με την ρ_∞. Αν αυτό έχει δειχτεί, τότε από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει η ισοδυναμία των ρ_p, ρ_q για $1 \le p < q \le \infty$. Με βάση τον ορισμό της ισοδυναμίας μετρικών, αρκεί να δείξουμε ότι

$$
\begin{aligned}
&I : (\mathbb{R}^k, \rho_p) \to (\mathbb{R}^k, \rho_\infty) \text{ και} \\
&I : (\mathbb{R}^k, \rho_\infty) \to (\mathbb{R}^k, \rho_p)
\end{aligned}
$$

είναι συνεχείς.

Από το λήμμα 6.31, έπεται ότι η πρώτη συνάρτηση είναι 1-Lipschitz και η δεύτερη k-Lipschitz, άρα και οι δύο είναι συνεχείς. Συνεπώς η $I : (\mathbb{R}^k, \rho_p) \to (\mathbb{R}^k, \rho_\infty)$ είναι αμφισυνεχής, και εξ' ορισμού οι ρ_p, ρ_∞ είναι ισοδύναμες. □

Παρατηρήσεις. (1). Το περιεχόμενο του προηγούμενου θεωρήματος είναι ότι ενώ οι μετρικές ρ_p, $1 \le p \le +\infty$, στον $\mathbb{R}^k$ διαφέρουν μεταξύ τους γεωμετρικά ενώ από τοπολογικής άποψης ταυτίζονται πλήρως. Έτσι οι χαρακτηρισμοί σύγκλισης ακολουθιών και συνέχειας συναρτήσεων που ισχύουν για την ευκλείδεια μετρική στον $\mathbb{R}^k$ επεκτείνονται και στις υπόλοιπες.

(2). Πρέπει να αναφέρουμε ότι αν θεωρήσουμε τις μετρικές ρ_p στον διανυσματικό χώρο $c_{00}(\mathbb{N})$ των τελικά μηδενικών ακολουθιών ο οποίος είναι απειροδιάστατος, τότε χάνεται το φαινόμενο ισοδυναμίας αυτών. Δηλαδή, αν $1 \leq p < q \leq \infty$ τότε οι ρ_p και ρ_q δεν είναι ισοδύναμες στον $(c_{00}(\mathbb{N})$.

Ορισμός 6.34. (1). Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subset X$ μη κενό. Η ***διάμετρος του*** A συμβολίζεται με $\mathrm{diam}(A)$ και ισούται με

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\}.$$

Είναι σαφές ότι $\mathrm{diam}(A)$ μπορεί να πάρει την τιμή ∞. Επίσης ορίζουμε $\mathrm{diam}(\emptyset) = 0$.

(2). Ένα $A \subset X$ λέγεται ***φραγμένο*** αν $\mathrm{diam}(A) < \infty$.

(3). Η μετρική ρ λέγεται φραγμένη, αν $\mathrm{diam}(X) < \infty$.

Πρόταση 6.35. *Για κάθε A υποσύνολο του X,* $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\overline{A})$.

Απόδειξη. Αν $A = \emptyset$ τότε και $\overline{A} = \emptyset$ και άρα $\mathrm{diam}(A) = 0 = \mathrm{diam}(\overline{A})$. Ας παρατηρήσουμε ότι αν $A \subset B$ τότε $\mathrm{diam}(A) \leq \mathrm{diam}(B)$. Άρα αν $\mathrm{diam}(A) = \infty$ τότε και $\mathrm{diam}(\overline{A}) = \infty$ και η πρόταση έχει δειχθεί.

Έστω τώρα $A \neq \emptyset$ με $\mathrm{diam}(A) < \infty$. Από την προηγούμενη παρατήρηση είναι άμεσο ότι $\mathrm{diam}(A) \leq \mathrm{diam}(\overline{A})$. Συνεπώς αρκεί να δειχθεί ότι $\mathrm{diam}(\overline{A}) \leq \mathrm{diam}(A)$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, $\mathrm{diam}(\overline{A}) \leq \mathrm{diam}(A) + \varepsilon$. Έστω $\varepsilon > 0$ και $x, y \in \overline{A}$. Τότε από τον ορισμό του $\overline{A}$ έπεται ότι υπάρχουν $x', y' \in A$ ώστε $x' \in S(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A$ και $y' \in S(y, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A$. Απλή εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας συνεπάγεται ότι

$$\rho(x, y) \leq \rho(x', y') + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

και άρα αφού $\rho(x', y') \leq \mathrm{diam}(A)$ έχουμε ότι $\rho(x, y) \leq \mathrm{diam}(A) + \varepsilon$. Επειδή αυτό συμβαίνει για κάθε $x, y \in \overline{A}$ έπεται ότι

$$\mathrm{diam}(\overline{A}) = \sup\{\rho(x, y) : \ x, y \in \overline{A}\} \leq \mathrm{diam}(A) + \varepsilon.$$

□

Λήμμα 6.36. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Ορίζουμε*

$$\rho_1(x, y) = \min\{\rho(x, y), 1\}.$$

Τότε η ρ_1 είναι επίσης μετρική στον X που επιπλέον είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Αφήνεται στον αναγνώστη. □

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι για κάθε μετρική ρ που ορίζεται σ΄ ένα σύνολο X υπάρχει ισοδύναμη μετρική ρ_1 η οποία είναι φραγμένη.

Θεώρημα 6.37. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και ρ_1 η μετρική που ορίζεται με χρήση της μετρικής ρ στο προηγούμενο λήμμα. Τότε οι μετικές ρ, ρ_1 είναι ισοδύναμες.*

Απόδειξη. Αφήνεται στον αναγνώστη. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δώστε παράδειγμα ενός μετρικού χώρου (X,ρ), $x_1, x_2 \in X$ και $0 < r_1 < r_2$ ώστε $S(x_2, r_2) \subset S(x_1, r_1)$.

2. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $A \subset X$ και U ανοικτό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι αν $U \cap \overline{A} \neq \emptyset$ τότε $U \cap A \neq \emptyset$.

3. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $A \subset X$ και $x \in X$. Δείξτε ότι $x \in \overline{A}$ αν και μόνο αν $\rho(x, A) = 0$.

4. Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_n$ διάφορα ανά δύο στοιχεία ενός μετρικού χώρου (X,ρ). Δείξτε ότι υπάρχουν $U_1, U_2, \ldots, U_n$ ανοικτά και ξένα ανά δύο υποσύνολα του X ώστε $x_i \in U_i$ για $i = 1, 2, \ldots, n$.

5. Δώστε παράδειγμα ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σε έναν κατάλληλο μετρικό χώρο για την οποία δεν ικανοποιείται το συμπέρασμα της προηγούμενης άσκησης.

6. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $x \in X$. Δείξτε ότι αν $\operatorname{int}\{x\} = \emptyset$ (για τον ορισμό του $\operatorname{int} A$, $A \subset X$ δείτε το Κεφάλαιο 5) τότε το x είναι σημείο συσσώρευσης του X.

7. Αποδείξτε το Λήμμα 6.36.

8. Έστω X πεπερασμένο σύνολο. Δείξτε ότι κάθε μετρική ρ στο X είναι ισοδύναμη με τη διακριτή μετρική.

9. Έστω F, G κλειστά μη κενά και ξένα υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X,ρ). Ορίζουμε

$$f(x) = \frac{\rho(x,F)}{\rho(x,F) + \rho(x,G)} \qquad \text{για κάθε } x \in X.$$

Δείξτε ότι:

(i) Η f είναι συνεχής, $f(x) = 0$ για κάθε $x \in F$ και $f(x) = 1$ για κάθε $x \in G$.

(ii) Υπάρχουν U, V ανοικτά υποσύνολα του X με $U \cap V = \emptyset$ ώστε $F \subset U$ και $G \subset V$.

10. Για δύο μη κενά υποσύνολα A, B ενός μετρικού χώρου (X,ρ) η ***απόσταση*** του A από το B είναι ο πραγματικός αριθμός

$$\rho(A,B) = \inf\{\rho(x,y) :\ x \in A,\ y \in B\}.$$

Απόδείξτε ότι $\rho(A,B) = \rho(\overline{A}, \overline{B})$ για οποιαδήποτε μη κενά υποσύνολα του X.

Κεφάλαιο 7

Πυκνά σύνολα και Διαχωρίσιμοι Μετρικοί Χώροι

7.1 Αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα. Το λήμμα Zorn.

Είναι χρήσιμο για τα επόμενα να υπενθυμίσουμε μερικές βασικές έννοιες της Θεωρίας Συνόλων. Αν $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών τότε ένα σύνολο A καλείται ***αριθμήσιμο*** αν είναι πεπερασμένο ή υπάρχει απεικόνιση $f : \mathbb{N} \to A$ *ένα-προσ-ένα* και επί. Ένα σύνολο θα καλείται ***υπεραριθμήσιμο*** αν δεν είναι αριθμήσιμο. Άμεσο είναι ότι ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο είναι άπειρο και μάλιστα περιέχει ένα άπειρο αριθμήσιμο γνήσιο υποσύνολο.

Το επόμενο θεώρημα δίνει ένα χαρακτηρισμό των αριθμήσιμων συνόλων.

Θεώρημα 7.1. *Έστω A ένα μη κενό σύνολο. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*
(i) Το A είναι αριθμήσιμο.
(ii) Υπάρχει απεικόνιση $f : \mathbb{N} \to A$ επί.
(iii) Υπάρχει απεικόνιση $g : A \to \mathbb{N}$ ένα-προσ-ένα.

Από το παραπάνω θεώρημα έχουμε τα εξής πορίσματα.

Πόρισμα 7.2. *Κάθε υποσύνολο ενός αριθμήσιμου συνόλου είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Έστω $B \subset A$ όπου A αριθμήσιμο. Αφού το A είναι αριθμήσιμο, από τον ορισμό του αριθμήσιμου συνόλου υπάρχει απεικόνιση $g : A \to \mathbb{N}$ *ένα-προσ-ένα* και *επί.* Αν $g_{|B}$ είναι ο περιορισμός της g στο B τότε η $g_{|B} : B \to \mathbb{N}$ είναι *ένα-προσ-ένα* άρα από το (iii)⇒(i) του παραπάνω θεωρήματος έχουμε ότι το B είναι αριθμήσιμο. □

Πόρισμα 7.3. *Το σύνολο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Έστω $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με $g(n,m) = 2^n \cdot 3^m$. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η g είναι *ένα-προσ-ένα*. Άρα από το Θεώρημα 7.1 το $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο. □

Πόρισμα 7.4. *Τα σύνολα $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}^-$ των θετικών και αρνητικών ρητών είναι αριθμήσιμα.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι $\mathbb{Q}^+ = \{\frac{n}{m} : (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ και n, m πρώτοι μεταξύ τους$\}$. Η απεικόνιση $g : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}$ με $g(\frac{n}{m}) = 2^n \cdot 3^m$ είναι *ένα-προσ-ένα* και άρα το $\mathbb{Q}^+$ είναι αριθμήσιμο. Όμοια για το $\mathbb{Q}^-$. □

Θεώρημα 7.5. *Αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω I αριθμήσιμο σύνολο και $\{A_n\}_{n\in I}$ οικογένεια αριθμησίμων συνόλων. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $I \neq \emptyset$ και $A_n \neq \emptyset$ για κάθε $n \in I$. Αφού A_n αριθμήσιμο υπάρχει $f_n : \mathbb{N} \to A_n$ *επί*. Ομοίως υπάρχει $g : \mathbb{N} \to I$ *επί*. Η απεικόνιση

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in I} A_n \quad \text{με} \quad g(n,m) = f_{g(n)}(m)$$

είναι εύκολο να δειχθεί ότι είναι *επί*. Από το Πόρισμα 7.3 και το Θεώρημα 7.1 προκύπτει ότι η $\bigcup_{n\in I} A_n$ είναι αριθμήσιμο σύνολο. □

Πόρισμα 7.6. *Το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ και των ακεραίων $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμα.*

Απόδειξη. Επειδή $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$ αρκεί να δειχθεί ότι το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο. Έχουμε $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$ και το συμπέρασμα έπεται από το Πόρισμα 7.4 και το Θεώρημα 7.5. □

Θεώρημα 7.7. *Πεπερασμένο γινόμενο αριθμησίμων συνόλων είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Ας δείξουμε πρώτα ότι το γινόμενο δύο αριθμησίμων συνόλων A και B είναι αριθμήσιμο. Αν $A = \emptyset$ ή $B = \emptyset$ τότε $A \times B = \emptyset$ και άρα είναι αριθμήσιμο. Έστω A, B μη κενά. Τότε υπάρχουν $h : \mathbb{N} \to A$ και $g : \mathbb{N} \to B$ *επί*. Τότε η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times B$ με $f(n,m) = (h(n), g(m))$ είναι *επί*, και άρα αφού το $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο το ίδιο ισχύει και για το $A \times B$. Η γενική περίπτωση έπεται με επαγωγή. □

Πόρισμα 7.8. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $\mathbb{Q}^n$ είναι αριθμήσιμο.*

Αριθμήσιμα γινόμενα αριθμησίμων συνόλων δεν είναι κατανάγκη αριθμήσιμα π.χ αποδεικνύεται ότι το σύνολο $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(x_n) : x_n = 0 \text{ ή } x_n = 1\}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Επίσης υπεραριθμήσιμο είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ καθώς επίσης και το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A : A \subset \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{N}$.

Το ***Λήμμα του Zorn*** είναι ένα αποδεικτικό εργαλείο (απ΄ όπου και η ονομασία του ως ‘‘Λήμμα’’) που εξυπηρετεί παρόμοιες ανάγκες όπως η Μαθηματική επαγωγή. Για να το διατυπώσουμε είναι απαραίτητοι μερικοί ορισμοί. Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μία διμελής σχέση $\leq$ στο X καλείται ***μερική διάταξη*** στο X αν είναι αυτοπαθής ($x \leq x$, για όλα τα $x \in X$), μεταβατική (για όλα τα $x, y, z \in X$ αν $x \leq y$ και $y \leq z$ τότε $x \leq z$) και αντισυμμετρική (για όλα τα $x, y \in X$ αν $x \leq y$ και $y \leq x$ τότε $x = y$). Αν $\leq$ είναι μία σχέση μερικής διάταξης στο X τότε ο $(X, \leq)$ (ή απλά ο X) καλείται ***μερικά διατεταγμένος χώρος***. Ένα υποσύνολο C του $(X, \leq)$ καλείται ***αλυσίδα*** του X αν οποιαδήποτε δύο στοιχεία του C είναι συγκρίσιμα ως προς την $\leq$, δηλαδή για όλα τα $x, y \in C$ είτε $x \leq y$ είτε $y \leq x$. Αν A υποσύνολο του διατεταγμένου χώρου X, τότε ένα στοιχείο M του X καλείται ***άνω φράγμα*** του A αν για όλα τα $a \in A$ έχουμε ότι $a \leq M$. Τέλος ένα στοιχείο m του X καλείται ***μεγιστικό*** αν κανένα στοιχείο του X δεν είναι γνήσια μεγαλυτερό του, δηλαδή αν $x \in X$ και $m \leq x$ τότε $m = x$.

ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ ZORN. Έστω $(X, \leq)$ μερικά διατεταγμένος χώρος. Αν κάθε αλυσίδα του X έχει άνω φράγμα τότε ο X περιέχει ένα τουλάχιστον μεγιστικό στοιχείο.

7.2 Πυκνά υποσύνολα μετρικών χώρων και διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι.

Ορισμός 7.9. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $D \subset X$. Το D λέγεται ***πυκνό*** υποσύνολο του X αν $\overline{D} = X$.

Η επόμενη πρόταση χαρακτηρίζει τα πυκνά υποσύνολα του X.

Πρόταση 7.10. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $D \subset X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*
(i) Το D είναι πυκνό στον X.
(ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $x \in X$ υπάρχει $y \in D$ ώστε $\rho(x, y) < \varepsilon$.
(iii) Για κάθε $x \in X$ υπάρχει ακολουθία (y_n) στο D ώστε $y_n \to x$.
(iv) Για κάθε ανοικτή σφαίρα $S(x, \varepsilon)$ του X, $D \cap S(x, \varepsilon) \neq \emptyset$.
(v) Για κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο U του X, $U \cap D \neq \emptyset$.

Απόδειξη. (i)⇒(ii). Έστω $x \in X$. Αφού το D είναι πυκνό υποσύνολο του X έχουμε ότι $X = \overline{D}$. Άρα το $x \in \overline{D}$, δηλαδή είναι οριακό σημείο του D. Συνεπώς για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $y \in D$ ώστε $y \in S(x, \varepsilon)$.

(ii)⇒(iii) Έστω $x \in X$. Τότε για $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ έχουμε ότι υπάρχει $y_n \in D$ ώστε $\rho(x, y_n) < \frac{1}{n}$. Άρα $\rho(x, y_n) \to 0$ οπότε $y_n \to x$.

(iii)⇒(iv) Έστω $\varepsilon > 0, x \in X$ και (y_n) ακολουθία στο D ώστε $y_n \to x$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $\rho(x, y_n) < \varepsilon$ οπότε $y_n \in S(x, \varepsilon)$.

(iv)⇒(v) Έστω $\mathcal{U}$ ανοικτό μη κενό. Τότε υπάρχει $x \in \mathcal{U}$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $S(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$. Αφού $D \cap S(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ έπεται ότι και $D \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$.

(v)⇒(i) Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Τότε η $S(x, \varepsilon)$ είναι ανοικτό μη κενό υποσύνολο του X και άρα $S(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$. Άρα το x είναι οριακό σημείο του D. Αφού αυτό συμβαίνει για κάθε $x \in X$ έχουμε ότι $X \subset \overline{D}$. Επειδή $\overline{D} \subset X$, έπεται ότι $\overline{D} = X$. □

Παραδείγματα. (i) Το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Πράγματι από την ''πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$'' έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ το ανοικτό διάστημα $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ περιέχει τουλάχιστον ένα ρητό.

(ii) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ το $\mathbb{Q}^k$ είναι πυκνό υποσύνολο στον $\mathbb{R}^k$ με την Ευκλείδεια μετρική ρ_2.

Πράγματι, έστω $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ υπάρχουν $q_1, \ldots, q_k$ ρητοί ώστε για κάθε $i = 1, \ldots, k$, $|x_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$. Τότε αν $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_k) \in \mathbb{Q}^k$ έχουμε ότι

$$\rho_2(\vec{x}, \vec{q}) = \Big(\sum_{i=1}^{k} |x_i - q_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon\,.$$

Ορισμός 7.11. Ένας μετρικός χώρος (X, ρ) λέγεται ***διαχωρίσιμος*** εάν έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο.

Παραδείγμα. Για κάθε $k = 1, 2, \ldots$ ο $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$ είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Πράγματι το $\mathbb{Q}^k$ είναι αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$.

Ορισμός 7.12. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $\varepsilon > 0$. Ένα υποσύνολο A του X καλείται ε-***διαχωρισμένο*** αν για κάθε $x, y \in A$ με $x \neq y$, $\rho(x, y) \geq \varepsilon$.

Παρατηρείστε ότι ένα υποσύνολο A του X δεν είναι $\varepsilon-$διαχωρισμένο για κάποιο $\varepsilon > 0$ αν υπάρχουν $x, y \in A$ με $x \neq y$ ώστε $\rho(x, y) < \varepsilon$. Η επόμενη πρόταση μας πληροφορεί ότι σε κάθε μετρικό χώρο X και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν μεγιστικά $\varepsilon-$διαχωρισμένα υποσύνολα του X.

Πρόταση 7.13. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $\varepsilon > 0$. Τότε ο X περιέχει ένα μεγιστικό $\varepsilon-$διαχωρισμένο υποσύνολο (δηλαδή υπάρχει $A \subset X$, $\varepsilon-$διαχωρισμένο ώστε για κάθε $B \subset X$ $\varepsilon-$διαχωρισμένο αν $A \subset B$ τότε $A = B$).*

Απόδειξη. Έστω $\Delta_\varepsilon = \{A \subset X : A$ είναι $\varepsilon-$διαχωρισμένο$\}$. Παρατηρείστε ότι ο Δ_ε με την μερική διάταξη του περιέχεσθαι, $\subseteq$, είναι ένας μερικά διατεταγμένος χώρος. Θα δείξουμε ότι ο $(\Delta_\varepsilon, \subseteq)$ ικανοποιεί την συνθήκη του Λήμματος του Zorn. Έστω λοιπόν C μία αλυσίδα στον $(\Delta_\varepsilon, \subseteq)$. Έστω $\cup C$ να είναι η ένωση όλων των συνόλων που ανήκουν στην C. Τότε έχουμε ότι

(i) Η $\cup C$ ανήκει στο Δ_ε.

Πράγματι, έστω $x, y \in \cup C$. Τότε υπάρχουν $A, B \in C$ ώστε $x \in A$ και $y \in B$. Αφού η C είναι αλυσίδα, είτε $A \subseteq B$ είτε $B \subseteq A$. Αν $A \subseteq B$ τότε $x, y \in B$ και επειδή $B \in \Delta_\varepsilon$, $\rho(x, y) \geq \varepsilon$. Όμοια άν $B \subseteq A$. Άρα η $\cup C$ είναι $\varepsilon-$διαχωρισμένο υποσύνολο του (X, ρ).

(ii) Η $\cup C$ είναι άνω φράγμα της C.

Πράγματι, έστω $A \in C$. Τότε προφανώς $A \subset \cup C$.

Από τα παραπάνω κάθε αλυσίδα στο $(\Delta_\varepsilon, \subseteq)$ έχει άνω φράγμα. Συνεπώς από το Λήμμα του Zorn το $(\Delta_\varepsilon, \subseteq)$ έχει ένα τουλάχιστον μεγιστικό στοιχείο. $\square$

Πρόταση 7.14. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A_n \subseteq X$, $n=1,2,\ldots$, ώστε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ το A_n είναι ένα μεγιστικό $\frac{1}{n}-$διαχωρισμένο υποσύνολο του X. Τότε η $\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. Έστω $x\in X$ και $\varepsilon>0$. Αρκεί να δειχθεί ότι υπάρχει $y\in\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ ώστε $\rho(x,y)<\varepsilon$. Έστω $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$. Αν $x\in A_{n_0}$ θέτουμε $y=x$. Αν $x\notin A_{n_0}$ τότε, αφού το A_{n_0} είναι μεγιστικό $\frac{1}{n_0}-$διαχωρισμένο υποσύνολο του X, έπεται ότι το σύνολο $B=A_{n_0}\cup\{x\}$ δεν είναι $\frac{1}{n_0}-$διαχωρισμένο. Συνεπώς το B περιέχει δύο διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία που η απόστασή τους είναι μικρότερη από $\frac{1}{n_0}$. Επειδή το A_{n_0} είναι $\frac{1}{n_0}$-διαχωρισμένο, εύκολα καταλήγουμε ότι το ένα από τα δύο αυτά σημεία είναι το x ενώ το άλλο είναι κάποιο $y\in A_{n_0}$. Άρα υπάρχει $y\in A_{n_0}$ ώστε $\rho(x,y)<\frac{1}{n_0}<\varepsilon$.

Συνεπώς για κάθε $x\in X$ και για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $y\in\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ ώστε $\rho(x,y)<\varepsilon$. Από τον χαρακτηρισμό των πυκνών υποσυνόλων του X έχουμε ότι η $\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του X. □

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι ένα $\varepsilon-$διαχωρισμένο υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X,ρ) δεν μπορεί να έχει ''περισσότερα'' στοιχεία από ένα πυκνό υποσύνολο του.

Πρόταση 7.15. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $\varepsilon>0$, $A\subseteq X$ ένα $\varepsilon-$διαχωρισμένο υποσύνολο του X και D ένα πυκνό υποσύνολο του X. Τότε υπάρχει μία ένα-προσ-ένα απεικόνιση $\phi:A\to D$.*

Απόδειξη. Αφού το D είναι πυκνό υποσύνολο του X, έχουμε ότι για κάθε $\alpha\in A$, $S(\alpha,\frac{\varepsilon}{4})\cap D\neq\emptyset$. Άρα για κάθε $\alpha\in A$ μπορούμε να επιλέξουμε ένα $y_\alpha\in D\cap S(\alpha,\frac{\varepsilon}{4})$. Θέτουμε $\phi: A\to D$ με $\phi(\alpha)=y_\alpha$, για κάθε $\alpha\in A$. Η ϕ είναι *ένα-προσ-ένα*. Πράγματι, έστω $\alpha,\alpha'\in A$. Τότε επειδή το A είναι $\varepsilon-$διαχωρίσιμο, έχουμε ότι $\rho(\alpha,\alpha^{'})\geq\varepsilon$ και άρα $S(\alpha,\frac{\varepsilon}{4})\cap S(\alpha',\frac{\varepsilon}{4})=\emptyset$. Συνεπώς $y_\alpha\neq y_{\alpha'}$ δηλαδή $\phi(\alpha)\neq\phi(\alpha')$. □

Οι Προτάσεις 7.13-7.15 δίνουν τον εξής χαρακτηρισμό των διαχωρίσιμων μετρικών χώρων.

Θεώρημα 7.16. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) Ο (X,ρ) είναι διαχωρίσιμος.

(ii) Για κάθε $\varepsilon>0$ οποιοδήποτε $\varepsilon-$διαχωρισμένο υποσύνολο του X είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη. (i)⇒(ii). Έστω D ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X, $\varepsilon>0$ και A ένα $\varepsilon-$διαχωρισμένο υποσύνολο του X. Από την Πρόταση 7.15 έχουμε ότι υπάρχει $\phi:A\to D$ *ένα-προσ-ένα*. Επειδή το D αριθμήσιμο έπεται ότι το A είναι αριθμήσιμο.

(ii)⇒(i). Από Πρόταση 7.13 για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει ένα μεγιστικό $\frac{1}{n}-$διαχωρισμένο υποσύνολο του X, έστω A_n. Από Πρόταση 7.14 η ένωση $\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του X. Από την υπόθεσή μας κάθε A_n είναι αριθμήσιμο. Συνεπώς και $\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων συνόλων. Άρα ο X περιέχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο οπότε είναι διαχωρίσιμος. □

Πόρισμα 7.17. *Έστω (X,ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $A \subset X$. Τότε ο (A,ρ) είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Από το προηγούμενο θεώρημα, αρκεί να δειχθεί ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, κάθε $D \subset A$ ε-διαχωρισμένο είναι αριθμήσιμο. Πράγματι έστω $\varepsilon > 0$ και $D \subset A$ ε-διαχωρισμένο. Τότε το $D \subset X$ είναι ε-διαχωρισμένο αφού οι μετρικές στο A και στο X ταυτίζονται. Πάλι από το θεώρημα 7.16, επειδή ο X είναι διαχωρίσιμος, έπεται ότι το D είναι αριθμήσιμο. □

7.3 Βάσεις περιοχών

Ορισμός 7.18. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και B μία οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X. Η B καλείται ***βάση περιοχών*** του X αν κάθε ανοικτό μη κενό υποσύνολο του X γράφεται ως ένωση στοιχείων της B.

Επειδή κάθε ανοικτό σύνολο ενός μετρικού χώρου (X,ρ) γράφεται ως ένωση ανοικτών σφαιρών (δες Κεφ. 3) έχουμε ότι σε κάθε μετρικό χώρο X η οικογένεια $\{S(x,r) : x \in X, r > 0\}$ αποτελεί βάση περιοχών του X.

Πρόταση 7.19. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και D πυκνό υποσύνολο του X. Τότε η οικογένεια $\mathcal{B} = \{S(y,q) : y \in D$ και q θετικός ρητός$\}$ αποτελεί βάση περιοχών του X.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{U}$ μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X. Αρκεί να δειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathcal{U}$ υπάρχει $y_x \in D$ και q_x θετικός ρητός ώστε $x \in S(y_x,q_x) \subset \mathcal{U}$. Πράγματι, τότε για κάθε $x \in \mathcal{U}$, $S(y_x,q_x) \in \mathcal{B}$ και $\mathcal{U} = \cup_{x\in X} S(y_x,q_x)$.

Έστω λοιπόν $x \in \mathcal{U}$. Αφού το $\mathcal{U}$ είναι ανοικτό υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $x \in S(x,\varepsilon) \subset \mathcal{U}$. Μπορούμε να υποθέσουμε, παίρνωντας ένα ε μικρότερο εάν χρειάζεται, ότι το ε είναι θετικός ρητός. Αφού το D είναι πυκνό υπάρχει $y_x \in D \cap S(x,\frac{\varepsilon}{3})$. Συνεπώς $x \in S(y_x,\frac{\varepsilon}{3})$ και αφού $\frac{\varepsilon}{3}$ θετικός ρητός, $S(y_x,\frac{\varepsilon}{3}) \in \mathcal{B}$. Επιπλέον $S(y_x,\frac{\varepsilon}{3}) \subset \mathcal{U}$. Πράγματι αν $z \in S(y_x,\frac{\varepsilon}{3})$ τότε

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y_x) + \rho(y_x,z) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon\,,$$

και άρα $S(y_x,\frac{\varepsilon}{3}) \subset S(x,\varepsilon) \subset \mathcal{U}$. □

Παραδείγμα. Στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική η οικογένεια των ανοικτών διαστημάτων με ρητά άκρα $\{(q_1,q_2) :\ q_1 < q_2$ ρητοί$\}$ είναι βάση περιοχών του $\mathbb{R}$.

Πρόταση 7.20. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*
(i) Ο (X,ρ) είναι διαχωρίσιμος.
(ii) Ο (X,ρ) έχει μία αριθμήσιμη βάση περιοχών.

Απόδειξη. (i)⇒(ii). Από την προηγούμενη πρόταση, αν D ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X, η οικογένεια $\mathcal{B} = \{S(y,q) : y \in D, q$ θετικός ρητός$\}$ είναι μια βάση περιοχών X. Έστω $\phi : D \times \mathbb{Q}^+ \to \mathcal{B}$ όπου $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$ και $\phi(y,q) = S(y,q)$ για κάθε

$(y,q) \in D \times \mathbb{Q}^+$. Προφανώς η ϕ είναι επί της $\mathcal{B}$. Επιπλέον το $D \times \mathbb{Q}^+$ είναι αριθμήσιμο ως καρτεσιανό γινόμενο δύο αριθμησίμων συνόλων. Άρα η $\mathcal{B}$ είναι αριθμήσιμη (δες και Θεώρημα 7.1(ii)) της παραγράφου 7.1).

(ii)⇒(i). Έστω ότι ο (X,ρ) έχει μια αριθμήσιμη βάση περιοχών $\mathcal{B}$. Για κάθε $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$ επιλέγουμε $y_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}$. Θέτουμε $D = \{y_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \in \mathcal{B}\}$. Τότε το D είναι αριθμήσιμο (αφού η απεικόνιση $f : \mathcal{B} \to D$ με $f(\mathcal{U}) = y_{\mathcal{U}}, \mathcal{U} \in \mathcal{B}$ είναι *επί*) και επίσης είναι και πυκνό υποσύνολο του X. Πράγματι, έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Τότε η $S(x,\varepsilon)$ γράφεται ως ένωση συνόλων της $\mathcal{B}$. Άρα υπάρχει $y \in D \cap S(x,\varepsilon)$. □

Πρόταση 7.21. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $\mathcal{B}$ οικογένεια από ανοικτά υποσύνολα του X. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Η $\mathcal{B}$ είναι βάση περιοχών του X.

(ii) Για κάθε $x \in X$ και για κάθε ανοικτό $\mathcal{U} \subset X$ με $x \in \mathcal{U}$, υπάρχει ανοικτό $G_x \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in G_x \subset \mathcal{U}$.

Απόδειξη. (i)⇒(ii). Έστω $x \in X$ και $\mathcal{U}$ ανοικτό που περιέχει το x. Αφού η $\mathcal{B}$ είναι βάση περιοχών το $\mathcal{U}$ γράφεται ως ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$, και άρα κάποιο από αυτά περιέχει και το x.

(ii)⇒(i). Προφανές, αφού $\mathcal{U} = \cup_{x\in\mathcal{U}} G_x$. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $f, g : (X,\rho) \longrightarrow (Y,d)$ συνεχείς συναρτήσεις και $D \subset X$ πυκνό. Δείξτε ότι αν $f_{|D} = g_{|D}$ τότε $f = g$.

2. Έστω $f : (X,\rho) \longrightarrow (Y,d)$ συνεχής και D πυκνό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι το $f(D)$ είναι πυκνό υποσύνολο στον $(f(X),d)$. Τι συμπεραίνετε αν η f είναι επί και ο X είναι διαχωρίσιμος;

3. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος ώστε για κάθε $x \in X$, $\mathrm{int}\{x\} = \emptyset$. Δείξτε ότι για κάθε $D \subset X$ πυκνό το $D \setminus \{x\}$ είναι πυκνό για κάθε $x \in D$. (Για τον ορισμό του $\mathrm{int}\, A$ για $A \subset X$ δείτε το Κεφάλαιο 5).

4. Έστω x_0 στοιχείο ενός μετρικού χώρου (X,ρ) ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε D πυκνό υποσύνολο του X, $x_0 \in D$. Δείξτε ότι το $\{x_0\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Κεφάλαιο 8

Πλήρεις μετρικοί χώροι

8.1 Πληρότητα

Ορισμός 8.1. Μια ακολουθία (x_n) στοιχείων ενός μετρικού χώροι (X,ρ) λέγεται ***βασική*** ή ***Cauchy*** να για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n, m \geq n_0$ ισχύει $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Παρατηρήσεις. (i) Είναι εύκολο να δούμε ότι εάν $x_n \to x$ τότε η (x_n) είναι βασική. Πράγματι, για δοθέν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Απλή εφαρμογή της τριγωνικής ιδιότητας συνεπάγεται ότι για κάθε $n, m \geq n_0$

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

(ii) Το αντίστροφο δεν είναι εν γένει σωστό και θα δούμε κάποια παραδείγματα στη συνέχεια.

Η βασική διαφορά μεταξύ μεταξύ συγκλινουσών ακολουθιών και βασικών ακολουθιών είναι ότι στην πρώτη κατηγορία εξετάζεται η σχέση των όρων της ακολουθίας με το όριο ενώ στη δεύτερη περίπτωση εξετάζεται η σχέση των όρων της ακολουθίας μεταξύ τους.

Πρόταση 8.2 (Κριτήριο ύπαρξης ορίου βασικής ακολουθίας)**.** *Έστω (x_n) βασική ακολουθία και υποθέτουμε ότι υπάρχει (x_{k_n}) υπακολουθία της που συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$. Τότε η (x_n) συγκλίνει στο x.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $\rho(x_n, x) < \varepsilon$. Για το δοθέν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_1$, $\rho(x_{k_n}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ (λόγω της σύγκλισης της υπακολουθίας (x_{k_n}) στο x). Επίσης υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m, n \geq n_2$, $\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ και ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $n \geq n_0$, $\rho(x_n, x) < \varepsilon$.

Πράγματι, επειδή $k_{n_0} \geq n_0$, για $n \geq n_0$ θα ισχύει

$$\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{k_{n_0}}) + \rho(x_{k_{n_0}}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Άρα $x_n \to x$. □

Πρόταση 8.3. *Έστω $(x_n)_n$ βασική ακολουθία. Τότε το σύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο.*

Απόδειξη. Ας θυμηθούμε ότι ένα σύνολο A ονομάζεται φραγμένο αν $\mathrm{diam}(A) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\} < \infty$. Άρα θα δείξουμε ότι

$$\sup\{\rho(x_n, x_m) : n, m \in \mathbb{N}\} < \infty\,.$$

Για $\varepsilon = 1$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για $n, m \geq n_0$, να ισχύει $\rho(x_n, x_m) < 1$. Επίσης υπάρχει $M \geq 1$ ώστε

$$\max\{\rho(x_n, x_{n_0}) : n = 1, \dots, n_0\} < M\,.$$

Άρα για $n, m \in \mathbb{N}$

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x_{n_0}) + \rho(x_m, x_{n_0}) < 2M\,,$$

επομένως $\mathrm{diam}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \leq 2M$. □

Πόρισμα 8.4. *Κάθε βασική ακολουθία (x_n) στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Επειδή (x_n) είναι βασική, από την προηγούμενη πρόταση είναι φραγμένη. Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass η (x_n) έχει υπακολουθία (x_{k_n}) που συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$, άρα από την προηγούμενη πρόταση και η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο x. □

Πρόταση 8.5. *Κάθε βασική ακολουθία $(\vec{x}_n)$ στον $\mathbb{R}^k$ με την Ευκλείδεια μετρική είναι συγκλίνουσα.*

Απόδειξη. Έστω $(\vec{x}_n)$ βασική ακολουθία στον $\mathbb{R}^k$, $\vec{x}_n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_k^n)$. Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι για κάθε $i = 1, 2, \dots, k$ η ακολουθία $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία πραγματικών αριθμών. Πράγματι, $|x_i^n - x_i^m| \leq \|\vec{x}_n - \vec{x}_m\|$ άρα αν $\varepsilon > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|\vec{x}_n - \vec{x}_m\| < \varepsilon$ για $n, m \geq n_0$, τότε για κάθε $i = 1, 2, \dots, k$ και $n, m \geq n_0$, $|x_n^i - x_m^i| < \varepsilon$. Από το προηγούμενο πόρισμα $(x_i^n)_n \to x_i$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, k$. Από το κριτήριο σύγκλισης ακολουθιών στον $\mathbb{R}^k$ συμπεραίνουμε ότι $\vec{x}_n \to \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$. □

Ορισμός 8.6. Ένας μετρικός χώρος (X, ρ) λέγεται **πλήρης** αν κάθε βασική ακολουθία του (X, ρ) είναι συγκλίνουσα.

Παρατηρήσεις. (i) Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών με την συνήθη μετρική και ο $\mathbb{R}^k$ με την Ευκλείδεια μετρική, όπως δείξαμε προηγουμένως, είναι πλήρεις μετρικοί χώροι.

(ii) Ο $\mathbb{R}^k$ με την $\rho_p, 1 \leq p \leq \infty$ είναι επίσης πλήρης μετρικός χώρος. Η απόδειξη αυτού γίνεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που δείξαμε ότι ο $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$ είναι πλήρης.

(iii) Αν ρ_1, ρ_2 είναι ισοδύναμες μετρικές σε ένα σύνολο X και (X, ρ_1) είναι πλήρης μετρικός χώρος δεν συνεπάγεται εν γένει ότι ο (X, ρ_2) είναι πλήρης. Για παράδειγμα αν $X = (0,1]$ και $\rho_2(x,y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$ τότε ο $((0,1], \rho_2)$ είναι πλήρης, η ρ_2 είναι ισοδύναμη με την συνήθη μετρική στον $(0,1]$ και ο $((0,1], |\cdot|)$ δεν είναι πλήρης.

Πρόταση 8.7. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $K \subset X$ ώστε (K,ρ) να είναι πλήρης μετρικός χώρος. Τότε το K είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. Έστω ότι αυτό δεν συμβαίνει. Τότε $K \neq \overline{K}$, και άρα υπάρχει $x \in \overline{K} \setminus K$. Όπως έχουμε δείξει το x θα είναι σημείο συσσώρευσης του K και άρα υπάρχει (x_n) ακολουθία στο K ώστε $x_n \to x$. Αλλά τότε η (x_n) είναι βασική και δεν συγκλίνει σε στοιχείο του K άρα το (K,ρ) δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος, άτοπο. □

Ορισμός 8.8. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow X$ καλείται ***συνάρτηση συστολής*** αν υπάρχει $0 < C < 1$ ώστε $\rho(f(x), f(y)) \leq C\rho(x,y)$ για κάθε $x, y \in X$.

Θεώρημα 8.9 (Σταθερού σημείου του Banach)**.** *Έστω (X,ρ) ένας πλήρης μετρικός χώρος. Τότε κάθε συνάρτηση συστολής $f : X \longrightarrow X$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x_0 \in X$ ώστε $f(x_0) = x_0$.*

Απόδειξη.. Έστω $0 < C < 1$ ώστε $\rho(f(x), f(y)) \leq C\rho(x,y)$ για κάθε $x, y \in X$. Για $n = 1, 2, \ldots$ θεωρούμε τη συνάρτηση $f^n : X \longrightarrow X$ με $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ φορές}}$. (Τυπικά η (f^n) ορίζεται αναδρομικά ως εξής: $f^1 = f$, και $f^{n+1} = f \circ f^n$ για $n = 1, 2, \ldots$.) Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο $x \in X$.

Ισχυρισμός Η $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy.

Κατ' αρχήν με επαγωγή αποδεικνύεται ότι $\rho(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leq C^n \rho(x, f(x))$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Άρα αν m, n φυσικοί με $m > n$ τότε

$$\begin{aligned}
\rho(f^n(x), f^m(x)) &\leq \rho(f^n(x), f^{n+1}(x)) + \rho(f^{n+1}(x), f^{n+2}(x)) + \cdots + \rho(f^{m-1}(x), f^m(x)) \\
&\leq C^n \rho(x, f(x)) + C^{n+1}\rho(x, f(x)) + \cdots + C^{m-1}\rho(x, f(x)) \\
&\leq \rho(x, f(x)) C^n (1 + C + \cdots + C^{m-n+1}) \\
&\leq \rho(x, f(x)) C^n \frac{1}{1-C}
\end{aligned}$$

(αφού $0 < C < 1$ και άρα γεωμετρική σειρά $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C^k$ συγκλίνει στο $\dfrac{1}{1-C}$). Έτσι αν $\varepsilon > 0$ επιλέγοντας $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x, f(x))\dfrac{C^{n_0}}{1-C} < \varepsilon$ τότε για κάθε $m > n \geq n_0$ έχουμε $\rho(f^n(x), f^m(x)) < \varepsilon$. Επομένως η ακολουθία $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy.

Αφού ο X είναι πλήρης η βασική ακολουθία $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο $x_0 \in X$. Η συνάρτηση f είναι συνάρτηση Lipschitz με σταθερά C και άρα είναι συνεχής. Συνεπώς από την αρχή της μεταφοράς η ακολουθία $(f(f^n(x)))_{n\in\mathbb{N}}$ δηλαδή η ακολουθία $(f^{n+1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $f(x_0)$. Όμως η $(f^{n+1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ και άρα συγκλίνει στο ίδιο όριο με αυτή, δηλαδή στο x_0. Από τη μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας έπεται ότι $f(x_0) = x_0$ δηλαδή το x_0 είναι σταθερό σημείο της f.

Αποδεικνύουμε τώρα τη μοναδικότητα του σταθερού σημείου. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $y_0 \in X$ με $x_0 \neq y_0$ ώστε $f(y_0) = y_0$. Τότε $\rho(x_0, y_0) = \rho(f(x_0), f(y_0)) \leq C\rho(x_0, y_0)$ και αφού $\rho(x_0, y_0) > 0$ (εφόσον $x_0 \neq y_0$) έπεται ότι $1 \leq C$, άτοπο. $\square$

Παρατηρήσεις. (1). Το συμπέρασμα του θεωρήματος δεν ισχύει γενικά για $f : X \longrightarrow X$ με $\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(x, y)$. Για παράδειγμα ο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική είναι πλήρης ενώ για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x + 1$ είναι $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ ενώ η f δεν έχει σταθερό σημείο.

(2). Η υπόθεση της πληρότητας στο θεώρημα σταθερού σημείου δεν μπορεί να παραλειφθεί. Πράγματι, η συνάρτηση $g : (0, 1) \longrightarrow (0, 1)$ με $g(x) = \dfrac{1}{2}x$ είναι συνάρτηση συστολής με σταθερά $C = \dfrac{1}{2}$ ενώ δεν έχει σταθερό σημείο.

Πρόταση 8.10 (Χαρακτηρισμός Cantor πλήρων μετρικών χώρων)**.** *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο (X, ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος.

(ii) Αν $(F_n)_n$ είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών μη κενών υποσυνόλων του X με $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$ τότε $\cap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

Απόδειξη. (i)⇒(ii). Έστω $(F_n)_n$ φθίνουσα ακολουθία (δηλ. $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$) κλειστών μη κενών υποσυνόλων του X με $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$. Ας παρατηρήρουμε κατ΄ αρχάς ότι αν $\cap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ τότε υποχρεωτικά $\cap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$. Πράγματι, διαφορετικά θα υπήρχαν $x, y \in \cap_{n=1}^{\infty} F_n$ με $x \neq y$. Τότε $\rho(x, y) = \delta > 0$. Επειδή $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$ θα υπήρχε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathrm{diam}(F_{n_0}) < \delta$ και επίσης τα x, y θα ανήκουν στο F_{n_0}. Άτοπο διότι $\delta = \rho(x, y) \leq \mathrm{diam}(F_{n_0}) < \delta$.

Μένει να δείξουμε ότι $\cap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. Επιλέγουμε $x_n \in F_n$ και δείχνουμε πρώτα ότι η ακολουθία (x_n) είναι βασική. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $\mathrm{diam}(F_n) < \varepsilon$. Επίσης για $n_0 \leq n < m$ παρατηρούμε ότι x_m, x_n ανήκουν στο F_n άρα $\rho(x_n, x_m) \leq \mathrm{diam}(F_n) < \varepsilon$. Επειδή ο (X, ρ) είναι πλήρης και η ακολουθία (x_n) βασική, υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \to x$. Θα δείξουμε ότι $x \in F_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $x \in \cap_{n=1}^{\infty} F_n$. Πράγματι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $(x_n)_{n \geq k} \subset F_k$. Άρα το x είναι οριακό σημείο του F_k, το F_k είναι κλειστό άρα $x \in F_k$.

(ii)⇒(i) Θα δείξουμε ότι κάθε βασική ακολουθία (x_n) είναι συγκλίνουσα. Θέτουμε $F_n = \overline{\{x_k : k \geq n\}}$ και παρατηρούμε ότι η (F_n) είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων και $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$. Το τελευταίο ισχύει διότι $\mathrm{diam}(\{x_k\}_{k \geq n}) \to 0$ (από το ότι η (x_n) είναι βασική και επίσης $\mathrm{diam}(F_n) = \mathrm{diam}(\{x_k\}_{k\geq n})$. Από την υπόθεση έπεται ότι $\cap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $x_n \to x$. $\square$

8.2 Το θεώρημα κατηγορίας του Baire

Ας θυμηθούμε ότι ένα σύνολο D υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X,ρ) λέγεται πυκνό εάν $\overline{D} = X$. Όπως έχουμε δείξει αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι για κάθε ανοικτή σφαίρα $S(x,\varepsilon)$ ισχύει ότι $S(x,\varepsilon)\cap D \neq \emptyset$. Ας σημειώσουμε επίσης ότι υπάρχουν μετρικοί χώροι (X,ρ) που έχουν δύο πυκνά υποσύνολα D_1,D_2 ώστε $D_1\cap D_2 = \emptyset$. Για παράδειγμα θεωρείστε $D_1 = \mathbb{Q}$, το σύνολο των ρητών, και $D_2 = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ οι άρρητοι που και τα δύο είναι πυκνά υποσύνολα στο $\mathbb{R}$ αλλά ξένα. Το θεώρημα κατηγορίας του Baire που θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε στη συνέχεια αναφέρεται στη συμπεριφορά των ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων μετρικών χώρων. Ας ξεκινήσουμε με την επόμενη απλή παρατήρηση. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $\mathcal{U} \subset X$ ανοικτό και πυκνό. Τότε λόγω της πυκνότητας του $\mathcal{U}$, για κάθε ανοικτή σφαίρα $S(x,\varepsilon)$ ισχύει $S(x,\varepsilon)\cap\mathcal{U} \neq \emptyset$. Επειδή τα σύνολα είναι ανοικτά η τομή $S(x,\varepsilon)\cap\mathcal{U}$ είναι ανοικτό άρα υπάρχει $y \in X$ και $\delta > 0$ ώστε $S(y,\delta) \subseteq S(x,\varepsilon)\cap\mathcal{U}$. Αυτή η παρατήρηση είναι κρίσιμη για τα επόμενα.

Πρόταση 8.11. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^n$ πεπερασμένη οικογένεια ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X. Τότε $\cap_{i=1}^n\mathcal{U}_i$ είναι ανοικτό και πυκνό.*

Απόδειξη. Το ότι $\cap_{i=1}^n\mathcal{U}_i$ είναι ανοικτό έπεται από τις θεμελιώδεις ιδιότητες των ανοικτών συνόλων. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι είναι πυκνό. Έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon_0 > 0$. Θα δείξουμε ότι $\cap_{i=1}^n\mathcal{U}_i\cap S(x_0,\varepsilon_0) \neq \emptyset$. Επαγωγικά επιλέγουμε $x_1, x_2, \ldots, x_n$ στοιχεία του X, $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ θετικούς ώστε να ισχύουν τα επόμενα:

$$S(x_1,\varepsilon_1) \subset \mathcal{U}_1\cap S(x_0,\varepsilon_0) \text{ και για } i \geq 2,\quad S(x_i,\varepsilon_i) \subset \mathcal{U}_i\cap S(x_{i-1},\varepsilon_{i-1})\,.$$

Η επιλογή γίνεται με χρήση της παρατήρησης που αναφέραμε προηγουμένως. Επίσης επαγωγικά δείχνεται εύκολα ότι

$$S(x_i,\varepsilon_i) \subset \cap_{j=1}^i\mathcal{U}_j\cap S(x_0,\varepsilon_0),\;\; i = 1,2,\ldots,n\,.$$

Ειδικότερα για $i = n$,

$$S(x_n,\varepsilon_n) \subset \cap_{j=1}^n\mathcal{U}_j\cap S(x_0,\varepsilon_0)\,,$$

που αποδεικνύει ότι $\cap_{i=1}^n\mathcal{U}_i$ είναι πυκνό στον X. $\square$

Παρατήρηση. Ας υποθέσουμε τώρα ότι αντί για πεπερασμένη οικογένεια $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^n$ ανοικτών και πυκνών έχουμε μια αριθμήσιμη οικογένεια $\{\mathcal{U}_k\}_{k=1}^{\infty}$ τέτοιων συνόλων. Το ερώτημα που τίθεται φυσιολογικά είναι έαν $\cap_{k=1}^{\infty}\mathcal{U}_k$ είναι πυκνό (ανοικτό είναι δύσκολο να περιμένουμε να είναι, διότι η τομή είναι άπειρη). Αυτό εν γένει δεν είναι πυκνό όπως φαίνεται από το επόμενο παράδειγμα.

Παραδείγμα. Θεωρούμε τον μετρικό χώρο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών με την συνήθη μετρική. Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο, άρα $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Θέτουμε $\mathcal{U}_k = \mathbb{Q} \setminus \{q_k\}$, το οποίο είναι ανοικτό και πυκνό και παρατηρούμε ότι $\cap_{k=1}^{\infty} \mathcal{U}_k = \emptyset$.

Το θεώρημα κατηγορίας του Baire ισχυρίζεται ότι το φαινόμενο που είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα δεν εμφανίζεται όταν ο (X, ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Θεώρημα 8.12 (Θεώρημα κατηγορίας του Baire). *Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ αριθμήσιμη οικογένεια ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X. Τότε το $\cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$ είναι πυκνό.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon_0 > 0$. Θα δείξουμε ότι $\cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n \cap S(x_0, \varepsilon_0) \neq \emptyset$. Επαγωγικά επιλέγουμε μια ακολουθία (x_n) στοιχείων του X, και μια ακολουθία (ε_n) θετικών αριθμών με $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{n}$ ώστε

$$S(x_n, \varepsilon_n) \subset \mathcal{U}_n \cap S(x_{n-1}, \tfrac{\varepsilon_{n-1}}{2}) .$$

Η επιλογή των (x_n) και (ε_n) γίνεται ως εξής:

Επειδή το $\mathcal{U}_1$ είναι ανοικτό και πυκνό υπάρχει x_1, $0 < \varepsilon_1 < 1$ ώστε $S(x_1, \varepsilon_1) \subset \mathcal{U}_1 \cap S(x_0, \frac{\varepsilon_0}{2})$. Ας παρατηρήσουμε εδώ ότι $\overline{S(x_1, \frac{\varepsilon_1}{2})} \subset S(x_1, \varepsilon_1)$ και $\operatorname{diam}(\overline{S(x_1, \frac{\varepsilon_1}{2})}) \leq \varepsilon_1$.

Στο γενικό επαγωγικό βήμα η επιλογή των x_n, ε_n γίνεται με τον ίδιο τρόπο. Θεωρούμε δηλαδή ότι τα x_{n-1}, ε_{n-1} έχουν επιλεγεί και επιλέγουμε x_n, ε_n ώστε $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{n}$ και $S(x_n, \varepsilon_n) \subset \mathcal{U}_n \cap S(x_{n-1}, \frac{\varepsilon_{n-1}}{2})$. Επίσης θα έχουμε ότι $\overline{S(x_n, \frac{\varepsilon_n}{2})} \subset S(x_n, \varepsilon_n)$ και $\operatorname{diam} \overline{S(x_n, \frac{\varepsilon_n}{2})} \leq \varepsilon_n < \frac{1}{n}$. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι

$$S(x_0, \varepsilon_0) \supset S(x_1, \varepsilon_1) \supset \overline{S(x_1, \tfrac{\varepsilon_1}{2})} \supset \ldots \supset S(x_n, \varepsilon_n) \supset \overline{S(x_n, \tfrac{\varepsilon_n}{2})} \supset \ldots$$

και επίσης

$$\overline{S(x_n, \tfrac{\varepsilon_n}{2})} \subset S(x_n, \varepsilon_n) \subset \mathcal{U}_n .$$

Σαν συνέπεια των προηγουμένων έπεται ότι $\{\overline{S(x_n, \frac{\varepsilon_n}{2})}\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X με $\operatorname{diam}(\overline{S(x_n, \frac{\varepsilon_n}{2})}) \to 0$ και επειδή ο X είναι πλήρης μετρικός χώρος $\cap_{n=1}^{\infty} \overline{S(x_n, \frac{\varepsilon_n}{2})} = \{x\}$. Είναι $x \in S(x_0, \varepsilon_0)$ και επίσης $x \in \mathcal{U}_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $\cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n \cap S(x_0, \varepsilon_0) \neq \emptyset$ και άρα το $\cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του X. $\square$

Ορισμός 8.13. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Το σύνολο

$$\operatorname{int} A = \{x \in X : \text{υπάρχει } \varepsilon > 0 \text{ ώστε } S(x, \varepsilon) \subset A\}$$

καλείται *εσωτερικό* του A.

Από τον ορισμό, έχουμε ότι $\operatorname{int} A \subset A$, για κάθε $A \subset X$ και αν $A = \emptyset$ τότε $\operatorname{int} A = \emptyset$.

Πρόταση 8.14. *Έστω $A \subset X$, (X, ρ) μετρικός χώρος. Τότε το $\operatorname{int} A$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. Αν $\operatorname{int} A = \emptyset$ τότε το $\operatorname{int} A$ είναι ανοικτό. Έστω $\operatorname{int} A \neq \emptyset$ και $x \in \operatorname{int} A$. Άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $S(x,\varepsilon) \subset A$. Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι $S(x,\varepsilon) \subset \operatorname{int} A$. Πράγματι: Έστω $y \in S(x,\varepsilon)$. Επειδή η $S(x,\varepsilon)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X υπάρχει $\varepsilon' > 0$ ώστε $S(y,\varepsilon') \subset S(x,\varepsilon) \subset A$. Άρα $y \in \operatorname{int} A$ για όλα τα $y \in S(x,\varepsilon)$ δηλαδή $S(x,\varepsilon) \subset \operatorname{int} A$. □

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι το $\operatorname{int} A$ είναι το μεγαλύτερο ανοικτό υποσύνολο του X που περιέχεται στο A.

Πρόταση 8.15. *Έστω $A \subset X$ και $V \subset A$ ώστε το V είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Τότε $V \subset \operatorname{int} A$.*

Απόδειξη. Έστω $V \neq \emptyset$ και $x \in V$. Αφού το V είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $S(x,\varepsilon) \subset V$ και άρα $S(x,\varepsilon) \subset A$. Συνεπώς $x \in \operatorname{int} A$ για όλα τα $x \in V$, δηλαδή $V \subset \operatorname{int} A$. □

Πρόταση 8.16. *Ένα υποσύνολο A του X, είναι ανοικτό αν και μονο αν* $\operatorname{int} A = A$.

Απόδειξη. Αν A ανοικτό, τότε αφού $A \subset A$, από την προηγούμενη πρόταση $A \subset \operatorname{int} A$. Επειδή και $\operatorname{int} A \subset A$ έχουμε $A = \operatorname{int} A$.

Αν $A = \operatorname{int} A$ τότε το A είναι ανοικτό από τα προηγούμενα. □

Παραδείγματα. (1). Αν $A = [0,1] \subset \mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, τότε $\operatorname{int} A = (0,1)$.

(2). Αν $x \in \mathbb{R}$ και $A = \{x\} \subset \mathbb{R}$ τότε το A έχει εσωτερικό το κενό. Πράγματι, αν $y \in \operatorname{int} A$ τότε θα πρέπει να υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \subset A = \{x\}$ άτοπο.

(3). Αν X σύνολο και ρ_δ η διακριτή μετρική τότε για κάθε $A \subset (X,\rho_\delta)$, $\operatorname{int} A = A$. Πραγματικά, κάθε υποσύνολο A του X είναι ανοικτό και συνεπώς από την προηγούμενη πρόταση $\operatorname{int} A = A$.

Πρόταση 8.17. *Έστω $F \subset X$ κλειστό. Τότε $\operatorname{int} F = \emptyset$ αν και μόνο αν το $X \setminus F$ είναι ανοικτό και πυκνό στον X.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\operatorname{int} F = \emptyset$. Τότε το $X \setminus F$ είναι ανοικτό (ως συμπλήρωμα κλειστού). Επέσης είναι και πυκνό στον X. Πράγματι, έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Τότε $S(x,\varepsilon) \cap (X \setminus F) \neq \emptyset$ διότι διαφορετικά $S(x,\varepsilon) \subset F$ και άρα $x \in \operatorname{int} F$, άτοπο, αφού $\operatorname{int} F = \emptyset$.

Αντίστροφα, έστω ότι το $X \setminus F$ είναι ανοικτό και πυκνό στον X. Τότε το F είναι κλειστό (ως συμπλήρωμα ανοικτού) και επιπλέον $\operatorname{int} F = \emptyset$. Πραγματικά, αν $\operatorname{int} F \neq \emptyset$ τότε το $\operatorname{int} F$ είναι ανοικτό μη κενό και συνεπώς θα τέμνει κάθε πυκνό υποσύνολο του X, οπότε $\operatorname{int} F \cap (X \setminus F) \neq \emptyset$, άτοπο αφού $\operatorname{int} F \subset F$. □

Από το Θεώρημα Baire έχουμε το εξής:

Θεώρημα 8.18. *Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και έστω $X = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ όπου F_n κλειστό υποσύνολο του X για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\operatorname{int} F_{n_0} \neq \emptyset$.*

Απόδειξη. Αν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{int} F_n = \emptyset$ τότε από την προηγούμενη πρόταση $X \setminus F_n$ ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του X για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Από το θεώρημα Baire $\cap_{n=1}^{\infty}(X \setminus F_n) \neq \emptyset$ οπότε $\cup_{n=1}^{\infty} F_n \neq X$, άτοπο. □

Πόρισμα 8.19. *Το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Αν το $\mathbb{R}$ ήταν αριθμήσιμο τότε $\mathbb{R} = \cup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$. Αλλά κάθε μονοσύνολο στον $\mathbb{R}$ με την συνήθη μετρική είναι κλειστό με κενό εσωτερικό. Άτοπο. $\square$

8.3 Ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις

Ορισμός 8.20. Έστω (X,ρ), (Y,d) μετρικοί χώροι και και $f(X,\rho) \longrightarrow (Y,d)$. Η f καλείται ***ομοιόμορφα συνεχής*** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x,y \in X$ με $\rho(x,y) < \delta$ να ισχύει $d(f(x),f(y)) < \varepsilon$.

Είναι άμεσο ότι κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση είναι και συνεχής. Το αντίστροφο δεν αληθεύει. (Θεωρήστε π.χ. την $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$). Στο Κεφάλαιο 2 ορίσαμε τις συναρτήσεις μεταξύ δύο μετρικών χώρων που ικανοποιούν τη συνθήκη Lipschitz. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι κάθε τέτοια συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής (αρκεί να θέσουμε για $\varepsilon > 0$, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{C}$ όπου C η σταθερά Lipschitz). Όμως κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση δεν είναι απαραίτητα και Lipschitz. Π.χ. αποδεικνύεται ότι η $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, ως συνεχής ορισμένη σε κλειστό φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$, αλλά όχι Lipschitz.

Πρόταση 8.21. *Έστω (X,ρ), (Y,d) δυο μετρικοί χώροι και $f : (X,\rho) \longrightarrow (Y,d)$ ομοιόμορφα συνεχής. Τότε η f απεικονίζει βασικές ακολουθίες του (X,ρ) σε βασικές ακολουθίες του (Y,d), δηδαδή αν η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στον (X,ρ) τότε η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στον (Y,d).*

Απόδειξη. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία στον (X,ρ). Θα αποδείξουμε ότι η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στον (Y,d).

Έστω $\varepsilon > 0$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της f υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x,y \in X$ με $\rho(x,y) < \delta$ να ισχύει $d(f(x),f(y)) < \varepsilon$. Από το γεγονός ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία έπεται ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n,m \geq n_0$ να ισχύει $\rho(x_n,x_m) < \delta$. Έτσι για κάθε $n,m \geq n_0$ έχουμε $d(f(x_n),f(x_m)) < \varepsilon$ και άρα $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία. $\square$

Πρόταση 8.22. *Αν (X,ρ), (Y,d) μετρικοί χώροι και $f : (X,\rho) \longrightarrow (Y,d)$ συνάρτηση που απεικονίζει βασικές ακολουθίες του (X,ρ) σε βασικές ακολουθίες του (Y,d) τότε η f είναι συνεχής. Αν επιπλέον ο (X,ρ) έχει την ιδιότητα ότι κάθε ακολουθία του έχει βασική υπακολουθία, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη. Από την αρχή της μεταφοράς αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x_0 \in X$ και ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον (X,ρ) που συγκλίνει στο x_0, η ακολουθία $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ του (Y,d) συγκλίνει στο $f(x_0)$.

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον (X,ρ) που συγκλίνει στο x_0. Θεωρούμε την ακολουθία $(x_0,x_1,x_0,x_2,\ldots)$ δηλαδή την ακολουθία $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x'_n = x_0$ αν n περιττός και $x'_n = x_k$

αν n άρτιος, $n = 2k$. Η ακολουθία αυτή συγκλίνει επίσης στο x_0 και άρα είναι βασική ακολουθία. Από την υπόθεση της πρότασης η ακολουθία $(f(x'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ δηλαδή η ακολουθία $(f(x_0), f(x_1), f(x_0), f(x_2), \ldots)$ είναι βασική ακολουθία στον (Y, d) και η υπακολουθία των περιττών όρων της $(f(x'_{2n-1}))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η σταθερή ακολουθία $f(x_0)$ που προφανώς συγκλίνει στο $f(x_0)$. Άρα, αφού η βασική ακολουθία $(f(x'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο $f(x_0)$ θα συγκλίνει και η ίδια στο $f(x_0)$. Συνεπώς και η υπακολουθία $(f(x'_{2n}))_{n\in\mathbb{N}}$ των αρτίων όρων της δηλαδή η ακολουθία $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ θα συγκλίνει επίσης στο $f(x_0)$. Επομένως η f είναι συνεχής.

Έστω τώρα ότι επιπλέον κάθε ακολουθία στον (X, ρ) έχει βασική υπακολουθία. Υποθέτουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχουν $x, y \in X$ με $\rho(x, y) < \delta$ και $d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$. Εφαρμόζοντας αυτό για $\delta = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ βρίσκουμε δυο ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X με $\rho(x_n, y_n) \longrightarrow 0$ και $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Από την υπόθεση μας η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει μια βασική υπακολουθία έστω $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε η ακολουθία $(x_{k_1}, y_{k_1}, x_{k_2}, y_{k_2}, \ldots)$ δηλαδή η ακολουθία $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $z_n = x_{k_l}$ αν $n = 2l - 1$, $l \in \mathbb{N}$ και $z = y_{k_l}$ αν $n = 2l$, $l \in \mathbb{N}$ είναι, όπως εύκολα μπορούμε να δούμε, επίσης βασική ακολουθία στον (X, ρ). Αφού η f μεταφέρει βασικές ακολουθίες του (X, ρ) σε βασικές ακολουθίες του (Y, d), η $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ θα είναι βασική ακολουθία στον (Y, d). Έτσι μπορούμε να βρούμε φυσικό n ώστε $d(f(z_{2n-1}), f(z_{2n})) < \varepsilon$ δηλαδή $d(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) < \varepsilon$ που αντιβαίνει στο γεγονός ότι $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Επομένως η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. $\square$

Παρατηρήση. Αν η $f : (X, \rho) \longrightarrow (Y, d)$ μεταφέρει βασικές ακολουθίες σε βασικές ακολουθίες τότε η f δεν είναι απαραίτητα ομοιόμορφα συνεχής. Ως αντιπαράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε την $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$.

Θεώρημα 8.23. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, (Y, d) πλήρης μετρικός χώρος, D πυκνό υποσύνολο του X και $f : D \longrightarrow Y$ ομοιόμορφα συνεχής. Τότε υπάρχει μοναδική συνεχής επέκταση της f στον X, δηλαδή υπάρχει μοναδική συνεχής $\tilde{f} : X \longrightarrow Y$ ώστε $\tilde{f}_{|D} = f$. Η μοναδική αυτή επέκταση $\tilde{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη. Η μοναδικότητα αποδεικνύεται εύκολα με την αρχή της μεταφοράς (βλ. και Ασκ. 2 Κεφ. 4). Η απόδειξη της ύπαρξης της $\tilde{f}$ χωρίζεται σε δύο βήματα. Στο πρώτο βήμα θα ορίσουμε την $\tilde{f}$ και θα δείξουμε ότι είναι καλά ορισμένη σαν συνάρτηση. Στο δεύτερο βήμα θα δείξουμε ότι η $\tilde{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Βήμα 1ο Έστω $x \in X$. Αν $x \in D$ ορίζουμε $\tilde{f}(x) = f(x)$. Αν $x \in X \setminus D$ επιλέγουμε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο D με $x_n \longrightarrow x$. Η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολυθία στο D άρα, αφού η $f : D \longrightarrow Y$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, από Πρόταση 8.21 έπεται ότι η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στον (Y, d). Εφόσον ο (Y, d) είναι πλήρης μετρικός χώρος η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία στον (Y, d). Ορίζουμε $\tilde{f}(x) = \lim_n f(x_n)$. Για να είναι καλός ο ορισμός αυτός πρέπει να δείξουμε ότι το $\tilde{f}(x)$ όπως ορίστηκε δεν εξαρτάται από την επιλογή της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, δηλαδή αν $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στο D με $y_n \longrightarrow x$ τότε οι ακολουθίες $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ και $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ έχουν κοινό όριο.

Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ όπως πριν τότε η ακολουθία $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $z_n = x_k$ αν $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$ και $z_n = y_k$ αν $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή η ακολουθία $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$ συγκλίνει επίσης στο x άρα είναι βασική ακολουθία στον (X, ρ). Όπως προηγουμένως, η $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ θα είναι βασική ακολουθία στον (Y, d). Οι υπακολουθίες της $(f(z_{2n-1}))_{n\in\mathbb{N}}$, $(f(z_{2n}))_{n\in\mathbb{N}}$ των περιττών και αρτίων όρων της αντίστοιχα θα συγκλίνουν στο ίδιο όριο με αυτή και άρα θα έχουν κοινό όριο. Όμως $(f(z_{2n-1}))_{n\in\mathbb{N}} = (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ και $(f(z_{2n}))_{n\in\mathbb{N}} = (f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ συνεπώς $\lim_n f(x_n) = \lim_n f(y_n)$ επομένως η f είναι καλά ορισμένη.

Βήμα 2ο Δείχνουμε ότι η $\tilde{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : D \longrightarrow Y$ μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x_0, y_0 \in D$ με $\rho(x_0, y_0) < \delta$ να ισχύει $d(f(x_0), f(y_0)) < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Έστω τώρα $x, y \in X$ με $\rho(x, y) < \delta$. Από τον ορισμό της $\tilde{f}$ μπορούμε να επιλέξουμε $x' \in D$ με $\rho(x', x) < \dfrac{\delta - \rho(x,y)}{2}$ και $d(f(x'), \tilde{f}(x)) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Ομοίως επιλέγουμε $y' \in D$ με $\rho(y', y) < \dfrac{\delta - \rho(x,y)}{2}$ και $d(f(y'), \tilde{f}(y)) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Επειδή $x', y' \in D$ και

$$\begin{aligned} \rho(x', y') &\leq \rho(x', x) + \rho(x, y) + \rho(y, y') \\ &< \frac{\delta - \rho(x,y)}{2} + \rho(x,y) + \frac{\delta - \rho(x,y)}{2} = \delta \end{aligned}$$

έπεται ότι $d(f(x'), f(y')) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) &\leq d(\tilde{f}(x), f(x')) + d(f(x'), f(y')) + d(f(y'), \tilde{f}(y)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

και άρα η $\tilde{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. □

Παρατήρηση. Αν εξασθενήσουμε στο παραπάνω θεώρημα την υπόθεση ότι η $f : D \longrightarrow Y$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αντικαθιστώντας την με την υπόθεση ότι η η $f : D \longrightarrow Y$ είναι συνεχής δεν εξασφαλίζουμε την ύπαρξη συνεχούς επέκτασης της f στο X. Αν για παράδειγμα $X = Y = \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{1}{x}$ η f δεν επεκτείνεται συνεχώς στο $X = \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω X σύνολο και d η διακριτή μετρική στο X. Δείξτε ότι ο (X, d) είναι πλήρης.

2. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία σε ένα μετρικό χώρο ώστε το σύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι κλειστό. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \to x$.

3. Δώστε παράδειγμα μιας ακολουθίας $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ώστε $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$ και $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

4. Δώστε παράδειγμα μιας φθίνουσας ακολουθίας $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{Q}$ με $\operatorname{diam} F_n \to 0$ και $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

5. Συμβολίζουμε με I το σύνολο των αρρήτων. Δείξτε ότι:

(i) Το I είναι αριθμήσιμη τομή ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.

(ii) Αν $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία από ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τότε $(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n) \cap I \neq \emptyset$.

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Baire.)

Κεφάλαιο 9

Συμπαγείς μετρικοί χώροι

Ορισμός 9.1. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Μια οικογένεια $\{G_i\}_{i\in I}$ υποσυνόλων του X λέγεται ***κάλυμμα*** του A αν $A \subset \bigcup\limits_{i\in I} G_i$. Αν επιπλέον για κάθε $i \in I$ το G_i είναι ανοικτό, το $\{G_i\}_{i\in I}$ λέγεται ***ανοικτό κάλυμμα*** ενώ στην περίπτωση που το I είναι πεπερασμένο το $\{G_i\}_{i\in I}$ λέγεται ***πεπερασμένο κάλυμμα***. Αν $J \subset I$ ώστε $A \subset \bigcup\limits_{i\in J} G_i$ το $\{G_i\}_{i\in J}$ λέγεται ***υποκάλυμμα*** του $\{G_i\}_{i\in I}$ (για το A).

Ορισμός 9.2. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $K \subset X$. Το K θα καλείται ***συμπαγές*** αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του K έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή αν για κάθε οικογένεια $\{G_i\}_{i\in I}$ ανοικτών υποσυνόλων του X με $K \subset \bigcup\limits_{i\in I} G_i$ υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ ώστε $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} G_{i_k}$. Ειδικότερα αν $K = X$ τότε ο X θα καλείται ***συμπαγής μετρικός χώρος***.

Παραδείγματα

(i) Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο ενός μετρικού χώρου X είναι συμπαγές. (Η απόδειξη είναι εύκολη και αφήνεται στον αναγνώστη.)

(ii) Κάθε ακολουθία σε ένα μετρικό χώρο X μαζί με το όριό της είναι συμπαγές υποσύνολο του X, δηλαδή αν (x_n) ακολουθία στο X και $x \in X$ ώστε $x_n \to x$ τότε το σύνολο $K = \{x_n : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X. Πράγματι, έστω $\{G_i\}_{i\in I}$ οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X με $K \subset \bigcup\limits_{i\in I} G_i$. Τότε υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $x \in G_{i_0}$ και άρα, αφού G_{i_0} ανοικτό, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $x_n \in G_{i_0}$. Επίσης για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n_0 - 1$ υπάρχει $i_k \in I$ ώστε $x_k \in G_{i_k}$. Συνεπώς $K \subset \bigcup\limits_{k=0}^{n_0-1} G_{i_k}$.

(iii) Αν το X είναι άπειρο σύνολο και ρ η διακριτή μετρική στο X τότε ο μετρικός χώρος (X,ρ) δεν είναι συμπαγής. Πράγματι, η οικογένεια $\{\{x\}\}_{x\in X}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X που δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

(iv) Το $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική δεν είναι συμπαγής μετρικός χώρος. Πράγματι, το ανοικτό κάλυμμα $\{(-n,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ του $\mathbb{R}$ δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

(v) Το ανοικτό διάστημα $(0,1)$ δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Πράγματι, η οικογένεια $\{(\frac{1}{n},1) : \ n = 2,3,\ldots\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του $(0,1)$ που δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Όμοια τα διαστήματα $[0,1)$ και $(0,1]$ δεν είναι συμπαγή. (Θεωρείστε π.χ. τα ανοικτά καλύμματα $\{(-1,1-\frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{(\frac{1}{n},1+\frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ των $[0,1)$ και $(0,1]$ αντιστοίχως).

(vi) Κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$ είναι, όπως θα δούμε παρακάτω, συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Πρόταση 9.3. *Έστω $\{V_i\}_{i\in I}$ μία οικογένεια από ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ ώστε $[0,1] \subset \cup_{i\in I}V_i$. Τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο F του I, ώστε $[0,1] \subset \cup_{i\in F}V_i$ και άρα το διάστημα $[0,1]$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Ορίζουμε το σύνολο $\mathcal{A} = \{0 \le t \le 1 : \ \exists\ F_t \subset I$ πεπερασμένο ώστε $[0,t] \subset \cup_{i\in F_t}V_i\}$. Κατάρχάς παρατηρούμε ότι $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Πράγματι εύκολα βλέπουμε ότι $0 \in \mathcal{A}$. Προφανώς, το σύνολο $\mathcal{A}$ είναι άνω φραγμένο και άρα υπάρχει $t_0 = \sup\mathcal{A}$. Θα δείξουμε κατάρχάς ότι $t_0 \in \mathcal{A}$ και εν συνεχεία ότι $t_0 = 1$. Αυτό θα οδηγήσει στην απόδειξη της πρότασης. Για το ότι $t_0 \in \mathcal{A}$, επιλέγουμε i_0 στο I ώστε $t_0 \in V_{i_0}$. Επειδή το V_{i_0} είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ ώστε $(t_0-\varepsilon_0, t_0+\varepsilon_0) \subset V_{i_0}$. Από τον ορισμό του supremum έχουμε ότι για το ε_0, υπάρχει $t \in \mathcal{A}$ με $t_0 - \varepsilon_0 < t < t_0$ και επειδή $t \in \mathcal{A}$ συνεπάγεται ότι

$$[0,t_0] = [0,t] \cup [t,t_0] \subset \cup_{i\in F_t}V_i \cup (t_0-\varepsilon_0, t_0+\varepsilon_0) \subset \cup_{i\in F_t\cup\{i_0\}}V_i.$$

Θέτοντας $F_{t_0} = F_t\cup\{i_0\}$ έχουμε ότι το F_{t_0} είναι πεπερασμένο υποσύνολο του I, άρα $t_0 \in \mathcal{A}$. Μένει να δειχθεί ότι $t_0 = 1$. Υποθέτουμε με εις άτοπο ότι $t_0 < 1$. Απο πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$, έχουμε ότι υπάρχει $t_0 < q < \min\{1, t_0+\varepsilon_0\}$ με $q \in \mathbb{Q}$. Τότε, παρατηρούμε ότι

$$[0,q_0] = [0,t_0] \cup [t_0,q] \subset \cup_{i\in F_{t_0}}V_i \cup (t_0-\varepsilon_0, t_0+\varepsilon_0) \subset \cup_{i\in F_{t_0}}V_i.$$

Επομένως, επειδή $q < 1$ έχουμε ότι $q \in \mathcal{A}$ και αυτό είναι άτοπο καθώς $t_0 = \sup\mathcal{A}$ ενώ $t_0 < q$. □

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται το ακόλουθο.

Πόρισμα 9.4. *Κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$ είναι συμπαγές.*

9.1 Ιδιότητες συμπαγών χώρων

Πρόταση 9.5. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και K συμπαγές υποσύνολο του X. Τότε το K είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X.*

Απόδειξη.. Δείχνουμε πρώτα ότι το K είναι κλειστό. Αρκεί να δειχθεί ότι το $X \setminus K$ είναι ανοικτό ή ισοδύναμα για κάθε $x \in X \setminus K$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $S(x,\varepsilon) \subset X \setminus K$. Έστω $x \in X \setminus K$. Τότε για κάθε $y \in K$, $y \neq x$ και άρα $\rho(x,y) > 0$. Θέτουμε για κάθε $y \in K$, $\varepsilon_y = \dfrac{\rho(x,y)}{2}$ και παρατηρούμε ότι $S(x,\varepsilon_y) \cap S(y,\varepsilon_y) = \emptyset$ για όλα τα $y \in K$. Επιπλέον $K \subset \bigcup\limits_{y \in K} S(y,\varepsilon_y)$ και αφού το K είναι συμπαγές υπάρχουν $y_1, y_2, \ldots, y_n$ στο K ώστε $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} S(y_i,\varepsilon_{y_i})$. Θέτουμε $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{y_i} : \ i = 1,2,\ldots,n\}$. Τότε $S(x,\varepsilon) \cap S(y_i,\varepsilon_{y_i}) \subset S(x,\varepsilon_{y_i}) \cap S(y_i,\varepsilon_{y_i}) = \emptyset$ για όλα τα $i = 1,2,\ldots,n$. Συνεπώς $S(x,\varepsilon) \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n} S(y_i,\varepsilon_{y_i}) = \emptyset$ και αφού $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} S(y_i,\varepsilon_{y_i})$ έπεται ότι $S(x,\varepsilon) \cap K = \emptyset$ ή $S(x,\varepsilon) \subset X \setminus K$.

Δείχνουμε στη συνέχεια ότι το K είναι φραγμένο. Πράγματι, έστω x τυχαίο σημείο του X. Τότε $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S(x,n)$ και άρα $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S(x,n)$. Άρα, αφού K συμπαγές, υπάρχουν $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ώστε $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} S(x,n_i)$. Αν $n_0 = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ τότε $K \subset S(x,n_0)$ (αφού $S(x,n_i) \subset S(x,n_0)$ για όλα τα $i = 1,2,\ldots,k$). Επομένως $\operatorname{diam} K \leq 2n_0 < \infty$. □

Πρόταση 9.6. *Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος. Τότε κάθε κλειστό υποσύνολο του X είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Έστω F κλειστό υποσύνολο του X και $\{G_i\}_{i \in I}$ οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X ώστε $F \subset \bigcup\limits_{i \in I} G_i$. Αφού το F είναι κλειστό, το $X \setminus F$ είναι ανοικτό και άρα θέτοντας $G'_i = (X \setminus F) \cup G_i$ για κάθε $i \in I$, η οικογένεια $\{G'_i\}_{i \in I}$ αποτελείται από ανοικτά υποσύνολα του X. Επιπλέον $X = F \cup (X \setminus F) \subset (\bigcup\limits_{i \in I} G_i) \cup (X \setminus F) \subset \bigcup\limits_{i \in I} G'_i$ δηλαδή η οικογένεια $\{G'_i\}_{i \in I}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Εφόσον ο X είναι συμπαγής υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ ώστε $X = \bigcup\limits_{k=1}^{n} G'_{i_k} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} (G_{i_k}) \cup (X \setminus F)$ και άρα $F \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} G_{i_k}$. Συνεπώς κάθε ανοικτό κάλυμμα του F έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα και άρα το F είναι συμπαγές υποσύνολο του X. □

Πόρισμα 9.7. *Κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Πράγματι, αν F είναι ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε εύκολα βλέπουμε ότι $F \subset [\min F, \max F]$. Επομένως, το F είναι κλειστό υποσύνολο συμπαγούς (Πόρισμα 9.4) και από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι είναι συμπαγές. □

Πρόταση 9.8. *Κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Έστω X ένας συμπαγής μετρικός χώρος. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η οικογένεια $\{S(x, \frac{1}{n}) : x \in X\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X και άρα υπάρχει D_n πεπερασμένο υποσύνολο του X ώστε $X = \bigcup\limits_{x \in D_n} S(x, \frac{1}{n})$. Θέτουμε $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$.

Το D είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων. Επίσης το D είναι πυκνό στο X. Πράγματι, έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$ και αφού $X = \bigcup_{x \in D_n} S(x, \frac{1}{n})$ έχουμε ότι υπάρχει $y \in D_n$ ώστε $x \in S(y, \frac{1}{n})$. Άρα υπάρχει $y \in D$ ώστε $\rho(x, y) < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Συνεπώς το D είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του X επομένως ο X είναι διαχωρίσιμος. □

Ορισμός 9.9. Εστω X ένα σύνολο. Μια οικογένεια $(F_i)_{i \in I}$ υποσυνόλων του X έχει την ***ιδιότητα της πεπερασμένης τομής*** αν για κάθε $n = 1, 2, \dots$ και $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$, $\bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k} \neq \emptyset$.

Η επόμενη πρόταση αποτελεί τη δυϊκή ερμηνεία της έννοιας της συμπάγειας μέσω τομών κλειστών συνόλων.

Πρόταση 9.10. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Ο X είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε οικογένεια $(F_i)_{i \in I}$ κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής ισχύει $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο X είναι συμπαγής και $(F_i)_{i \in I}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Υποθέτουμε ότι $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$. Τότε $\bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i) = X$ (δείτε τους κανόνες De Morgan στο Κεφάλαιο 3). Συνεπώς η οικογένεια $\{X \setminus F_i\}_{i \in I}$ αποτελεί ένα ανοικτό κάλυμμα του X και αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$ ώστε $X = \bigcup_{k=1}^{n} (X \setminus F_{i_k})$. Αλλά τότε $\bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k} = \emptyset$ άτοπο, διότι η οικογένεια $(F_i)_{i \in I}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Επομένως $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.

Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε οικογένεια $(F_i)_{i \in I}$ κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής ισχύει $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$. Θα δείξουμε ότι τότε ο X είναι συμπαγής. Πράγματι, διαφορετικά υπάρχει $\{G_i\}_{i \in I}$ ανοικτό κάλυμμα του X χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα. Συνεπώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $i_i, i_2, \dots, i_n \in I$, $\bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k} \neq X$ ή $\bigcap_{k=1}^{n} (X \setminus G_{i_k}) \neq \emptyset$. Θέτουμε $F_i = X \setminus G_i$ για κάθε $i \in I$. Τότε η $\{F_i\}_{i \in I}$ είναι μια οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Άρα από υπόθεση θα πρέπει $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$. Αλλά τότε $\bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i) \neq X$ ή $\bigcup_{i \in I} G_i \neq X$ άτοπο. □

Άμεση εφαρμογή της παραπάνω πρότασης είναι η εξής:

Πρόταση 9.11. *Κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από την προηγούμενη πρόταση και από τον χαρακτηρισμό Cantor για τους πλήρεις μετρικούς χώρους. □

Πρόταση 9.12. *Έστω K συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου X. Τότε κάθε άπειρο υποσύνολο του K έχει ένα τουλάχιστον σημείο συσσώρευσης στο K.*

Απόδειξη. Έστω A άπειρο υποσύνολο του K. Ας υποθέσουμε ότι το A δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης στο K. Άρα για κάθε $x \in K$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $A \cap (S(x, \varepsilon_x) \setminus \{x\}) = \emptyset$. Έχουμε ότι $K \subset \bigcup_{x \in K} S(x, \varepsilon_x)$ και αφού το K είναι συμπαγές υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ ώστε $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} S(x_i, \varepsilon_{x_i})$ και άρα, αφού $A \subset K$, $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} S(x_i, \varepsilon_{x_i})$. Επειδή $A \cap (S(x_i, \varepsilon_{x_i}) \setminus \{x_i\}) = \emptyset$ για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, n$ θα πρέπει $A \subset \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ δηλαδή το A είναι πεπερασμένο, άτοπο. $\square$

Πρόταση 9.13. *Έστω K συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, ρ). Τότε κάθε ακολουθία στο K έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε σημείο του K.*

Απόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία στο K. Θέτουμε $A = \{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$. Αν το A είναι πεπερασμένο τότε υπάρχει άπειρο υποσύνολο $\{k_1 < k_2 < \cdots\}$ του $\mathbb{N}$ και $x \in K$ ώστε $x_{k_n} = x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα $x_{k_n} \to x$.

Αν το A είναι άπειρο τότε από Πρόταση 9.12 υπάρχει $x \in K$ ώστε το x να είναι σημείο συσσώρευσης του A. Επαγωγικά κατασκευάζουμε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) με $x_{k_n} \to x$ ως εξής: Επιλέγουμε $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_{k_1}, x) < 1$. Έστω ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχουμε επιλέξει φυσικούς $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ ώστε $\rho(x_{k_i}, x) < \dfrac{1}{i}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Θέτουμε $M = \{m \in \mathbb{N} : \ m > k_n$ και $\rho(x_m, x) < \dfrac{1}{n+1}\}$. Το σύνολο M είναι μη κενό. Πράγματι, αν $M = \emptyset$ τότε $S(x, \dfrac{1}{n+1}) \cap A \subset \{x_1, x_2, \ldots, x_{k_n}\}$, άτοπο αφού για κάθε $\varepsilon > 0$ το $S(x, \varepsilon) \cap A$ είναι απειροσύνολο (δες Κεφάλαιο 3). Αν $k_{n+1} = \min M$ τότε $k_{n+1} > k_n$ και $\rho(x_{k_{n+1}}, x) < \dfrac{1}{n+1}$. Έτσι η (x_{k_n}) είναι μια υπακολουθία της (x_n) με $x_{k_n} \to x$. $\square$

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο της Πρότασης 9.13. Για το σκοπό αυτό θα μας χρειασθεί η έννοια του ε-διαχωρισμένου υποσυνόλου ενός μετρικού χώρου. Υπενθυμίζουμε ότι ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου (X, ρ) καλείται ***ε-διαχωρισμένο*** αν για κάθε $x, y \in A$ με $x \neq y$ έχουμε ότι $\rho(x, y) \geq \varepsilon$.

Λήμμα 9.14. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $K \subset X$ με την ιδιότητα ότι κάθε ακολουθία στο K έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Τότε αν $\varepsilon > 0$, κάθε ε-διαχωρισμένο υποσύνολο του K είναι πεπερασμένο.*

Απόδειξη. Έστω ότι για κάποιο $\varepsilon > 0$ υπάρχει A άπειρο ε-διαχωρισμένο υποσύνολο του K. Επιλέγουμε ακολουθία (x_n) στο A με $x_n \neq x_m$ για $n \neq m$. Από υπόθεση η (x_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Επειδή κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι και ακολουθία Cauchy έχουμε ότι θα υπάρχουν $n \neq m$ φυσικοί ώστε $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Άτοπο, αφού $x_n \neq x_m$ και A ε-διαχωρισμένο. $\square$

Λήμμα 9.15. *Έστω (X, ρ) μετρικός με την ιδιότητα κάθε ακολουθία στον X να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Τότε ο X είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη.. Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι κάθε ε-διαχωρισμένο υποσύνολο του X είναι πεπερασμένο. Το συμπέρασμα έπεται άμεσα από το Θεώρημα 7.16. $\square$

Το προηγούμενο λήμμα γενικεύεται και ως εξής:

Λήμμα 9.16. *Έστω K υποσύνολο του X με την ιδιότητα κάθε ακολουθία στο K να έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε στοιχείο του K. Τότε υπάρχει D αριθμήσιμο υποσύνολο του K ώστε $K \subset \overline{D}$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη ακολουθεί τις ίδιες γραμμές με την απόδειξη του Θεωρήματος 7.16. Περιγράφουμε συνοπτικά τα βήματα της απόδειξης. Καταρχήν με εφαρμογή του Λήμματος του Zorn δείχνουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ το μερικά διατεταγμένο (από την $\subset$) σύνολο $\Delta_\varepsilon = \{A : \; A \subset K$ και A ε-διαχωρισμένο$\}$ έχει ένα μεγιστικό στοιχείο. Ύστερα, αν A_n είναι μεγιστικό στοιχείο του $\Delta_{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ και δείχνουμε ότι $K \subset \overline{D}$. (Δείτε και τις αποδείξεις των Προτάσεων 7.13 και 7.14.) Το D είναι αριθμήσιμο, ως αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων (αφού από Λήμμα 9.14 κάθε A_n είναι πεπερασμένο). $\square$

Λήμμα 9.17. *Έστω $K \subset X$ όπως στο Λήμμα 9.16. Τότε κάθε ανοικτό κάλυμμα του K έχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα.*

Απόδειξη. Έστω καταρχήν ότι $K = X$. Από Λήμμα 9.15 έχουμε ότι ο X είναι διαχωρίσιμος και άρα από Πρόταση 7.20 ο X έχει αριθμήσιμη βάση περιοχών, έστω $\mathcal{B} = \{V_n : \; n \in \mathbb{N}\}$. Έστω τώρα $\{G_i\}_{i \in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $i_x \in I$ και $n_x \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in V_{n_x} \subset G_{i_x}$. Θέτουμε $M = \{n_x : \; x \in X\}$. Τότε $M \subset \mathbb{N}$ και άρα το M είναι αριθμήσιμο. Για κάθε $m \in M$, επιλέγουμε $i_m \in I$ ώστε $V_m \subset G_{i_m}$ (αυτό μπορεί να γίνει διότι αν $m \in M$ υπάρχει $x \in X$ ώστε $m = n_x$ και $x \in V_{n_x} \subset G_{i_x}$). Άρα $X = \bigcup\limits_{m \in M} V_m \subset \bigcup\limits_{m \in M} G_{i_m}$. Συνεπώς η οικογένεια $\{G_{i_m}\}_{m \in M}$ είναι ένα αριθμήσιμο υποκάλυμμα του $\{G_i\}_{i \in I}$ για το X.

Προχωράμε τώρα στη γενική περίπτωση $K \subset X$. Από το Λήμμα 9.16 υπάρχει D αριθμήσιμο υποσύνολο του K ώστε $K \subset \overline{D}$. Θέτουμε $\mathcal{B} = \{S(y, q) : \; y \in D, \; q \in \mathbb{Q}^+\}$. Όπως στην Πρόταση 7.19 δείχνουμε ότι για κάθε $x \in K$ και κάθε $G \subset X$ ανοικτό ώστε $x \in G$, υπάρχει $S(y, q) \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in S(y, q) \subset G$. Επειδή η $\mathcal{B}$ είναι αριθμήσιμη μπορεί να γραφεί στη μορφή $\mathcal{B} = \{V_n : \; n \in \mathbb{N}\}$ και ύστερα συνεχίζουμε όπως στην περίπτωση $K = X$. $\square$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Ας σημειώσουμε εδώ ότι ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ καλείται ***χώρος Lindelöf*** αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα. Έτσι από το Λήμμα 9.17 έχουμε ότι κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι χώρος Lindelöf Παρατηρήστε επίσης ότι ένας υπεραριθμήσιμος χώρος με τη διακριτή μετρική δεν είναι χώρος Lindelöf.

Λήμμα 9.18. *Έστω $K \subset X$ όπως στο Λήμμα 9.16. Τότε κάθε αριθμήσιμο ανοικτό κάλυμμα του K έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.*

Απόδειξη. Έστω $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ αριθμήσιμο ανοικτό κάλυμμα του K. Υποθέτουμε ότι το $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Συνεπώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $K \setminus \bigcup_{i=1}^{n} G_i \neq \emptyset$. Επιλέγουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n} G_i$. Από την υπόθεση μας για το K η (x_n) έχει μια υπακολουθία (x_{k_n}) που συγκλίνει σε ένα στοιχείο x του K. Επιλέγουμε $i_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in G_{i_0}$ και αφού $x_{k_n} \to x$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_{k_n} \in G_{i_0}$ για κάθε $n \geq n_0$. Άτοπο, αφου για κάθε $n \geq i_0$ από την κατασκευή της (x_n), $x_n \notin G_{i_0}$. □

Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε τον εξής θεμελιώδους σημασίας χαρακτηρισμό των συμπαγών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου.

Θεώρημα 9.19. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $K \subset X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το K είναι συμπαγές υποσύνολο του X.

(ii) Κάθε υπακολουθία του K έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε στοιχείο του K.

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Είναι η Πρόταση 9.13.
(ii) $\Longrightarrow$ (i) Έστω $\{G_i\}_{i\in I}$ ανοικτό κάλυμμα του K. Από το Λήμμα 9.17, υπάρχει $I' \subset I$ αριθμήσιμο ώστε $K \subset \bigcup_{i\in I'} G_i$. Από το Λήμμα 9.18 υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I' \subset I$ ώστε $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$. Επομένως το K είναι συμπαγές. □

Θεώρημα 9.20 (Heine-Borel)**.** *Κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$ του $\mathbb{R}$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη.. Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass κάθε ακολουθία (x_n) του $[a, b]$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε στοιχείο του $[a, b]$. Από το Θεώρημα 9.19 έχουμε ότι το $[a, b]$ είναι συμπαγές. □

Γενικά έχουμε τον επόμενο χαρακτηρισμό των συμπαγών υποσυνόλων του Ευκλειδείου χώρου $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$.

Θεώρημα 9.21. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^k$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το K είναι συμπαγές.

(ii) Το K είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$.

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Προκύπτει από την Πρόταση 9.5.
(ii) $\Longrightarrow$ (i) Έστω (x_n) ακολουθία του K. Αφού το K είναι φραγμένο, η (x_n) είναι φραγμένη ακολουθία του $\mathbb{R}^k$ και άρα από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{k_n}). Αν $x = \lim x_{k_n}$ έπεται ότι $x \in K$, αφού το K είναι κλειστό. Από το Θεώρημα 9.19 έπεται ότι το K είναι συμπαγές. □

Παρατηρήση. Ο παραπάνω χαρακτηρισμός δεν ισχύει γενικά για μετρικούς χώρους. Πράγματι, όπως γνωρίζουμε, για κάθε μετρικό χώρο υπάρχει ισοδύναμη φραγμένη μετρική (Κεφάλαιο 3). Έτσι οποιοδήποτε κλειστό υποσύνολο του $(\mathbb{R}^k, \rho)$ όπου ρ φραγμένη είναι κλειστό και φραγμένο αλλά όχι απαραίτητα συμπαγές (π.χ. ο $(\mathbb{R}^k, \rho)$ δεν είναι συμπαγής). Γενικά, αν (X, ρ) είναι μη συμπαγής μετρικός χώρος και η μετρική ρ είναι φραγμένη τότε ο ίδιος ο X είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο αλλά όχι συμπαγές.

9.2 Συνεχείς συναρτήσεις σε συμπαγείς μετρικούς χώρους

Υπενθυμίζουμε ότι όπως έχει δειχθεί στο Κεφάλαιο 3, μια συνάρτηση $f : (X, \rho) \longrightarrow (Y, d)$ είναι συνεχής αν και μόνο αν $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X για κάθε U ανοικτό υποσύνολο του Y, ή $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X για κάθε F κλειστό υποσύνολο του Y. Στην παρούσα παράγραφο εξετάζονται επιπλέον ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων όταν αυτές ορίζονται σε ένα συμπαγή μετρικό χώρο.

Πρόταση 9.22. *Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος, (Y, d) μετρικός χώρος και $f : (X, \rho) \longrightarrow (Y, d)$ συνεχής συνάρτηση. Τότε ισχύουν τα επόμενα:*

(i) Η εικόνα $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y και άρα αν η f είναι επί τότε και ο Y είναι συμπαγής.

(ii) Για κάθε $F \subset X$ κλειστό, η εικόνα $f(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y.

Απόδειξη.. (i) Έστω $\{U_i\}_{i \in I}$ ανοικτό κάλυμμα του $f(X)$ στον (Y, d). Τότε $f(X) \subset \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ και άρα $X \subset f^{-1}(\bigcup\limits_{i \in I} U_i) = \bigcup\limits_{i \in I} f^{-1}(U_i)$. Αφού η f είναι συνεχής για κάθε $i \in I$ το σύνολο $f^{-1}(U_i)$ είναι ανοικτό στο X και άρα το $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X. Εφόσον ο X είναι συμπαγής υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ ώστε $X \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} f^{-1}(U_{i_k})$, οπότε $f(X) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{i_k}$. Επομένως το $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y. Αν η f είναι επί τότε $f(X) = Y$ και άρα ο Y είναι συμπαγής.

(ii) Έστω $F \subset X$ κλειστό. Αφού ο X είναι συμπαγής, το F είναι συμπαγές υποσύνολο του X (Πρόταση 9.6). Ομοίως με το (i) δείχνουμε ότι το $f(F)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y. Από Πρόταση 9.5 το $f(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y. □

Από τα παραπάνω έπεται και η εξής:

Πρόταση 9.23. *Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος, (Y, d) μετρικός χώρος και $f : (X, \rho) \longrightarrow (Y, d)$ συνεχής, 1-1 και επί. Τότε η $f^{-1} : (Y, d) \longrightarrow (X, \rho)$ είναι επίσης συνεχής και άρα ο f είναι ομοιομορφισμός.*

Απόδειξη.. Έστω $F \subset X$ κλειστό. Αρκεί να δειχθεί ότι το $(f^{-1})^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y. Όμως $(f^{-1})^{-1} = f$ και άρα $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$. Από Πρόταση 9.22(ii) έχουμε το συμπέρασμα. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το συμπέρασμα της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει αν ο (X,ρ) δεν είναι συμπαγής. Π.χ. θεωρήστε το $\mathbb{R}$ με τη διακριτή μετρική ρ_δ και έστω $f : (\mathbb{R},\rho_\delta) \longrightarrow (\mathbb{R},\rho)$ με $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όπου ρ είναι η συνήθης μετρική. Τότε η f είναι συνεχής, 1-1 και επί αλλά δεν είναι ομοιομορφισμός. Πράγματι, η ταυτοτική συνάρτηση από το $(\mathbb{R},\rho)$ στο $(\mathbb{R},\rho_\delta)$ δεν είναι συνεχής αφού π.χ $\frac{1}{n} \to 0$ στον $(\mathbb{R},\rho)$ ενώ $\frac{1}{n} \not\to 0$ στον $(\mathbb{R},\rho_\delta)$. Σχετική είναι και η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 9.24. *Έστω X σύνολο και ρ, d δυο μετρικές στο X. Αν ο (X,ρ) είναι συμπαγής και η ταυτοτική συνάρτηση $I : (X,\rho) \longrightarrow (X,d)$ είναι συνεχής τότε οι μετρικές ρ και d είναι ισοδύναμες.*

Απόδειξη.. Προκύπτει από την Πρόταση 9.23 αφού η I είναι 1-1 και επί. □

Πρόταση 9.25. *Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : (X,\rho) \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.*

Απόδειξη.. Το $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (Πρόταση 9.22 (i)). Άρα είναι φραγμένο και συνεπώς υπάρχει το $M = \sup f(X)$ και το $m = \inf f(X)$. Επειδή το $f(X)$ είναι και κλειστό (Πρόταση 9.5) έχουμε ότι $m, M \in f(X)$. □

Λήμμα 9.26 (Lebesgue). *Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και $\{G_i\}_{i\in I}$ ανοικτό κάλυμμα του X. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $A \subset X$ με $\operatorname{diam}(A) < \delta$ υπάρχει $i \in I$ ώστε $A \subset G_i$.*

Απόδειξη.. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $i_x \in I$ και $\varepsilon_x > 0$ ώστε $S(x,\varepsilon_x) \subset G_{i_x}$. Η οικογένεια $\{S(x,\frac{\varepsilon_x}{2})\}_{x\in X}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X και αφού ο X είναι συμπαγής υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ ώστε $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} S(x_i, \frac{\varepsilon_{x_i}}{2})$. Θέτουμε $\delta = \frac{1}{2}\min\{\varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{x_2}, \ldots, \varepsilon_{x_n}\}$.

Τότε $\delta > 0$ και για κάθε $A \subset X$ με $\operatorname{diam}(A) < \delta$, $A \subset S(y,\delta)$ για οποιοδήποτε $y \in A$. Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $y \in X$ υπάρχει $i \in I$ ώστε $S(y,\delta) \subset G_i$. Πράγματι, έστω $y \in X$. Αφού $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} S(x_i, \frac{\varepsilon_{x_i}}{2})$ υπάρχει $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ώστε $y \in S(x_k, \frac{\varepsilon_{x_k}}{2})$ και άρα από την τριγωνική ανισότητα $S(y,\delta) \subset S(x_k, \varepsilon_{x_k}) \subset G_{i_{x_k}}$. □

Γνωρίζουμε ότι κάθε συνεχής $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι και ομοιόμορφα συνεχής. (Το αποτέλεσμα αυτό έχει θεμελιώδη σημασία στην απόδειξη της ολοκληρωσιμότητας των συνεχών συναρτήσεων.) Γενικά για συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε συμπαγείς μετρικούς χώρους και με τιμές σε οποιοδήποτε μετρικό χώρο έχουμε το επόμενο.

Θεώρημα 9.27. *Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος, (Y,d) μετρικός χώρος και $f : (X,\rho) \longrightarrow (Y,d)$ συνεχής. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη.. Θα εφαρμόσουμε το Λήμμα Lebesgue. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι συνεχής η οικογένεια $\{f^{-1}(S(y, \frac{\varepsilon}{2}))\}_{y\in Y}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X. Από το Λήμμα Lebesgue υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $\rho(x_1, x_2) < \delta$ υπάρχει $y \in Y$ ώστε $x_1, x_2 \in f^{-1}(S(y, \frac{\varepsilon}{2}))$. Άρα $f(x_1), f(x_2) \in S(y, \frac{\varepsilon}{2})$ συνεπώς $d(f(x_1), f(x_2)) \leq d(f(x_1), y) + d(y, f(x_2)) < \varepsilon$. □

Τέλος, μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα των συμπαγών μετρικών χώρων, είναι και η ακόλουθη:

Πρόταση 9.28. *Έστω (K, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $T : (K, \rho) \to (K, \rho)$ ισομετρία. Τότε η T είναι επί.*

Απόδειξη. Έστω ότι η T δεν είναι επί. Άρα έχουμε την ακόλουθη κατάσταση:

$$T[K] \subsetneq K$$

Διαλέγουμε $x_0 \in K \setminus T[K]$ και παρατηρούμε ότι επειδή ο K είναι συμπαγής, $\varepsilon_0 = \rho(x_0, T[K]) > 0$ και επειδή η T είναι ισομετρία για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η T^n θα είναι επίσης ισομετρία και άρα $\rho(T^n(x_0), T^{n+1}[K]) = \varepsilon_0$. Άρα για κάθε $m > n$, $T^m(x_0) = T^{n+1}(T^{m-n-1}(x_0)) \in T^{n+1}[K]$, συνεπώς $\rho(T^n(x_0), T^m(x_0)) \geq \varepsilon_0$ και άρα η ακολουθία $(T^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ δεν μπορεί να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία που είναι άτοπο από τη συμπάγεια του K. □

9.3 Ολικά φραγμένα υποσύνολα μετρικών χώρων.

Εισάγουμε εδώ την έννοια του ολικά φραγμένου υποσυνόλου ενός μετρικού χώρου. Η έννοια αυτή είναι αρκετά κοντά με την συμπάγεια αλλά πιο ασθενής από αυτή. Συγκεκριμένα όπως θα δούμε, ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, ρ) είναι ολικά φραγμένο αν και μόνο αν κάθε ακολουθία του περιέχει Cauchy υπακολουθία. Έτσι κάθε συμπαγές υποσύνολο του (X, ρ) είναι ολικά φραγμένο, αλλά το αντίστροφο δεν συμβαίνει πάντα αφού κάθε ακολουθία Cauchy σε ένα υποσύνολο A του (X, ρ) δεν συγκλίνει απαραίτητα στο A αλλά ούτε και στον X, (εκτός αν ο X είναι πλήρης). Επίσης η έννοια του ολικά φραγμένου υποσυνόλου δεν μεταφέρεται σε ισοδύναμες μετρικές σε αντίθεση με τη συμπάγεια. Τέλος, η ιδιότητα του ολικά φραγμένου συνόλου, κληρονομείται σε όλα τα υποσύνολά του, κάτι που δεν συμβαίνει με τη συμπάγεια που κληρονομείται μόνο στα κλειστά υποσύνολα.

Δίνουμε τον ορισμό του ολικά φραγμένου υποσυνόλου ενός μετρικού χώρου (X, ρ) :

Ορισμός 9.29. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Το A καλείται *ολικά φραγμένο* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο $F \subset A$ ώστε $A \subset \cup_{x\in F} S(x, \varepsilon)$. Αν $A = X$ τότε ο (X, ρ) θα καλείται ολικά φραγμένος μετρικός χώρος. Επίσης αν $A = \emptyset$, τότε θα θεωρούμε ότι το A είναι ολικά φραγμένο.

Παρατηρήσεις. 1. Αν $A \subset X$, συμπαγές, τότε το A είναι ολικά φραγμένο. Πράγματι, αν $\varepsilon > 0$ τότε η ανοικτή κάλυψη $A \subset \cup_{x\in A} S(x, \varepsilon)$ του A έχει πεπερασμένη υποκάλυψη και άρα υπάρχει $F \subset A$ πεπερασμένο ώστε $A \subset \cup_{x\in F} S(x, \varepsilon)$.

2. Αν $A \subset X$ ολικά φραγμένο, τότε το A είναι και φραγμένο. Πράγματι. Για $\varepsilon = 1$ υπάρχει $F \subset A$ πεπερασμένο ώστε $A \subset \cup_{x \in F} S(x, 1)$. Επειδή το F είναι πεπερασμένο,

$$\operatorname{diam} F = \max\{\rho(x, y) : x, y \in F\} < \infty.$$

Εύκολα τώρα προκύπτει ότι $\operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam} F + 2 < \infty$.

3. Κάθε φραγμένο υποσύνολο ενός μετρικού χώρου δεν είναι κατ' ανάγκη ολικά φραγμένο. Π.χ. Θεωρείστε τον $(\mathbb{R}, \rho_\delta)$ όπου ρ_δ η διακριτή μετρική ($\rho_\delta(x, y) = 1$ αν $x \neq y$ και $\rho_\delta(x, y) = 0$ αν $x = y$). Τότε ο $(\mathbb{R}, \rho_\delta)$ είναι φραγμένος μετρικός χώρος αλλά όχι ολικά φραγμένος αφού για $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $S_{\rho_\delta}(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$ και άρα για κάθε $F \subset \mathbb{R}$ πεπερασμένο, $\cup_{x \in F} S_{\rho_\delta}(x, \frac{1}{2}) = F \neq \mathbb{R}$.

Λήμμα 9.30. *Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στον (X, ρ) τέτοια ώστε κάθε υπακολουθία της δεν είναι Cauchy. Τότε υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και $M \subset \mathbb{N}$ άπειρο, ώστε για κάθε $M' \subset M$ άπειρο,* $\operatorname{diam}\{x_m : m \in M'\} > \varepsilon$.

Απόδειξη. Έστω προς απαγωγή σε άτοπο, ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε άπειρο υποσύνολο M του $\mathbb{N}$ υπάρχει περαιτέρω άπειρο υποσύνολο M' του M ώστε $\operatorname{diam}\{x_m : m \in M'\} \leq \varepsilon$. Συνεπώς για $\varepsilon = 1$ και για $M = \mathbb{N}$ υπάρχει $M_1' \subset M$ άπειρο ώστε $\operatorname{diam}\{x_m : m \in M_1'\} \leq 1$. Ομοίως για $\varepsilon = \frac{1}{2}$ και για $M = M_1'$ υπάρχει $M_2' \subset M_1'$ άπειρο ώστε $\operatorname{diam}\{x_m : m \in M_2'\} \leq \frac{1}{2}$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε επαγωγικά μια φθίνουσα ακολουθία

$$\mathbb{N} \supset M_1' \supset M_2' \supset \cdots \supset M_n' \supset \ldots$$

άπειρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{diam}\{x_m : m \in M_n'\} \leq \frac{1}{n}.$$

Έστω $M_\infty = \{m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots\}$ μια διαγωνοποίηση της $(M_n')_{n \in \mathbb{N}}$ δηλαδή $m_1 < m_2 < \cdots < m_n < \ldots$ και $m_n \in M_n'$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\{m_k : k \geq n\} \subset M_n'$ (αφού $m_k \in M_k' \subset M_n'$ για κάθε $k \geq n$) και άρα $\{x_{m_k} : k \geq n\} \subset \{x_m : m \in M_n'\}$. Συνεπώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{diam}\{x_{m_k} : k \geq n\} \leq \operatorname{diam}\{x_m : m \in M_n\} \leq \frac{1}{n}.$$

Εύκολα τώρα προκύπτει ότι η $(x_m)_{m \in M_\infty}$ είναι μια Cauchy υπακολουθία της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, άτοπο. □

Πρόταση 9.31. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1). Το A είναι ολικά φραγμένο.

(2). Κάθε ακολουθία στο A περιέχει Cauchy υπακολουθία.

Απόδειξη. (1)⇒(2). Έστω ότι το A είναι ολικά φραγμένο. Υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο, ότι υπάρχει $(x_n)_n$ με $x_n \in A$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ώστε κάθε υπακολουθία της $(x_n)_n$ δεν είναι Cauchy. Από το προηγούμενο λήμμα υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και $M \subset \mathbb{N}$ άπειρο ώστε για κάθε $M' \subset M$ άπειρο, $\operatorname{diam}\{x_m : m \in M'\} > \varepsilon$. Επειδή το A είναι ολικά φραγμένο, υπάρχουν $k \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_k \in A$ ώστε $A \subset \cup_{i=1}^k S(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$.

Για κάθε $i = 1, \ldots, k$ θέτουμε $M_i = \{m \in M : x_m \in S(x_i, \frac{\varepsilon}{2})\}$. Τότε $M = M_1 \cup \cdots \cup M_k$ και αφού το M είναι απειροσύνολο, ένα τουλάχιστον από τα $M_1, \ldots, M_k$ είναι απειροσύνολο. Άρα υπάρχει $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$ ώστε $M_{i_0} \subset M$ είναι άπειρο. Αλλά τότε $\{x_m : m \in M_{i_0}\} \subset S(x_{i_0}, \frac{\varepsilon}{2})$ και άρα

$$\operatorname{diam}\{x_m : m \in M_{i_0}\} \leq \operatorname{diam} S(x_{i_0}, \frac{\varepsilon}{2}) \leq \varepsilon,$$

άτοπο. Άρα κάθε ακολουθία στο A περιέχει Cauchy υπακολουθία.

Αντίστροφα, έστω $A \subset X$ με την ιδιότητα κάθε ακολουθία στο A περιέχει Cauchy υπακολουθία. Θα δείξουμε ότι το A είναι ολικά φραγμένο. Πάλι με απαγωγή σε άτοπο, ας υποθέσουμε ότι το A δεν είναι ολικά φραγμένο. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και κάθε επιλογή $x_1, \ldots, x_k$ στοιχείων του A, $A \not\subset \cup_{i=1}^k S(x_i, \varepsilon)$.

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, κατασκευάζουμε επαγωγικά μια ακολουθία $(x_n)_n$ στο A με $\rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon$, για κάθε $n \neq m$, ως εξής:

Έστω $x_1 \in A$. Επειδή $A \not\subset S(x_1, \varepsilon)$, υπάρχει $x_2 \in A$ με $\rho(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. Ομοίως, επειδή $A \not\subset S(x_1, \varepsilon) \cup S(x_2, \varepsilon)$ υπάρχει $x_3 \in A$ ώστε $\rho(x_1, x_3) \geq \varepsilon$ και $\rho(x_2, x_3) \geq \varepsilon$. Γενικά, έστω ότι έχουμε επιλέξει $x_1, \ldots, x_k \in A$ ώστε $\rho(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ για κάθε $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq k$. Τότε $A \not\subset \cup_{i=1}^k S(x_i, \varepsilon)$ και συνεπώς υπάρχει $x_{k+1} \in A$ ώστε $\rho(x_{k+1}, x_i) \geq \varepsilon$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$.

Φανερά η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στο A που δεν περιέχει Cauchy υπακολουθία, άτοπο. Άρα το A είναι ολικά φραγμένο. □

Η επόμενη πρόταση δείχνει την ακριβή σχέση της έννοιας της συμπάγειας και του ολικά φραγμένου μετρικού χώρου.

Πρόταση 9.32. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1). Ο (X, ρ) είναι συμπαγής

(2). Ο (X, ρ) είναι ολικά φραγμένος και πλήρης.

Απόδειξη. (1)⇒(2). Έστω ότι ο (X, ρ) είναι συμπαγής. Καταρχήν από πρόταση 9.11 έπεται ότι ο (X, ρ) είναι πλήρης. Δείχνουμε ότι είναι και ολικά φραγμένος. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $X = \cup_{x \in X} S(x, \varepsilon)$ και άρα υπάρχουν $x_1, \ldots, x_k \in X$ ώστε $X = \cup_{i=1}^k S(x_i, \varepsilon)$. Άρα ο (X, ρ) είναι ολικά φραγμένος.

(2)⇒(1). Αφού ο (X, ρ) είναι ολικά φραγμένος, από την προηγούμενη πρόταση κάθε ακολουθία του περιέχει Cauchy υπακολουθία. Επειδή ο (X, ρ) είναι πλήρης κάθε Cauchy υπακολουθία του X είναι συγκλίνουσα. Άρα κάθε ακολουθία του X περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία και συνεπώς ο X είναι συμπαγής. □

Δείχνουμε τώρα ότι κάθε υποσύνολο ενός ολικά φραγμένου $A \subset X$ είναι και αυτό ολικά φραγμένο καθώς επίσης ότι και η κλειστότητα $\overline{A}$ του A είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο του X.

Πρόταση 9.33. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subset X$ ολικά φραγμένο. Τότε*

(1). Κάθε υποσύνολο του A είναι ολικά φραγμένο.

(2). Η κλειστότητα του A, είναι ολικά φραγμένο.

Απόδειξη. (1). Έστω $B \subset A$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή το A είναι ολικά φραγμένο υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο F του A ώστε $A \subset \cup_{x \in F} S(x, \frac{\varepsilon}{2})$ και άρα $B \subset \cup_{x \in F} S(x, \frac{\varepsilon}{2})$. Θέτουμε

$$F' = \{x \in F : S(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Τότε το F' είναι πεπερασμένο και έστω $F' = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Άρα $B \subset \cup_{i=1}^{k} S(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ με $S(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B \neq \emptyset$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$. Επιλέγουμε $y_i \in S(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B$. Τότε $S(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \subset S(y_i, \varepsilon)$, $i = 1, \ldots, k$ και άρα

$$B \subset \cup_{i=1}^{k} S(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \subset \cup_{i=1}^{k} S(y_i, \varepsilon).$$

Συνεπώς το B είναι ολικά φραγμένο.

(2). Έστω $\overline{A}$ η κλειστότητα του A και $\varepsilon > 0$. Αφού το A είναι ολικά φραγμένο, υπάρχουν $k \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_k \in A$ ώστε $A \subset \cup_{i=1}^{k} S(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$.

Ισχυριζόμαστε ότι $\overline{A} \subset \cup_{i=1}^{k} S(x_i, \varepsilon)$. Αν αυτό δειχτεί, τότε επειδή $x_i \in A \subset \overline{A}$ για όλα τα $i = 1, \ldots, k$ θα έχουμε ότι το $\overline{A}$ είναι ολικά φραγμένο. Πράγματι. Έστω $y \in \overline{A}$. Τότε υπάρχει $x \in A$ ώστε $\rho(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Επειδή $A \subset \cup_{i=1}^{k} S(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$ ώστε $x \in S(x_{i_0}, \frac{\varepsilon}{2})$. Άρα

$$\rho(y, x_{i_0}) \leq \rho(y, x) + \rho(x, x_{i_0}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

δηλαδή, $y \in S(x_{i_0}, \varepsilon) \subset \cup_{i=1}^{k} S(x_i, \varepsilon)$. συνεπώς $\overline{A} \subset \cup_{i=1}^{k} S(x_i, \varepsilon)$. □

Πόρισμα 9.34. *Αν $A \subset X$ είναι ολικά φραγμένο, τότε κάθε $B \subset \overline{A}$ είναι ολικά φραγμένο.*

Απόδειξη. Από το (2), της προηγούμενης πρότασης, έχουμε ότι το $\overline{A}$ είναι ολικά φραγμένο και άρα από το (1), το συμπέρασμα έπεται άμεσα. □

Πόρισμα 9.35. *Κάθε υποσύνολο ενός συμπαγούς $K \subset (X, \rho)$ είναι ολικά φραγμένο.*

Απόδειξη. Κάθε συμπαγές K είναι ολικά φραγμένο και συνεπώς καθε $K' \subset K$ είναι και αυτό ολικά φραγμένο. □

Παραδείγμα. Το σύνολο $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ είναι ολικά φραγμένο και φανερά όχι συμπαγές.

Κλείνουμε την παράγραφο αυτή με την παρατήρηση ότι η έννοια του ολικά φραγμένου μετρικού χώρου δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από ισοδύναμες μετρικες, δηλαδή αν ο (X, ρ) είναι ολικά φραγμένος και η ρ' είναι ισοδύναμη της ρ αυτό δεν σημαίνει ότι και ο (X, ρ') θα είναι ολικά φραγμένος. Ένα απλό παράδειγμα είναι ο $(\mathbb{N}, \rho_\sigma)$ και ο $(\mathbb{N}, \rho)$ όπου $\rho_\sigma(n,m) = |n-m|$ και $\rho(n,m) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$. Ο $(\mathbb{N}, \rho_\sigma)$ δεν είναι ολικά φραγμένος (αφού δεν είναι φραγμένος) ενώ ο $(\mathbb{N}, \rho)$ είναι ολικά φραγμένος:

Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $n_0 = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$. Ισχυριζόμαστε ότι $\mathbb{N} = \cup_{n \le n_0} S_\rho(n, \varepsilon)$. Πράγματι, έστω $n \in \mathbb{N}$. Αν $n < n_0$ τότε $n \in S_\rho(n, \varepsilon)$ ενώ αν $n \ge n_0$ έχουμε ότι

$$\rho(n, n_0) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{n_0}| = \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

και άρα $n \in S_\rho(n_0, \varepsilon)$.

Έτσι, σε αντίθεση με την συμπάγεια και όμοια με την πληρότητα, η έννοια του ολικά φραγμένου μετρικού χώρου δεν διατηρείται κάτω από ισοδύναμες μετρικές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $K \subset X$ συμπαγές και $F \subset X$ κλειστό ώστε $F \cap K = \emptyset$. Δείξτε ότι $\rho(K, F) = \inf\{\rho(x,y) : \ x \in K, \ y \in F\} > 0$. (Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : (X, \rho) \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \rho(x, F)$ και εξετάστε το σύνολο $f(K)$).

2. Δώστε παράδειγμα δυο κλειστών υποσυνόλων F_1, F_2 του $\mathbb{R}$ ώστε $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ και $\rho(F_1, F_2) = 0$.

3. Έστω K συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου. Δείξτε ότι $\operatorname{diam} K < +\infty$ και ότι υπάρχουν $x_0, y_0 \in K$ ώστε $\operatorname{diam} K = \rho(x_0, y_0)$.

4. Αν K_1, K_2 είναι δύο συμπαγή υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X, ρ) και $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ δείξτε ότι υπάρχουν $x_1 \in K_1$ και $x_2 \in K_2$ με $\rho(x_1, x_2) = \rho(K_1, K_2)$.

5. Έστω $\{F_i : \ i \in I\}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων ενός συμπαγούς μετρικού χώρου (X, ρ) με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Θέτουμε $F = \bigcap_{i \in I} F_i$. Αν V είναι ανοικτό υποσύνολο του X και $F \subset V$ δείξτε ότι υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $i_1, \ldots, i_n \in I$ ώστε $\bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k} \subset V$. (Υπόδειξη: Υποθέτοντας, ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα δείξτε ότι η η οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X, $\{F_i : \ i \in I\} \cup \{X \setminus V\}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Καταλήξτε σε άτοπο.)

Κεφάλαιο 10

Ακολουθίες συναρτήσεων

10.1 Κατά σημείο σύγκλιση ακολουθίας πραγματικών συναρτήσεων

Ορισμός 10.1. Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων σε ένα σύνολο X με τιμές στο $\mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***συγκλίνει κατά σημείο*** αν για κάθε $x \in X$ το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ υπάρχει. Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ καλείται το κατά σημείο όριο της ακολουθίας $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Κάθε ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει κατά σημείο καλείται ***κατά σημείο συγκλίνουσα*** ακολουθία συναρτήσεων.

Ορισμός 10.2. Έστω $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ ακολουθία συναρτήσεων Η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θα λέγεται ***κατά σημείο Cauchy*** ακολουθία συναρτήσεων αν για κάθε $x \in X$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ (που εξαρτάται και από το ε και από το x) τέτοιο ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ (δηλαδή αν για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία Cauchy).

Πρόταση 10.3. *Έστω $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ Η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι κατά σημείο συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι κατά σημείο Cauchy.*

Απόδειξη.. Προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy. □

Παραδείγματα

(i) Έστω $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ με $f_n(x) = x^n$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Τότε είναι εύκολο να δειχθεί ότι ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ αν $x \in [0, 1)$ και $f(1) = 1$.

(ii) Έστω $f_n : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{αν } 0 \leq x \leq n \\ n & \text{αν } x > n. \end{cases}$$

Τότε η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

(iii) Έστω $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = (-1)^n x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει κατά σημείο.

Έχουμε δει ότι κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία (Θεώρημα Bolzano-Weierstrass). Ισχύει κάτι ανάλογο για ακολουθίες πραγματικών συναρτήσεων; Συγκεκριμένα αν $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ είναι μια ακολουθία συναρτήσεων τέτοια ώστε για κάθε $x \in X$ η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, τότε υπάρχει κατά σημείο συγκλίνουσα υπακολουθία της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$; Αυτό γενικά αποδεικνύεται ότι δεν είναι σωστό, ισχύει όμως στην περίπτωση που το X είναι αριθμήσιμο. Πράγματι, έχουμε την εξής πρόταση:

Πρόταση 10.4. *Έστω X αριθμήσιμο σύνολο και $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων ώστε για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Τότε η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει μια κατά σημείο συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη.. Έστω καταρχήν ότι το X είναι πεπερασμένο, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Από υπόθεση η $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$ και άρα, από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass, έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Συνεπώς υπάρχει $N_1 \subset \mathbb{N}$ άπειρο ώστε η $(f_n(x_1))_{n\in N_1}$ να είναι συγκλίνουσα ακολουθία στο $\mathbb{R}$ (δείτε και την απόδειξη του Θεωρήματος Bolzano-Weierstrass για τον $\mathbb{R}^k$). Όμοια η $(f_n(x_2))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη οπότε και η υπακολουθία της $(f_n(x_2))_{n\in N_1}$ είναι επίσης φραγμένη. Συνεπώς υπάρχει $N_2 \subset N_1$ άπειρο ώστε η $(f_n(x_2))_{n\in N_2}$ να συγκλίνει. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε άπειρα σύνολα $\mathbb{N} \supset N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_k$ ώστε για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$ η $(f_n(x_i))_{n\in N_i}$ να είναι συγκλίνουσα ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Έτσι για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$ η $(f_n(x_i))_{n\in N_k}$ είναι συγκλίνουσα ως υπακολουθία της $(f_n(x_i))_{n\in N_i}$. Επομένως η $(f_n)_{n\in N_k}$ είναι κατά σημείο συγκλίνουσα υπακολουθία της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Υποθέτουμε τώρα ότι το X είναι άπειρο $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Όπως και παραπάνω κατασκευάζουμε άπειρα υποσύνολα του $\mathbb{N}$, $N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_i \supset N_{i+1} \supset \cdots$ ώστε για κάθε $i = 1, 2, \ldots$ η υπακολουθία $(f_n(x_i))_{n\in N_i}$ να είναι συγκλίνουσα. Επιλέγουμε φυσικούς $n_1 < n_2 < \cdots < n_i < n_{i+1} < \cdots$ ώστε για κάθε $i \in \mathbb{N}$, $n_i \in N_i$ και θέτουμε $M = \{n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots\}$.

Ισχυριζόμαστε ότι η υπακολουθία $(f_n)_{n\in M}$ της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι κατά σημείο συγκλίνουσα. Πράγματι, έστω $x \in X$. Τότε υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ ώστε $x = x_i$. Η ακολουθία $(f_n(x_i))_{n\in M}$, εκτός ίσως από τους $i-1$ πρώτους όρους της, είναι υπακολουθία της $(f_n(x_i))_{n\in N_i}$ αφού από την κατασκευή του M και των $N_1, N_2, \ldots$ έχουμε ότι $\{n_i, n_{i+1}, \ldots\} \subset N_i$. Εφόσον η $(f_n(x_i))_{n\in N_i}$ είναι συγκλίνουσα το ίδιο συμβαίνει και για την $(f_n(x_i))_{n\in M}$.

Επομένως η $(f_n(x))_{n\in M}$ είναι συγκλίνουσα για κάθε $x \in X$, οπότε η $(f_n)_{n\in M}$ είναι κατά σημείο συγκλίνουσα υπακολουθία της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

10.2 Ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθιών πραγματικών συναρτήσεων

Ορισμός 10.5. Έστω $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ ακολουθία συναρτήσεων και $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***συγκλίνει ομοιόμορφα*** στην f αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

για όλα τα $x \in X$.

Κάθε ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ θα καλείται ***ομοιόμορφα συγκλίνουσα ακολουθία*** συναρτήσεων. Είναι σαφές ότι αν η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f τότε συγκλίνει και κατά σημείο στην f. Η διαφορά των δύο εννοιών είναι η εξής: Αν η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στην f τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $x \in X$ υπάρχει φυσικός n_0 που εξαρτάται και από το ε και από το x, ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Αν η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ βρίσκουμε ένα μοναδικό $n_0 \in \mathbb{N}$ που εξαρτάται μόνο από το ε και είναι κατάλληλος για όλα τα x.

Ορισμός 10.6. Έστω $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$. Η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ καλείται ***ομοιόμορφα Cauchy*** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

για όλα τα $x \in X$.

Προσέξτε και εδώ την ίδια διαφορά (σχετικά με την εξάρτηση του n_0 από το ε και το x) με την αντίστοιχη έννοια της κατά σημείο Cauchy ακολουθίας.

Πρόταση 10.7. *Έστω $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ Η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι ομοιόμορφα Cauchy.*

Απόδειξη.. Έστω ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ για όλα τα $x \in X$. Άρα για κάθε $n, m \geq n_0$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

για όλα τα $x \in X$. Επομένως η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy.

Αντιστρόφως, έστω ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy. Τότε είναι και κατά σημείο Cauchy και άρα κατά σημείο συγκλίνουσα, συνεπώς υπάρχει $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ώστε η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να συγκλίνει κατά σημείο στην f δηλαδή $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ για κάθε $x \in X$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$, $|f_n(x) - f_m(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ για όλα τα $x \in X$. Άρα για κάθε n
gen_0

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - \lim_{m\to\infty} f_m(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

για όλα τα $x \in X$. Επομένως η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα. $\square$

Το παρακάτω κριτήριο για την ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων είναι αρκετά χρήσιμο:

Πρόταση 10.8. *Έστω $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ ακολουθία συναρτήσεων που συγκλίνει κατά σημείο στην $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Θέτουμε $M_n = \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|$ για $n = 1, 2 \ldots$ Τότε η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f αν και μόνο αν $M_n \to 0$.*

(Η απόδειξη είναι άμεση από τους ορισμούς.)

Παραδείγματα

(i) Η $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ με $f_n(x) = \dfrac{\sin x}{n}$ είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin x}{n} = 0$ και άρα η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στην $f = 0$. Επειδή

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\frac{\sin x}{n}| = \frac{1}{n}$$

από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

(ii) Η ακολουθία $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \leq n \\ 1 & \text{αν } x > n \end{cases}$$

συγκλίνει κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ (αφού για δεδομένο $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει φυσικός n_0 ώστε $x \leq n_0$ οπότε $f_n(x) = 0$ για κάθε $n \geq n_0$) και άρα η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στην $f = 0$. Όμως $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 1 \not\to 0$ και άρα σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

Μέχρι αυτό το σημείο οι ακολουθίες συναρτήσεων που θεωρούσαμε είχαν πεδίο ορισμού ένα αυθαίρετο μη κενό σύνολο X. Αν το X είναι ένας μετρικός χώρος τότε η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μπορεί να έχει κάποιες επιπλέον ιδιότητες π.χ. να είναι ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. Σχετικά έχουμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 10.9. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ $n=1,2,\ldots$ μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Τότε και η f είναι συνεχής συνάρτηση.*

Απόδειξη.. Έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$. Αφού η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ για όλα τα $x \in X$. Επειδή η f_{n_0} είναι συνεχής στο x_0 υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ με $\rho(x,x_0) < \delta$ να ισχύει $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Άρα για κάθε $x \in X$ με $\rho(x,x_0) < \delta$ έχουμε:

$$|f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0)-f_(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

συνεπώς η f είναι συνεχής στο x_0. Αφού αυτό συμβαίνει για όλα τα $x_0 \in X$ η f είναι συνεχής. $\square$

Το συμπέρασμα της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει για την κατά σημείο σύγκλιση. Π.χ. η ακολουθία $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$ συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση f που είναι ασυνεχής στο $x_0 = 1$. Από την Πρόταση 10.9 έχουμε το εξής πόρισμα:

Πόρισμα 10.10. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ $n=1,2,\ldots$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει κατά σημείο στην $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Αν η f δεν είναι συνεχής τότε η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Για τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων να εξετάσετε αν συγκλίνουν κατά σημείο και αν συγκλίνουν ομοιόμορφα:

(i) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin(n^2 x)$, $n = 1,2,\ldots$

(ii) $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x}$, $n = 1,2,\ldots$

(iii) $f_n : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x}$, $n = 1,2,\ldots$

(iv) $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = (1-x)^n \dfrac{nx}{nx+1}$, $n = 1,2,\ldots$

(v) $f_n : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \dfrac{1}{nx+1}$, $n = 1,2,\ldots$

(vi) $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$, $n = 1,2,\ldots$

(vii) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \dfrac{x^2+nx}{n}$, $n = 1,2,\ldots$

(viii) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \dfrac{1}{n}e^{-\frac{x^4}{n}}$, $n = 1,2,\ldots$

2. Έστω X πεπερασμένο σύνολο και $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ κατά σημείο συγκλίνουσα ακολουθία συναρτήσεων. Δείξτε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι και ομοιόμορφα συγκλίνουσα.

3. Έστω $f, f_n : (X, \rho) \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ ώστε η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στην f και κάθε f_n είναι Lipschitz με σταθερά M (ανεξάρτητο του n). Δείξτε ότι η f είναι συνεχής.

4. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ συνεχείς συναρτήσεις ώστε η ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στο X και $x_0 \in X$ με $x_n \to x_0$ τότε $f_n(x_n) \to f(x_0)$.

5. Έστω $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία πολυωνύμων $p_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Αν η $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ τότε η f είναι πολυώνυμο. (Υπόδειξη: Αφού η $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα είναι ομοιόμορφα Cauchy και άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|p_n(x) - p_m(x)| < 1$ για κάθε $n, m \geq n_0$ και $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρήστε ότι τα μόνα φραγμένα πολυώνυμα στο $\mathbb{R}$ είναι τα σταθερά.)

Κεφάλαιο 11

Οι χώροι $C[a,b]$

11.1 Διανυσματικοί χώροι με νόρμα

Στο Κεφάλαιο 1, ορίσαμε τις έννοιες του διανυσματικού χώρου και της νόρμας σε ένα διανυσματικό χώρο. Στην παράγραφο αυτή θα συνεχίσουμε τη μελέτη μας πάνω στα θέματα αυτά και ειδικότερα πάνω στην έννοια της βάσης ενός διανυσματικού χώρου. Υπενθυμίζουμε ότι αν X είναι ένας διανυσματικός χώρος και $x_1, x_2, \ldots, x_n$ στοιχεία του X, τότε τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ καλούνται ***γραμμικά ανεξάρτητα*** αν η ισότητα $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ όπου $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ισχύει μόνο όταν $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ένα υποσύνολο A του X καλείται ***γραμμικά ανεξάρτητο*** υποσύνολο του X αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του αποτελείται από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

Ένα υποσύνολο B του X καλείται ***(Hamel) βάση*** του X αν

(i) Το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

(ii) Για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in B$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ώστε $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$.

Αποδεικνύεται ότι το $B \subset X$ είναι βάση του X αν και μόνο αν για κάθε $x \in X$ με $x \neq 0$ υπάρχουν μοναδικά $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n$ διαφορετικά ανά δύο στοιχεία του B και μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ώστε $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$. Ακόμη, ένας άλλος χρήσιμος για τα επόμενα χαρακτηρισμός της βάσης ενός διανυσματικού χώρου X είναι ο εξής: Ένα υποσύνολο B του X είναι βάση του X αν και μόνο αν το B είναι ένα μεγιστικό γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του X (δηλαδή αν B' γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του X με $B \subset B'$ τότε $B = B'$).

Ο παραπάνω χαρακτηρισμός της βάσης ενός διανυσματικού χώρου σε συνδυασμό με το Λήμμα του Zorn δίνει το εξής:

Θεώρημα 11.1 (Ύπαρξη βάσης σε διανυσματικούς χώρους)**.** *Κάθε διανυσματικός χώρος X έχει βάση.*

Απόδειξη.. Θέτουμε

$$\mathcal{F} = \{A \subset X : \text{ Το } A \text{ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του } X\}.$$

Στο $\mathcal{F}$ ορίζουμε τη σχέση $\leq$ ως εξής: Για $A, B \in \mathcal{F}$, $A \leq B$ αν και μόνο αν $A \subset B$. Από τον παραπάνω χαρακτηρισμό της βάσης αρκεί να δειχθεί ότι το $(\mathcal{F}, \leq)$ έχει ένα μεγιστικό στοιχείο. Συνεπώς από το Λήμμα του Zorn αρκεί να δείξουμε ότι κάθε αλυσίδα $\mathcal{C}$ του $\mathcal{F}$ έχει άνω φράγμα στο $\mathcal{F}$. Πράγματι, έστω $\mathcal{C} = \{A_i\}_{i \in I}$ μια αλυσίδα στο $\mathcal{F}$. Θέτουμε $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$. Τότε για κάθε $i \in I$, $A_i \subset A$ και άρα, αν $A \in \mathcal{F}$ θα είναι $A_i \leq A$. Απομένει λοιπόν να δειχθεί ότι $A \in \mathcal{F}$. Πράγματι, έστω $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του A με n στοιχεία. Τότε υπάρχουν $i_1, \ldots, i_n \in I$ ώστε $x_k \in A_{i_k}$ για $k = 1, \ldots, n$. Επειδή το $\mathcal{C}$ είναι αλυσίδα και $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{C}$ υπάρχει $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$ ώστε $A_{i_k} \leq A_{i_{k_0}}$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Έτσι αφού $x_k \in A_{i_k} \subset A_{i_{k_0}}$ για $k = 1, \ldots, n$ έχουμε $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset A_{i_{k_0}}$ και επειδή $A_{i_{k_0}} \in \mathcal{F}$ τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του X δηλαδή $A \in \mathcal{F}$. □

Αποδεικνύεται επίσης ότι δυο οποιεσδήποτε βάσεις ενός διανυσματικού χώρου X είναι ισοπληθικές. ***Διάσταση*** του διανυσματικού χώρου X ονομάζεται η πληθικότητα μιας βάσης του και συμβολίζεται με $\dim X$. Επίσης ένας διανυσματικός χώρος X ονομάζεται απειροδιάστατος αν μία (και άρα κάθε) βάση του είναι απειροσύνολο.

Έστω τώρα $(X, \| \ \|)$ ένας διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με μια νόρμα. Όπως ήδη έχουμε επισημάνει στο Κεφάλαιο 1 η νόρμα $\| \ \|$ επάγει μια μετρική $\rho = \rho_{\| \ \|}$ στο χώρο X όπου $\rho(x, y) = \|x - y\|$ για κάθε $x, y \in X$. Η επόμενη πρόταση δίνει κάποιες ιδιότητες των ανοικτών σφαιρών σε ένα διανυσματικό χώρο με νόρμα $(X, \| \ \|)$.

Πρόταση 11.2. *Έστω $(X, \| \ \|)$ διανυσματικός χώρος με νόρμα. Τότε*

(i) (α) Αν $x \in X$ και $\varepsilon > 0$ τότε $S(x, \varepsilon) = x + S(0, \varepsilon)$.

(β) Αν $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$ τότε $S(0, \lambda\varepsilon) = \lambda S(0, \varepsilon)$.

(ii) $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nS(0, \varepsilon)$ για κάθε $\varepsilon > 0$.

Απόδειξη.. (i)(α) Έστω $y \in S(x, \varepsilon)$. Θέτουμε $z = y - x$. Τότε $y = x + z$ και $\rho(z, 0) = \|z - 0\| = \|y - x\| = \rho(x, y) < \varepsilon$. Άρα $z \in S(0, \varepsilon)$ συνεπώς $y \in x + S(0, \varepsilon)$. Επομένως $S(x, \varepsilon) \subset x + S(0, \varepsilon)$. Αντίστροφα, έστω $y \in x + S(0, \varepsilon)$. Τότε $y = x + z$ με $z \in S(0, \varepsilon)$ δηλαδή $\|z\| = \|z - 0\| = \rho(z, 0) < \varepsilon$. Άρα $\rho(y, x) = \|y - x\| = \|z\| < \varepsilon$ οπότε $y \in S(x, \varepsilon)$. Επομένως $x + S(0, \varepsilon) \subset S(x, \varepsilon)$. Από τα προηγούμενα έπεται ότι $S(x, \varepsilon) = x + S(0, \varepsilon)$.

(β) Έστω $y \in S(0, \lambda\varepsilon)$. Θέτουμε $z = \frac{1}{\lambda} y$. Τότε $\rho(z, 0) = \|z - 0\| = \|z\| = \|\frac{1}{\lambda} y\| = \frac{1}{\lambda}\|y\| = \frac{1}{\lambda}\|y - 0\| = \frac{1}{\lambda}\rho(y, 0) < \frac{1}{\lambda}\lambda\varepsilon = \varepsilon$ οπότε $z \in S(0, \varepsilon)$. Επειδή $y = \lambda z$ έχουμε ότι

$y \in \lambda S(0,\varepsilon)$. Αντίστροφα, έστω $y \in \lambda S(0,\varepsilon)$. Τότε υπάρχει $z \in S(0,\varepsilon)$ ώστε $y = \lambda z$. Άρα $\rho(y,0) = \|y-0\| = \|y\| = \|\lambda z\| = \lambda\|z\| = \lambda\|z-0\| = \lambda\rho(z,0) < \lambda\varepsilon$, δηλαδή $y \in S(0,\lambda\varepsilon)$. Επομένως $S(0,\lambda\varepsilon) = \lambda S(0,\varepsilon)$.
(ii) Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\|x\| < n\varepsilon$ (Αρχιμήδεια ιδιότητα). Άρα $\rho(x,0) = \|x-0\| = \|x\| < n\varepsilon$ δηλαδή $x \in S(0,n\varepsilon)$. Άρα από το (i)(β) $x \in S(0,n\varepsilon)$. Επομένως $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nS(0,\varepsilon)$. □

Πρόταση 11.3. *Έστω $(X,\|\ \|)$ διανυσματικός χώρος με νόρμα και Y γραμμικός υπόχωρος του X ώστε υπάρχει $y \in Y$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $S(y,\varepsilon) \subset Y$. Τότε $Y = X$.*

Απόδειξη.. Αφού $S(y,\varepsilon) = y + S(0,\varepsilon)$ έπεται ότι $S(0,\varepsilon) \subset Y$. (Πράγματι, αν $z \in S(0,\varepsilon)$ τότε $y + z \in y + S(0,\varepsilon) = S(y,\varepsilon) \subset Y$ δηλαδή υπάρχει $y' \in Y$ ώστε $y + z = y'$. Άρα $z = y' - y \in Y$ αφού ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X).

Όμως τότε για κάθε $\lambda > 0$, $\lambda S(0,\varepsilon) \subset Y$ (πάλι επειδή ο Y είναι κλειστός ως προς τις πράξεις). Άρα $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nS(0,\varepsilon) \subset Y$. □

Αναφέρουμε εδώ χωρίς απόδειξη και την εξής πρόταση (η απόδειξη θα δοθεί στο μάθημα της Συναρτησιακής Ανάλυσης).

Πρόταση 11.4. *Έστω $(X,\|\ \|)$ διανυσματικός χώρος με νόρμα και Y γραμμικός υπόχωρος του X πεπερασμένης διάστασης. Τότε ο Y με τη μετρική $\rho_{\|\ \|}$ είναι πλήρης μετρικός χώρος και άρα ο $(Y,\|\ \|)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $\dim Y = 1$ τότε το συμπέρασμα της πρότασης είναι άμεσο από το γεγονός ότι ο $(Y,\rho_{\|\ \|})$ και ο $(\mathbb{R},\rho)$, όπου ρ είναι η συνήθης μετρική, είναι ισομετρικοί. Πράγματι, επιλέγοντας $y_0 \in Y$ με $\|y_0\| = 1$ το $\{y_0\}$ είναι βάση του Y και άρα για κάθε $y \in Y$ υπάρχει μοναδικό $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $y = \lambda y_0$. Αν ορίσουμε την απεικόνιση $T : (\mathbb{R},\rho) \longrightarrow (Y,\rho_{\|\ \|})$ με $T(\lambda) = \lambda y_0$ η T είναι ισομετρία επί και άρα επειδή ο $(\mathbb{R},\rho)$ είναι πλήρης, και ο $(Y,\rho_{\|\ \|})$ ως ισομετρικός με αυτόν θα είναι πλήρης (γιατί;).

Ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα $(X,\|\ \|)$ καλείται ***χώρος Banach*** αν ο X με τη μετρική που επάγεται από τη νόρμα είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Πρόταση 11.5. *Αν $(X,\|\ \|)$ είναι απειροδιάστατος χώρος Banach τότε κάθε Hamel βάση του X είναι υπεραριθμήσιμη.*

Απόδειξη.. Έστω B μια Hamel βάση του X και ας υποθέσουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι η B είναι αριθμήσιμη, $B = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ θέτουμε X_n τον γραμμικό χώρο που παράγεται από τα διανύσματα $x_1, \ldots, x_n$. Τότε $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ και από Πρόταση 11.4 έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο X_n είναι κλειστός υπόχωρος του X αφού είναι πεπερασμένης διάστασης ($\dim X_n = n$). Από το θεώρημα Baire έπεται ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathrm{int}(X_{n_0}) \neq \emptyset$. Αρα ο υπόχωρος X_{n_0} περιέχει μια ανοικτή σφαίρα του X, συνεπώς από Πρόταση 11.3, $X = X_{n_0}$ και άρα $\dim X = n_0$, άτοπο διότι ο X είναι απειροδιάστατος. □

Πόρισμα 11.6. *Έστω $(X, \| \|)$ απειροδιάστατος χώρος Banach και Y υπόχωρος του X ώστε ο U να έχει αριθμήσιμη Hamel βάση. Τότε ο Y δεν είναι κλειστός υπόχωρος του X.*

Απόδειξη.. Πράγματι, αν ο Y ήταν κλειστός υπόχωρος του X τότε θα ήταν πλήρης (αφού ο X είναι πλήρης) και άρα ο $(Y, \| \|)$ θα ήταν χώρος Banach. Άρα κάθε βάση του Y θα ήταν υπεραριθμήσιμη, άτοπο. □

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Ο $c_{00}(\mathbb{N})$ με οποιαδήποτε νόρμα δεν είναι χώρος Banach. Πράγματι, ο $c_{00}(\mathbb{N})$ έχει αριθμήσιμη Hamel βάση, την $e_1, e_2, \ldots$. (Δές Κεφάλαιο 1.)

11.2 Ο διανυσματικός χώρος $C[a, b]$ με τη νόρμα $\| \|_\infty$

Όπως έχουμε ήδη δει στο Κεφάλαιο 1, το σύνολο $C[a, b]$ όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων που ορίζονται στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, εφοδιασμένο με την πρόσθεση και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό οριζόμενα κατά σημείο απότελεί ένα διανυσματικό χώρο. Ο $C[a, b]$ εφοδιάζεται με τη νόρμα $\| \|_\infty$ όπου για κάθε $f \in C[a, b]$, $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$ (δείτε το Κεφάλαιο 1 για την απόδειξη ότι η $\| \|$ είναι όντως νόρμα). Έτσι ο $C[a, b]$ είναι μετρικός χώρος με τη μετρική ρ_∞ που επάγει η νόρμα $\| \|_\infty$ (δηλ. $\rho_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty$).

Πρόταση 11.7. *Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον $C[a, b]$ και $f \in C[a, b]$. Τότε*

(i) Η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στην f ως προς τη μετρική ρ_∞ αν και μόνο αν η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f δηλαδή

$$f_n \overset{\rho_\infty}{\to} f \Leftrightarrow \text{ Η } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ συγκλίνει ομοιόμορφα στην } f$$

(ii) Η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $(C[a, b], \| \|_\infty)$ αν και μόνο αν η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy ακολουθία συναρτήσεων.

Η απόδειξη είναι άμεση από τους ορισμούς (δείτε και Κεφάλαιο 7).

Θεώρημα 11.8. *Ο $(C[a, b], \rho_\infty)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος και άρα ο $(C[a, b], \| \|_\infty)$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη.. Στο Κεφάλαιο 7 είδαμε ότι μια ομοιόμορφα Cauchy ακολουθία συνεχών συναρτήσεων ορισμένων σε ένα μετρικό χώρο συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση (Προτάσεις 10.9 και 10.7). Συνεπώς από Πρόταση 11.7 έχουμε ότι κάθε Cauchy ακολουθία στον $(C[a, b], \rho_\infty)$ είναι συγκλίνουσα. Επομένως ο $(C[a, b], \rho_\infty)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος. □

Πρόταση 11.9. *Ο $C[a, b]$ είναι απειροδιάστατος διανυσματικός χώρος και κάθε Hamel βάση του $C[a, b]$ είναι υπεραριθμήσιμη.*

Απόδειξη.. Θεωρούμε το σύνολο συναρτήσεων $A = \{P_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ όπου $P_0 = 1$ (δηλ. $P_0(x) = 1$ για κάθε $x \in [a, b]$) και $P_n(x) = x^n$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ και $x \in [a, b]$.

Προφανώς $A \subset C[a, b]$. Επίσης το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Πράγματι, αν $n_1 < \cdots < n_k$ φυσικοί και $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ώστε $\lambda_1 P_{n_1} + \cdots + \lambda_k P_{n_k} = 0$ δηλαδή $\lambda_1 x^{n_1} + \cdots + \lambda_k x^{n_k} = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$ (αφού το ένα πολυώνυμο βαθμού m μπορεί να έχει το πολύ m ρίζες). Άρα το A είναι ένα άπειρο (αριθμήσιμο) γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $C[a, b]$, συνεπώς ο $C[a, b]$ είναι απειροδιάστατος. Από το Θεώρημα 11.8 ο $(C[a, b], \| \|_\infty)$ είναι χώρος Banach και άρα από Πρόταση 11.5 κάθε Hamel βάση του $C[a, b]$ είναι υπεραριθμήσιμη. □

Ένας γραμμικός υπόχωρος του $C[a, b]$ είναι ο χώρος των πολυωνύμων στο $[a, b]$ που συμβολίζεται με $P[a, b]$. Μερικές ιδιότητες του $P[a, b]$ περιγράφονται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 11.10. *(i) Ο $P[a, b]$ είναι ένας απειροδιάστατος γραμμικός υπόχωρος του $C[a, b]$ με αριθμήσιμη Hamel βάση.*

(ii) Ο $P[a, b]$ δεν είναι κλειστός υπόχωρος του $C[a, b]$.

Απόδειξη.. (i) Είναι εύκολο να δειχθεί (δες και απόδειξη της Πρότασης 11.9) ότι το σύνολο $\{P_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ όπου $P_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \ldots$ και $P_0(x) = 1$ είναι Hamel βάση του $P[a, b]$.
(ii) Έπεται άμεσα από το Πόρισμα 11.6 αφού ο $P[a, b]$ έχει αριθμήσιμη Hamel. □

Στο σημείο αυτό αναφέρουμε χωρίς απόδειξη ένα από τα πλέον εντυπωσιακά θεωρήματα της Πραγματικής Ανάλυσης.

Θεώρημα 11.11 (Weierstrass)**.** *Ο $P[a, b]$ είναι πυκνός υπόχωρος του $(C[a, b], \rho_\infty)$ (και άρα για κάθε συνεχή $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο $C[a, b]$ ώστε $p_n \overset{\rho_\infty}{\rightrightarrows} f$).*

Το Θεώρημα Weierstrass έχει και την εξής ενδιαφέρουσα συνέπεια.

Πρόταση 11.12. *Ο $(C[a, b], \rho_\infty)$ είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.*

Περιγραφή της Απόδειξης:. Ας συμβολίσουμε με $P_{\mathbb{Q}}[a, b]$ το σύνολο όλων των πολυωνύμων του $P[a, b]$ που έχουν ρητούς συντελεστές. Τότε αποδεικνύεται ότι

(i) Το $P_{\mathbb{Q}}[a, b]$ είναι αριθμήσιμο.

(ii) Για κάθε $p \in P[a, b]$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $q \in P_{\mathbb{Q}}[a, b]$ ώστε $\|p - q\|_\infty < \varepsilon$.

Από το Θεώρημα Weierstrass και το (ii) έπεται ότι το σύνολο $P_{\mathbb{Q}}[a, b]$ είναι πυκνό στον $(C[a, b], \rho_\infty)$. Πράγματι, αν $f \in C[a, b]$ και $\varepsilon > 0$ τότε από το Θεώρημα Weierstrass υπάρχει $p \in P[a, b]$ ώστε $\rho_\infty(f, p) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Από το (ii) υπάρχει $q \in P_{\mathbb{Q}}[a, b]$ ώστε $\rho_\infty(p, q) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Άρα από την τριγωνική ανισότητα έπεται ότι $\rho_\infty(f,q) < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Συνεπώς $\overline{P_{\mathbb{Q}}[a,b]} = C[a,b]$ και αφού το $P_{\mathbb{Q}}[a,b]$ είναι αριθμήσιμο έπεται το συμπέρασμα. $\square$

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο δείχνοντας ότι ο $(C[a,b],\rho_\infty)$ είναι μοναδικός από άποψη ισομετρίας για όλα τα $a<b$ και μάλιστα ταυτίζεται με τον $(C[0,1],\rho_\infty)$.

Πρόταση 11.13. *Έστω $a,b\in\mathbb{R}$ με $a<b$. Τότε ο $(C[a,b],\rho_\infty)$ είναι ισομετρικός με τον $(C[0,1],\rho_\infty)$.*

Απόδειξη.. Έστω $\phi:[0,1]\longrightarrow[a,b]$ με $\phi(t)=(1-t)a+tb$ για κάθε $t\in[0,1]$. Η ϕ είναι ομοιομορφισμός του $[0,1]$ με το $[a,b]$. Θέτουμε $T:(C[a,b],\rho_\infty)\longrightarrow(C[0,1],\rho_\infty)$ με $T(f)=f\circ\phi$ για κάθε $f\in C[a,b]$. Τότε η T είναι ισομετρία επί του $(C[0,1],\rho_\infty)$. Πράγματι για κάθε $f,g\in(C[a,b],\rho_\infty)$ έχουμε $\rho_\infty(Tf,Tg)=\|Tf-Tg\|_\infty=\sup\{|f(\phi(t))-g(\phi(t))|: t\in[0,1]\}=\sup\{|f(x)-g(x)|:\ x\in[a,b]\}=\|f-g\|_\infty=\rho_\infty(f,g)$ και επιπλέον η T είναι επί αφού αν $g\in C[0,1]$ τότε η $f=g\circ\phi^{-1}$ ανήκει στον $C[a,b]$ και $T(f)=g\circ\phi^{-1}\circ\phi=g$. $\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η απεικόνιση T στην παραπάνω απόδειξη είναι επιπλέον και γραμμική δηλαδή $T(\lambda f+\mu g)=\lambda T(f)+\mu T(g)$ για κάθε $f,g\in C[a,b]$ και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

11.3 Ισοσυνεχείς οικογένειες συναρτήσεων και το Θεώρημα Arzela.

Ορισμός 11.14. Έστω (X,ρ), (Y,d) μετρικοί χώροι, $\mathcal{F}$ μια οικογένεια συναρτήσεων από τον (X,ρ) στον (Y,d) και $x_0\in X$. Η $\mathcal{F}$ καλείται ***ισοσυνεχής στο*** x_0 αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε $x\in X$ με $\rho(x,x_0)<\delta$ και κάθε $f\in\mathcal{F}$ να ισχύει $d(f(x),f(x_0))<\varepsilon$.

Αν η $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχής σε κάθε $x\in X$ τότε η $\mathcal{F}$ καλείται ***ισοσυνεχής οικογένεια συναρτήσεων στο*** X.

Παρατηρήση. Αν η $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχής στο $x_0\in X$, τότε είναι άμεσο από τον ορισμό ότι κάθε $f\in\mathcal{F}$ είναι συνεχής στο x_0. Αλλά αν η $\mathcal{F}$ είναι οικογένεια συνεχών συναρτήσεων στο x_0 δεν έπεται κατ΄ ανάγκη ότι η $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχής στο x_0, διότι πρέπει το δ να μην εξαρτάται από την συνάρτηση $f\in\mathcal{F}$. (Δείτε και το δεύτερο Παράδειγμα παρακάτω.)

Παραδείγμα. Αν $X=Y=\mathbb{R}$ και ρ η συνήθης μετρική σου $\mathbb{R}$ τότε η οικογένεια $\mathcal{F}$ των σταθερών πραγματικών συναρτήσεων είναι ισοσυνεχής.

Παραδείγμα. Αν

$$\mathcal{F}=\{f_n:[0,2\pi]\to\mathbb{R}: f_n(x)=\sin nx, n=1,2,\dots\}$$

τότε η $\mathcal{F}$ είναι οικογένεια συνεχών συναρτήσεων αλλά δεν είναι ισοσυνεχής σε κανένα σημείο $x\in[0,2\pi]$. Πράγματι, έστω $x_0\in[0,2\pi]$ και $\varepsilon=\frac{1}{2}$. Αν η $\mathcal{F}$ ήταν ισοσυνεχής στο

x_0 θα έπρεπε να υπήρχε $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει ότι $|f_n(x_0) - f_n(x)| < \frac{1}{2}$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{2\pi}{n_0} < \delta$. Έστω $n \geq n_0$. Τότε η f_n έχει περίοδο $\frac{2\pi}{n} < \delta$ και

$$[0, 2\pi] = \cup_{k=1}^{n} \Big[\frac{(k-1)2\pi}{n},\ \frac{k \cdot 2\pi}{n}\Big].$$

Άρα υπάρχει $k \in \{1, \ldots, n\}$ ώστε $x_0 \in [\frac{(k-1)2\pi}{n},\ \frac{k \cdot 2\pi}{n}]$ και επιπλέον υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\frac{(k-1)\cdot 2\pi}{n},\ \frac{k \cdot 2\pi}{n}]$ ώστε $f_n(x_1) = 1$, $f_n(x_2) = -1$. Όμως

$$|x_1 - x_0| < \frac{2\pi}{n} < \delta$$

και όμοια

$$|x_2 - x_0| < \frac{2\pi}{n} < \delta.$$

Άρα θα έπρεπε

$$\begin{aligned} 2 &= |f_n(x_1) - f_n(x_2)| \\ &\leq |f_n(x_1) - f_n(x_0)| + |f_n(x_2) - f_n(x_0)| \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \end{aligned}$$

άτοπο.

Ορισμός 11.15. Έστω (X, ρ), (Y, d) μετρικοί χώροι και $\mathcal{F}$ οικογένεια συναρτήσεων από τον X στον Y. Η $\mathcal{F}$ καλείται ***ομοιόμορφα ισοσυνεχής*** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $\rho(x_1, x_2) < \delta$ και για κάθε $f \in \mathcal{F}$ να ισχύει ότι $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Παρατηρήση. Από τον παραπάνω ορισμό, έχουμε ότι κάθε ομοιόμορφα ισοσυνεχής οικογένεια συναρτήσεων είναι και ισοσυνεχής στο X. Η διαφορά βρίσκεται στο ότι εδώ το δ δεν εξαρτάται από το σημείο x_0 αλλά μόνο από το ε. Έχουμε δηλαδή ένα αντίστοιχο φαινόμενο με αυτό της συνέχειας και της ομοιόμορφης συνέχειας μιας συνάρτησης. Παρατηρείστε επίσης ότι αν η $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχής, τότε κάθε $f \in \mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

Πρόταση 11.16. *Έστω (X, ρ), (Y, d) μετρικοί χώροι και $\mathcal{F}$ ένα πεπερασμένο σύνολο συναρτήσεων από τον X στον Y. Τότε*

1. *Αν η $\mathcal{F}$ αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις, τότε η $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχής.*

2. *Αν η $\mathcal{F}$ αποτελείται από ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις, τότε η $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$. Για το (1), ας υποθέσουμε ότι $x_0 \in Q$ και $\varepsilon > 0$. Τότε για κάθε $k = 1, \ldots, n$ υπάρχει $\delta_k > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ αν $\rho(x, x_0) < \delta_k$ τότε $d(f_k(x), f_k(x_0)) < \varepsilon$. Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_k : k = 1, \ldots, n\}$. Τότε $\delta > 0$ και για κάθε $k = 1, \ldots, n$ και $x \in Q$ με $\rho(x, x_0) < \delta$ θα έχουμε $d(f_k(x), f_k(x_0)) < \varepsilon$. Αφού αυτό συμβαίνει για κάθε $x_0 \in X$ και κάθε $\varepsilon > 0$ η $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχής.

Για το (2), η απόδειξη είναι ανάλογη, και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. □

Πρόταση 11.17. *Έστω (X, ρ), (Y, d) μετρικοί χώροι, και $\mathcal{F}$ ισοσυνεχής οικογένεια συναρτήσεων από τον X στον Y. Αν ο (X, ρ) είναι συμπαγής μετρικός χώρος, τότε η $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχής, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε για κάθε $y \in X$ με $\rho(y, x) < \delta_x$ και για κάθε $f \in \mathcal{F}$ να έχουμε ότι $d(f(y), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Εφόσον

$$X = \cup_{x \in X} S_\rho(x, \delta_x)$$

και X συμπαγής, από το Λήμμα Lebesgue (δείτε το κεφάλαιο για τους συμπαγείς μετρικούς χώρους), έχουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε υποσύνολο A του X με $\operatorname{diam} A < \delta$ να ισχύει ότι $A \subset S_\rho(x, \delta_x)$ για κάποιο $x \in X$. Συνεπώς, για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $\rho(x_1, x_2) < \delta$ υπάρχει $x \in X$ με $x_1, x_2 \in S_\rho(x, \delta_x)$, δηλαδή $\rho(x_1, x) < \delta_x$ και $\rho(x_2, x) < \delta_x$ οπότε και $d(f(x_1), f(x)) < \varepsilon/2$, $d(f(x_2), f(x)) < \varepsilon/2$ για κάθε $f \in \mathcal{F}$. Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $\rho(x_1, x_2) < \delta$ και για κάθε $f \in \mathcal{F}$

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq d(f(x_1), f(x)) + d(f(x_2), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Παρατήρηση. Αντίστοιχο φαινόμενο είχαμε δεί και στις συνεχείς συναρτήσεις $f : (X, \rho) \to (Y, d)$ όπου (X, ρ) συμπαγής. Δηλαδή αν η f είναι συνεχής και ο (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. (Δείτε το Κεφάλαιο των συμπαγών μετρικών χώρων.)

Στα επόμενα θα ασχοληθούμε με ισοσυνεχείς οικογένειες συναρτήσεων από ένα κλειστό φραγμένο διάστημα $[a, b]$ του $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση 11.18. *Έστω $\mathcal{F} \subset C[a, b]$ ισοσυνεχής οικογένεια. Τότε η $\overline{\mathcal{F}}$ στον $(C[a, b], \rho_\infty)$ είναι ισοσυνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in [a, b]$ και $\varepsilon > 0$. Αφού η $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in [a, b]$ με $|x - x_0| < \delta$ και κάθε $f \in \mathcal{F}$,

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/3.$$

Αν $g \in \overline{\mathcal{F}}$ τότε υπάρχει $f \in \mathcal{F}$ ώστε $f \in S_{\rho_\infty}(g, \varepsilon/3)$ δηλαδή

$$\|f - g\|_\infty = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\} < \varepsilon/3.$$

Αλλά τότε για κάθε $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}|g(x) - g(x_0)| &\leq |g(x) - f(x)| + |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - g(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $g \in \overline{\mathcal{F}}$ και για κάθε $x \in [a,b]$ με $|x - x_0| < \delta$ θα έχουμε ότι $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$. Συνεπώς η κλειστότητα $\overline{\mathcal{F}}$ του $\mathcal{F}$ στον $(C[a,b], \rho_\infty)$ είναι ισοσυνεχής οικογένεια συναρτήσεων. □

Πρόταση 11.19. *Αν $K \subset (C[a,b], \rho_\infty)$ είναι συμπαγές, τότε το K είναι ισοσυνεχές.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in [a,b]$ και $\varepsilon > 0$. Τότε

$$K \subset \cup_{f \in K} S_{\rho_\infty}(f, \varepsilon/3)$$

οπότε υπάρχουν $f_1, \ldots, f_n \in K$ ώστε

$$K \subset \cup_{i=1}^{n} S_{\rho_\infty}(f_i, \varepsilon/3).$$

Επειδή το $\{f_1, \ldots, f_n\}$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $C[a,b]$ από την Πρόταση 11.16, το $\{f_1, \ldots, f_n\}$ είναι ισοσυνεχές και συνεπώς υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και κάθε $x \in [a,b]$ με $|x - x_0| < \delta$ να έχουμε $|f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon/3$. Τότε για κάθε $f \in K$ και κάθε $x \in [a,b]$ με $\rho(x, x_0) < \delta$ ισχύει ότι $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ και άρα το K είναι ισοσυνεχές. Πράγματι. Έστω $f \in K$. Τότε υπάρχει $i \in \{1, \ldots, n\}$ ώστε $f \in S_{\rho_\infty}(f_i, \varepsilon/3)$. Συνεπώς, για κάθε $x \in [a,b]$ με $|x - x_0|, < \delta$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(x_0)| + |f_i(x_0) - f(x_0)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Λήμμα 11.20. *Αν $(f_n)_n$ ισοσυνεχής ακολουθία στον $(C[a,b], \rho_\infty)$ ώστε για κάθε ρητό $q \in \mathbb{Q} \cap [a,b]$ η ακολουθία $(f_n(q))_n$ είναι βασική στον $\mathbb{R}$, τότε η $(f_n)_n$ είναι βασική ακολουθία στον $(C[a,b], \rho_\infty)$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Πρέπει να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$.

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup\{|f_n(y) - f_m(y)| : y \in [a,b]\} < \varepsilon \tag{1}$$

Αφού η $(f_n)_n$ είναι ισοσυνεχής ακολουθία, για κάθε $x \in [a,b]$ υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε για κάθε $y \in [a,b]$ με $|y - x| < \delta_x$ και για κάθε $n = 1, 2, \ldots,$

$$|f_n(y) - f_n(x)| < \varepsilon/6. \tag{2}$$

Έχουμε ότι $[a,b] \subset \cup_{x\in[a,b]}(x-\delta_x, x+\delta_x)$ και επειδή το $[a,b]$ είναι συμπαγές, υπάρχουν $N \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_N \in [a,b]$ ώστε

$$[a,b] \subset \cup_{i=1}^{N}(x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}). \tag{3}$$

Από την πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$, υπάρχουν ρητοί $q_1, \ldots, q_N \in \mathbb{Q}$ ώστε για κάθε $i = 1, \ldots, N$ $q_i \in (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x-i})$. Επειδή για κάθε $i = 1, \ldots, N$ η $(f_n(q_i))_n$ είναι Cauchy στον $\mathbb{R}$ υπάρχει $n_i \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_i$,

$$|f_n(q_i) - f_m(q_i)| < \varepsilon/6. \tag{4}$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_i : i = 1, \ldots, N\}$. Ισχυριζόμαστε ότι γι΄ αυτό το n_0 ικανοποιείται η (1). Πράγματι. Έστω $n, m \geq n_0$ και $y \in [a,b]$. Τότε υπάρχει $i \in \{1, \ldots, N\}$ ώστε $|y - x_i| < \delta_{x_i}$ (από την (3).) Τότε

$$\begin{aligned}
|f_n(y) - f_m(y)| \leq & |f_n(y) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f_n(q_i)| \\
& + |f_n(q_i) - f_m(q_i)| + |f_m(q_i) - f_m(x_i)| \\
& + |f_m(x_i) - f_m(y)| \\
< & \varepsilon/6 + \varepsilon/6 + \varepsilon/6 + \varepsilon/6 + \varepsilon/6 \\
< & 5\varepsilon/6
\end{aligned}$$

(από (2), (4) και τον ορισμό του n_0.)

Άρα για κάθε $n, m \geq n_0$,

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup\{|f_n(y) - f_m(y)| : y \in [a,b]\} \leq 5\varepsilon/6 < \varepsilon.$$

□

Θεώρημα 11.21 (Arzela)**.** *Έστω $K \subset (C[a,b], \rho_\infty)$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το K είναι συμπαγές.*
2. *Το K είναι κλειστό, φραγμένο και ισοσυνεχές.*

Απόδειξη. (1)⇒(2). Αφού το K είναι συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου, είναι κλειστό και φραγμένο. (δες Κεφάλαιο για συμπαγείς μετρικούς χώρους.) Από την Πρόταση 11.19 είναι και ισοσυνεχές.

(2)⇒(1). Αρκεί να δειχθεί ότι κάθε ακολουθία στο K έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο K. Πράγματι, έστω ακολουθία $(f_n)_n$ στο K. Επειδή το K είναι φραγμένο υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|f_n\|_\infty \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $D = \mathbb{Q} \cap [a,b]$. Τότε το D είναι αριθμήσιμο και από την Πρόταση 10.4 η $(f_n|D)_n$ έχει κατά σημείο συγκλίνουσα υπακολουθία. Έστω $(f_{k_n})_n$ η υπακολουθία της $(f_n)_n$ ώστε η $(f_{k_n}|D)_n$ είναι κατά σημείο συγκλίνουσα. Αλλά τότε η $(f_{k_n}(q))_n$ είναι βασική για κάθε $q \in \mathbb{Q} \cap [a,b]$. Επειδή η (f_{k_n}) είναι ισοσυνεχής (ως υποσύνολο ισοσυνεχούς) από το Λήμμα 11.20 έχουμε ότι η (f_{k_n}) είναι βασική στον $(C[a,b], \rho_\infty)$. Από την πληρότητα του $(C[a,b], \rho_\infty)$ έχουμε ότι υπάρχει $f \in C[a,b]$ ώστε $f_{k_n} \overset{\rho_\infty}{\rightrightarrows} f$. Τέλος, επειδή το K είναι κλειστό έχουμε ότι $f \in K$. □

Παρατηρήση. 1. Ο χαρακτηρισμός της συμπάγειας μέσω ισοσυνεχών συναρτήσεων δεν μπορεί να επεκταθεί στην περίπτωση του γενικού μετρικού χώρου και στηρίζεται στο γεγονός ότι τα στοιχεία του μετρικού χώρου $C[a,b]$ είναι συνεχείς συναρτήσεις.

2. Το Θεώρημα Arzela ισχύει γενικότερα στον $(C(X), \rho_\infty)$ όπου (X, ρ) είναι συμπαγής μετρικός χώρος και

$$C(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ συνεχής}\}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δείξτε ότι το σύνολο $\mathrm{Lip}_M = \{f : (X,\rho) \to (Y,d) : \text{ Η } f \text{ είναι } M - \mathrm{Lipschitz}\}$ είναι ισοσυνεχές, για κάθε $M > 0$.

2. Δείξτε ότι το σύνολο

$$\mathcal{F} = \{F \in C[a,b] : \text{υπάρχει } f \in C[a,b] \text{ με } \|f\|_\infty \leq 1$$
$$\text{ώστε } F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ για κάθε } x \in (a,b]\}$$

είναι ισοσυνεχές.

3. Έστω $f_n, f \in C[a,b]$, $n = 1, 2, \dots$ ώστε $f_n \overset{\rho_\infty}{\rightrightarrows} f$. Δείξτε ότι τα σύνολα $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{f\}$, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ισοσυνεχή.

4. Έστω $(X, \|\ \|)$ διανυσματικός χώρος με νόρμα, Y γραμμικός υπόχωρος του X. Αν $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι

$$\rho_{\|\ \|}(\lambda x, Y) = |\lambda| \rho_{\|\ \|}(x, Y).$$

Κεφάλαιο 12

Γινόμενα μετρικών χώρων

Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_k$ μια πεπερασμένη ακολουθία μη κενών συνόλων. Το καρτεσιανό γινόμενο $\prod\limits_{i=1}^{k} A_i$ ορίζεται με ανάλογο τρόπο με το $\mathbb{R}^k$. Δηλαδή

$$\prod_{i=1}^{k} A_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) :\ a_i \in A_i,\ i = 1, 2,\ \ldots, k\ \}$$

Τα καρτεσιανά γινόμενα συνόλων είναι ένα από τα βασικά εργαλεία δημιουργίας νέων συνόλων. Με ανάλογο τρόπο ορίζεται το άπειρο γινόμενο συνόλων. Έτσι αν $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία μη κενών συνόλων τότε

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} :\ a_i \in A_i,\ i = 1, 2,\ \ldots\}$$

δηλαδή τα στοιχεία του γινομένου $\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ είναι οι ακολουθίες $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ που ικανοποιούν τον περιορισμό ότι $a_i \in A_i$. Ο ορισμός του απείρου γινομένου επεκτείνεται σε γενικότερες οικογένειες $(A_i)_{i\in I}$ και έτσι

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} :\ a_i \in A_i\ \ \forall i \in I\ \}.$$

Στην περίπτωση που $A_i = A$ για κάθε $i \in I$ το γινόμενο $\prod\limits_{i\in I} A_i$ συμβολίζεται με A^I. Έτσι για παράδειγμα $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ είναι το σύνολο όλων των ακολουθιών πραγματικών αριθμών.

Ο στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να μελετηθούν μετρικές που ορίζονται σε πεπερασμένα ή άπειρα αριθμήσιμα καρτεσιανά γινόμενα μετρικών χώρων.

12.1 Πεπερασμένα γινόμενα μετρικών χώρων

Ορισμός 12.1. Έστω $(X_i, \rho_i)_{i=1}^k$ μια πεπερασμένη ακολουθία μετρικών χώρων. Μια μετρική ρ ορισμένη στο καρτεσιανό γινόμενο $X = \prod_{i=1}^k X_i$ λέγεται ***μετρική γινόμενο*** αν για κάθε ακολουθία $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X, $\vec{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k)$ και κάθε $\vec{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in X$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) $\vec{x}_n \xrightarrow{\rho} \vec{x}$

(β) $x_n^i \xrightarrow{\rho_i} x^i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$.

Δηλαδή η σύγκλιση της $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\vec{x}$ προσδιορίζει αλλά και προσδιορίζεται από την κατά συντεταγμένη σύγκλιση της.

Παρατηρήσεις. (1). Όπως έχουμε δει στον $\mathbb{R}^k = \prod_{i=1}^k \mathbb{R}_i$ με $\mathbb{R}_i = \mathbb{R}$ με την ευκλείδεια μετρική ικανοποιείται ο προηγούμενος ορισμός άρα η ευκλείδεια μετρική είναι μια μετρική γινόμενο.

(2). Επειδή η σύγκλιση ακολουθιών παραμένει αναλλοίωτη σε ισοδύναμες μετρικές έπεται ότι αν η ρ είναι μετρική γινόμενο στον $X = \prod_{i=1}^k X_i$ και η ρ' είναι μετρική στον X ισοδύναμη με τη ρ τότε και η ρ' είναι μετρική γινόμενο. Με την ίδια λογική αν η ρ είναι μετρική γινόμενο για τους $(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2), \ldots, (X_k, \rho_k)$ θα είναι επίσης μετρική γινόμενο για τους $(X_1, \rho_1'), (X_2, \rho_2'), \ldots, (X_k, \rho_k')$ όπου ρ_i' είναι μετρική στον X_i ισοδύναμη με τη ρ_i για $i = 1, 2, \ldots, k$.

Αν $(A_i)_{i\in I}$ είναι οικογένεια μη κενών συνόλων και $A = \prod_{i\in I} A_i$ το καρτεσιανό τους γινόμενο τότε για κάθε $i_0 \in I$ ορίζεται η προβολή στην i_0 συντεταγμένη που είναι η συνάρτηση

$$\pi_{i_0} : \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow A_{i_0}$$

με $\pi_{i_0}((a_i)_{i\in I}) = a_{i_0}$. Δηλαδή η π_{i_0} επιλέγει από ένα στοιχείο του $\prod_{i\in I} A_i$ την i_0 συντεταγμένη του.

Πρόταση 12.2. *Έστω $(X_i, \rho_i)_{i=1}^k$ οικογένεια μετρικών χώρων, $X = \prod_{i=1}^k X_i$ και ρ μια μετρική γινόμενο στον X. Τότε*

(1) Η $\pi_i : X \longrightarrow X_i$ είναι συνεχής συνάρτηση για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$.

(2) Αν (Y, d) είναι μετρικός χώρος και $f : Y \longrightarrow X$ συνάρτηση, τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) Η f είναι συνεχής.

(β) Η $\pi_i \circ f : Y \longrightarrow X_i$ είναι συνεχής για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$.

Απόδειξη.. (1) Έστω $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X και $\vec{x}\in X$ ώστε $\vec{x}_n \xrightarrow{\rho} \vec{x}$. Από τον ορισμό της μετρικής γινόμενο έπεται ότι $x_n^i \longrightarrow x^i$ για $i=1,2,\dots,k$ όπου x_n^i, x^i είναι η i συντεταγμένη των $\vec{x}_n$ και $\vec{x}$ αντίστοιχα. Αλλά $\pi_i(\vec{x}_n)=x_n^i$ και $\pi_i(\vec{x})=x^i$ και έτσι $\pi_i(\vec{x}_n) \xrightarrow{\rho_i} \pi_i(\vec{x})$, άρα από την αρχή της μεταφοράς έπεται ότι η π_i είναι συνεχής για κάθε $i=1,2,\dots,k$.

(2) (α)$\Rightarrow$(β) Είναι άμεσο από το (1) και το γεγονός ότι η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής.
(β)$\Rightarrow$(α) Έστω $f:(Y,d)\longrightarrow(X,\rho)$ ώστε η $\pi_i\circ f:Y\longrightarrow X_i$ να είναι συνεχής για κάθε $i=1,2,\dots,k$. Έστω $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον Y και $y\in Y$ ώστε $y_n \xrightarrow{d} y$. Θα δείξουμε ότι $f(y_n)\xrightarrow{\rho} f(y)$ και από την αρχή της μεταφοράς έπεται το ζητούμενο. Πράγματι, αν $f(y_n)(i)$ συμβολίζει την i συντεταγμένη του $f(y_n)$ και $f(y)(i)$ την i συντεταγμένη του $f(y)$ τότε $f(y_n)(i)=\pi_i\circ f(y_n)$ και $f(y)(i)=\pi_i\circ f(y)$. Άρα, αφού από τη συνέχεια της $\pi_i\circ f:Y\longrightarrow X_i$ για $i=1,2,\dots,k$ έπεται ότι $\pi_i\circ f(y_n)\xrightarrow{\rho_i}\pi_i\circ f(y)$, θα έχουμε $f(y_n)(i)\xrightarrow{\rho_i} f(y)(i)$ για $i=1,2,\dots,k$. Από τον ορισμό της μετρικής γινόμενο έπεται ότι $f(y_n)\xrightarrow{\rho} f(y)$, άρα η f είναι συνεχής. □

Πρόταση 12.3 (Ύπαρξη μετρικής γινόμενο)**.** *Έστω $(X_i,\rho_i)_{i=1}^k$ οικογένεια μετρικών χώρων. Για $\vec{x},\vec{y}\in X=\prod_{i=1}^k X_i$ ορίζουμε*

$$\rho^1(\vec{x},\vec{y})=\sum_{i=1}^k \rho_i(\vec{x}(i),\vec{y}(i)).$$

Τότε η ρ^1 είναι μια μετρική γινόμενο.

Απόδειξη.. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η ρ^1 είναι μετρική και ότι ικανοποιεί τις ιδιότητες της μετρικής γινόμενο. □

Παρατηρήσεις. (1). Οποιαδήποτε άλλη μετρική γινόμενο στον X θα είναι ισοδύναμη με τη ρ^1. Άλλες (ισοδύναμες) μετρικές γινόμενο είναι η ρ^∞ και ρ^p, $1<p<\infty$ όπου

$$\rho^\infty(\vec{x},\vec{y})=\max_{1\le i\le k}\rho_i(\vec{x}(i),\vec{y}(i))$$

και

$$\rho^p(\vec{x},\vec{y})=\left(\sum_{i=1}^k \rho_i(\vec{x}(i),\vec{y}(i))^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(2). Είναι εύκολο να δειχθεί ότι για $\vec{x}\in X$, $\varepsilon>0$ η ανοικτή σφαίρα $S_{\rho^\infty}(\vec{x},\varepsilon)$ περιγράφεται από την ισότητα

$$S_{\rho^\infty}(\vec{x},\varepsilon)=\prod_{i=1}^k S_{\rho_i}(\vec{x}(i),\varepsilon).$$

Αυτή η ιδιότητα συνεπάγεται ότι για κάθε $i=1,2,\dots,k$ η π_i είναι ανοικτή απεικόνιση. (Μια απεικόνιση $f:(X,\rho)\longrightarrow(Y,d)$ λέγεται ανοικτή αν για κάθε $V\subset X$ ανοικτό το $f[V]$ είναι ανοικτό στον Y.) Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ μετρικών χώρων δεν είναι κατ΄ ανάγκη ανοικτές.

(3). Μια άλλη συνέπεια της παραπάνω περιγραφής της $S_{\rho^\infty}(\vec{x},\varepsilon)$ είναι ότι τα ανοικτά σύνολα της μορφής $\prod_{i=1}^{k} V_i$ με $V_i \subset X_i$ ανοικτό ορίζουν μια βάση ανοικτών περιοχών για την τοπολογία της οποιασδήποτε μερικής γινόμενο.

Θεώρημα 12.4. *Έστω $(X_i,\rho_i)_{i=1}^k$ οικογένεια συμπαγών μετρικών χώρων και ρ μια μετρική γινόμενο στον $X=\prod_{i=1}^{k} X_i$. Τότε ο (X,ρ) είναι επίσης συμπαγής.*

Απόδειξη.. Η απόδειξη θα γίνει με χρήση του θεμελιώδη χαρακτηρισμού μετρικών χώρων (Θεώρημα 9.19). Θα δείξουμε δηλαδή ότι κάθε ακολουθία $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Έστω $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X, $\vec{x}_n=(x_n(1),\ldots,x_n(k))$. Τότε υπάρχει $M_1\subset\mathbb{N}$ άπειρο και $x(1)\in X_1$ ώστε $(x_n(1))_{n\in M_1}\xrightarrow{\rho_1} x(1)$. Με πεπερασμένη επαγωγή επίλέγουμε $M_1\supset M_2\supset\cdots\supset M_k$ άπειρα υποσύνολα του $\mathbb{N}$ και $x(i)\in X_i$, $i=1,2,\ldots,k$ ώστε $(x_n(i))_{n\in M_i}\xrightarrow{\rho_i} x(i)$. Παρατηρούμε ότι $(x_n(i))_{n\in M_k}\xrightarrow{\rho_i} x(i)$ για $i=1,2,\ldots,k$. Θέτουμε $\vec{x}=(x(1),x(2),\ldots,x(k))$ και από τον ορισμό της μετρικής γινόμενο προκύπτει ότι $(\vec{x}_n)_{n\in M_k}\xrightarrow{\rho}\vec{x}$. □

12.2 Άπειρα αριθμήσιμα γινόμενα μετρικών χώρων

Αν $(A_i)_{i\in I}$ είναι οικογένεια μη κενών συνόλων και $x\in\prod_{i\in I} A_i$, $x=(a_i)_{i\in I}$ θα συμβολίζουμε με $x(i)$ το a_i δηλαδή την i συντεταγμένη του x.

Ορισμός 12.5. Έστω $(X_i,\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μετρικών χώρων. Μια μετρική ρ στον $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ θα λέγεται μετρική γινόμενο (για την ακολουθία $(X_i,\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$) αν για κάθε ακολουθία $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X και $\vec{x}\in X$ τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) $\vec{x}_n\xrightarrow{\rho}\vec{x}$

(β) $\vec{x}_n(i)\xrightarrow{\rho_i}\vec{x}(i)$ για κάθε $i=1,2,\ldots$.

Παρατηρήστε ότι ο ορισμός αυτός αποτελεί τη φυσιολογική γενίκευση του αντίστοιχου ορισμού (Ορισμός 12.1) για πεπερασμένα γινόμενα μετρικών χώρων.

Πρόταση 12.6. *Αν $(X_i,\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία μετρικών χώρων, d_i μετρική στον X_i ισοδύναμη της ρ_i για κάθε $i\in\mathbb{N}$ και ρ μετρική γινόμενο για την ακολουθία $(X_i,d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ τότε η ρ είναι μετρική γινόμενο και για την ακολουθία $(X_i,\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη.. Είναι άμεσο από τον ορισμό και το γεγονός ότι οι ισοδύναμες μετρικές σε ένα μετρικό χώρο διατηρούν τη σύγκλιση ακολουθιών. □

Θεώρημα 12.7. *Για κάθε ακολουθία $(X_i,\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ μετρικών χώρων υπάρχει μετρική γινόμενο στον $X=\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i$.*

Απόδειξη.. Για κάθε $i\in\mathbb{N}$ επιλέγουμε στον X_i μια μετρική d_i ισοδύναμη της ρ_i ώστε $d_i(x,y)\le 1$ για κάθε $x,y\in X_i$ (π.χ. $d_i(x,y)=\min\{\rho_i(x,y),1\},\ \forall x,y\in X_i$ (βλ. Λήμμα 6.36 και Θεώρημα 6.37). Ορίζουμε $\rho: X\times X\longrightarrow\mathbb{R}$ με

$$\rho(\vec{x},\vec{y})=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}d_i(\vec{x}(i),\vec{y}(i)).$$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η ρ είναι μετρική στον X (Άσκηση). Δείχνουμε ότι η ρ είναι μετρική γινόμενο για την ακολουθία ακολουθία $(X_i,d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ οπότε, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, θα είναι μετρική γινόμενο και για την ακολουθία $(X_i,\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Έστω $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X, $\vec{x}\in X$ και θα δείξουμε την ισοδυναμία των (α) και (β) στον ορισμό 12.5. Δείχνουμε πρώτα ότι (α)⇒(β) δηλαδή υποθέτουμε ότι $\vec{x}_n\xrightarrow{\rho}\vec{x}$ και θα δείξουμε ότι $\vec{x}_n(i)\xrightarrow{d_i}\vec{x}(i)$ για κάθε $i=1,2,\ldots$. Έστω $i\in\mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι $d_i(\vec{x}_n(i),\vec{y}_n(i))\le 2^i\rho(\vec{x}_n,\vec{y}_n)$ για κάθε n και αφού $\rho(\vec{x}_n,\vec{x})\longrightarrow 0$ έπεται ότι $d_i(\vec{x}_n(i),\vec{x}(i))\longrightarrow 0$ συνεπώς $\vec{x}_n(i)\xrightarrow{d_i}\vec{x}(i)$.

Αντιστρόφως, για να δείξουμε ότι (β)⇒(α) υποθέτουμε ότι $\vec{x}_n(i)\xrightarrow{d_i}\vec{x}(i)$ για κάθε $i=1,2,\ldots$ και θα αποδείξουμε ότι $\vec{x}_n\xrightarrow{\rho}\vec{x}$. Έστω $\varepsilon>0$. Επιλέγουμε $k\in\mathbb{N}$ ώστε $\dfrac{1}{2^k}<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Αφού $d_i(\vec{x}_n(i),\vec{x}(i))\longrightarrow 0$ για $i=1,2,\ldots,k$ μπορούμε να επιλέξουμε $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $d_i(\vec{x}_n(i),\vec{x}(i))<\dfrac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $n\ge n_0$ και κάθε $i=1,2,\ldots,k$. Έτσι για κάθε $n\ge n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\rho(\vec{x}_n,\vec{x}) &= \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^i}d_i((\vec{x}_n(i),\vec{x}(i))+\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}d_i((\vec{x}_n(i),\vec{x}(i))\\
&\le \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^i}\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2^k}<\varepsilon.
\end{aligned}$$

Επομένως $\vec{x}_n\xrightarrow{\rho}\vec{x}$. □

Παρατηρήσεις. (1). Από το προηγούμενο θεώρημα για $(X_i,\rho_i)=(\mathbb{R},\rho)$ για κάθε $i\in\mathbb{N}$ όπου ρ είναι η συνήθης μετρική στο $\mathbb{R}$ εξασφαλίζεται η ύπαρξη μετρικής γινομένου στον $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(2). Έστω $(X_i,\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μετρικών χώρων και ρ μια μετρική γινόμενο στον $X=\prod\limits_{i\in\mathbb{N}}X_i$. Θεωρούμε για κάθε $i\in\mathbb{N}$ ένα μη κενό υποσύνολο A_i του X_i και $d_i=\rho_{i|A_i\times A_i}$ (δηλαδή d_i είναι η σχετική μετρική που επάγεται στο A_i από τη ρ_i). Θέτοντας $A=\prod\limits_{i\in\mathbb{N}}A_i$ η

$d = \rho_{|A\times A}$ (δηλαδή η σχετική μετρική που επάγεται στο A από τη ρ) είναι μετρική γινόμενο για την ακολουθία μετρικών χώρων $(A_i, d_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

(3). Συνέπεια των (1),(2) είναι ότι ο περιορισμός μιας μετρικής γινόμενο του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ στο $[0,1]^{\mathbb{N}}$ είναι μετρική γινόμενο και ο περιορισμός μιας μετρικής γινόμενο του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ στο $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ είναι επίσης μετρική γινόμενο.

Η επόμενη πρόταση είναι η αντίστοιχη της πρότασης 12.2 για άπειρα γινόμενα μετρικών χώρων.

Πρόταση 12.8. *Έστω $(X_i, \rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μετρικών χώρων, $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ και ρ μια μετρική γινόμενο στον X. Τότε*

(1) Η $\pi_i : X \longrightarrow X_i$ είναι συνεχής συνάρτηση για κάθε $i = 1, 2, \ldots$.

(2) Αν (Y, d) είναι μετρικός χώρος και $f : Y \longrightarrow X$ συνάρτηση, τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) Η f είναι συνεχής.

(β) Η $\pi_i \circ f : Y \longrightarrow X_i$ είναι συνεχής για κάθε $i = 1, 2, \ldots$.

Απόδειξη.. Η απόδειξη είναι ανάλογη της απόδειξης της πρότασης 12.2 γι' αυτό και παραλείπεται. □

Πρόταση 12.9. *Αν $(X_i, \rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία συμπαγών μετρικών χώρων και ρ μετρική γινόμενο στον $X = \prod_{i=1}^{k} X_i$ τότε και ο (X, ρ) είναι συμπαγής μετρικός χώρος.*

Απόδειξη.. Αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε ακολουθία στον (X, ρ) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (Θεώρημα 9.19). Έστω $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X. Η $(\vec{x}_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στο συμπαγή μετρικό χώρο (X_1, ρ_1) και άρα μπορούμε να επιλέξουμε M_1 άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ και $x(1) \in X_1$ ώστε $(\vec{x}_n(1))_{n\in M_1} \xrightarrow{\rho_1} x(1)$. Λόγω της συμπάγειας του μετρικού χώρου (X_2, ρ_2) η ακολουθία $(\vec{x}_n(2))_{n\in M_1}$ του X_2 θα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία και άρα υπάρχει M_2 άπειρο υποσύνολο του M_1 και $x(2) \in X_2$ ώστε $(\vec{x}_n(2))_{n\in M_2} \xrightarrow{\rho_2} x(2)$. Επαγωγικά κατασκευάζουμε $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \cdots \supset M_i \supset M_{i+1} \supset \cdots$ και $x(i) \in X_i$, $i = 1, 2, \ldots$ ώστε $(\vec{x}_n(i))_{n\in M_i} \xrightarrow{\rho_i} x(i)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Θεωρούμε M ένα διαγώνιο σύνολο της φθίνουσας ακολουθίας $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ δηλαδή $M = \{m_1 < m_2 < m_3 < \cdots\}$ με $m_i \in M_i$ για $i = 1, 2, \ldots$. Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(\vec{x}_n(i))_{n\in M}$, εξαιρώντας τους πρώτους $i-1$ όρους της είναι υπακολουθία της $(\vec{x}_n(i))_{n\in M_i}$ και άρα $(\vec{x}_n(i))_{n\in M} \xrightarrow{\rho_i} x(i)$. Έτσι, θεωρώντας το $\vec{x} = (x(i))_{i\in\mathbb{N}} \in X$, και την υπακολουθία $(\vec{x}_n)_{n\in M}$ της $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχουμε $(\vec{x}_n)_{n\in M} \xrightarrow{\rho} \vec{x}$.

Επομένως ο (X, ρ) είναι συμπαγής. □

Πρόταση 12.10. *Έστω (X, ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $D = \{x_i : \ i \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X. Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_i(x) = \rho(x, x_i)$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα για κάθε ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X.*

(1) $y_n \xrightarrow{\rho} y$

(2) $f_i(y_n) \longrightarrow f_i(y)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots$.

Απόδειξη.. (1)⇒(2) Είναι άμεσο από το γεγονός ότι κάθε f_i, $i = 1, 2, \ldots$ είναι συνεχής (πρόταση 5.14) και την αρχή της μεταφοράς.

(2)⇒(1) Υποθέτουμε ότι $f_i(y_n) \longrightarrow f_i(y)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots$ και θα δείξουμε ότι $y_n \xrightarrow{\rho} y$. Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον το D είναι πυκνό υποσύνολο του X μπορούμε να επιλέξουμε $i_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(y, x_{i_0}) < \frac{\varepsilon}{3}$ δηλαδή $f_{i_0}(y) < \frac{\varepsilon}{3}$. Αφού $f_{i_0}(y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_{i_0}(y)$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_{i_0}(y_n) - f_{i_0}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ για κάθε $n \geq n_0$. Έτσι για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \rho(y_n, y) &\leq \rho(y_n, x_{i_0}) + \rho(x_{i_0}, y) < f_{i_0}(y_n) + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq f_{i_0}(y) + |f_{i_0}(y_n) - f_{i_0}(y)| + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Επομένως $y_n \xrightarrow{\rho} y$. □

Ορισμός 12.11. Δυο μετρικοί χώροι (X, ρ), (Y, d) λέγονται ***ομοιομορφικοί*** αν υπάρχει $f : (X, \rho) \longrightarrow (Y, d)$ 1–1, επί και αμφισυνεχής (δηλαδή η f και η f^{-1} είναι συνεχής).

Αν δυο μετρικοί χώροι είναι ομοιομορφικοί τότε έχουν ακριβώς την ίδια δομή. Η σχέση ομοιομορφισμού μεταξύ μετρικών χώρων είναι σχέση ισοδυναμίας στην κλάση όλων των μετρικών χώρων και ταξινομεί τους μετρικούς χώρους.

Αν (X, ρ) είναι μετρικός ώρος και d μετρική στον X ισοδύναμη της ρ τότε οι (X, ρ) και (X, d) είναι ομοιομορφικοί (μέσω της ταυτοτικής απεικόνισης).

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι όλοι οι διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι μπορούν να θεωρηθούν ως υπόχωροι του $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Θεώρημα 12.12. *Αν ο (X, ρ) είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος τότε είναι ομοιομορφικός με έναν υπόχωρο του $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ (με τη μετρική γινόμενο).*

Απόδειξη.. Μπορούμε να θεωρήσουμε, αντικαθιστώντας τη μετρική ρ με κατάλληλη ισοδύναμη μετρική της, ότι $\rho(x, y) \leq 1$ για κάθε $x, y \in X$. Έστω $D = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X και $f_i : X \longrightarrow [0, 1]$ με $f_i(y) = \rho(y, x_i)$, $y \in X$ για $i = 1, 2, \ldots$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : X \longrightarrow [0, 1]^{\mathbb{N}}$ με $F(y) = (f_i(y))_{i\in\mathbb{N}}$. Παρατηρούμε καταρχήν ότι η F είναι 1–1. Πράγματι έστω $x, y \in X$ με $x \neq y$ και $\varepsilon = \rho(x, y) > 0$. Επιλέγουμε $i_0 \in \mathbb{N}$ με $\rho(x, x_{i_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε $\rho(y, y_{i_0}) > \frac{\varepsilon}{2}$ και άρα $f_{i_0}(y) > \frac{\varepsilon}{2} > f_{i_0}(x)$ συνεπώς $f_{i_0}(y) \neq f_{i_0}(x)$, άρα $F(x) \neq F(y)$ επομένως η F είναι 1–1.

Απομένει να δειχθεί ότι η $F : X \longrightarrow F[X](\subset [0, 1]^{\mathbb{N}})$ είναι αμφισυνεχής. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι $\pi_i \circ F = f_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, όπου π_i είναι η προβολή στην i συντεταγμένη. Έστω τώρα ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X. Είναι $y_n \xrightarrow{\rho} y$ αν και μόνο αν $f_i(y_n) \longrightarrow f_i(y)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ (σύμφωνα με την πρόταση 12.10), δηλαδή αν και μόνο αν $\pi_i \circ F(y_n) \longrightarrow \pi_i \circ F(y)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, που συμβαίνει αν και μόνο αν $F(y_n) \longrightarrow F(y)$ στη μετρική γινόμενο του $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Επομένως η $F : X \longrightarrow F[X]$ είναι αμφισυνεχής. $\square$

12.3 Το σύνολο Cantor

Υπενθυμίζουμε ότι με $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ συμβολίζεται το σύνολο

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} : \ \varepsilon_i = 0 \text{ ή } \varepsilon_i = 1, \ \forall i \in \mathbb{N}\}$$

δηλαδή το σύνολο όλων των ακολουθιών από 0 και 1.

Παρατηρήσεις. (1) Το σύνολο $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ αναπαριστά κατά φυσιολογικό τρόπο το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ των φυσικών αριθμών. Πράγματι, η συνάρτηση

$$\begin{array}{rrcl} & F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ \text{με} & F(A) & = & \chi_A \end{array}$$

είναι εύκολο να δειχθεί (Άσκηση) ότι είναι 1–1 και επί (υπενθυμίζουμε ότι χ_A συμβολίζει τη χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου A, δηλαδή $\chi_A : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$ με $\chi_A(n) = 1$ αν $n \in A$ και $\chi_A(n) = 0$ αν $n \in \mathbb{N} \setminus A$).

(2) Το σύνολο $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ παίζει σημαντικό ρόλο στη Θεωρία Πιθανοτήτων καθώς αναπαριστά όλα τα δυνατά αποτελέσματα μιας άπειρης αριθμήσιμης εκτέλεσης επαναλήψεων ενός πειράματος με δύο δυνατά ενδεχόμενα. Για παράδειγμα αν 0 και 1 αναπαριστούν τα δύο δυνατά αποτελέσματα σε μια ρίψη νομίσματος τότε κάθε ακολουθία $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ αναπαριστά ένα πιθανό αποτέλεσμα από την άπειρη διαδοχική εκτέλεση του πειράματος και αντίστροφα κάθε κάθε πιθανό αποτέλεσμα αντιστοιχεί σε μια τέτοια ακολουθία.

(3) Θα δείξουμε παρακάτω ότι το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ με οποιαδήποτε μετρική γινόμενο που επάγεται από το $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ είναι ομοιομορφικό με το σύνολο Cantor που θα οριστεί στη συνέχεια.

Πρόταση 12.13. *Στο χώρο $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ορίζουμε*

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \begin{cases} 0 & \text{αν } \vec{x} = \vec{y} \\ \dfrac{1}{i_0} & \text{αν } \vec{x} \neq \vec{y} \text{ και } i_0 = \min\{i : \ \vec{x}(i) \neq \vec{y}(i)\}. \end{cases}$$

Τότε

(1) Η d είναι μετρική γινόμενο στον $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

(2) Για κάθε ακολουθία $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ και $\vec{x} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) $\vec{x}_n \xrightarrow{d} \vec{x}$.

(β) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\vec{x}_n(i) = \vec{x}(i)$ για $i = 1, 2, \ldots, k$.

Απόδειξη.. Άσκηση. □

Αν $s = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ είναι μια πεπερασμένη ακολουθία με $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ για $i = 1, \ldots, k$ θα συμβολίζουμε με $|s|$ το μήκος της, δηλαδή $|s| = k$. Για s, t πεπερασμένες ακολουθίες από 0 και 1, $s = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{|s|})$, $t = (\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_{|t|})$, θα γράφουμε $s \preceq t$ αν η s είναι αρχικό κομμάτι της t, δηλαδή αν $|s| \leq |t|$ και $\varepsilon_i = \varepsilon'_i$ για $i = 1, \ldots, |s|$. Επίσης αν $s = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ είναι μια πεπερασμένη ακολουθία από 0 και 1 και $\varepsilon_{k+1} \in \{0,1\}$ θα συμβολίζουμε με $s^\frown\varepsilon_{k+1}$ την ακολουθία $s = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1})$.

Προχωράμε τώρα στον ορισμό του συνόλου Cantor για κάθε s πεπερασμένη ακολουθία από 0 και 1 θα ορίσουμε ένα κλειστό υποδιάστημα K_s του $[0,1]$.

Στο πρώτο βήμα θέτουμε

$$K_{(0)} = [0, \frac{1}{3}], \qquad K_{(1)} = [\frac{2}{3}, 1]$$

και

$$C_1 = K_{(0)} \cup K_{(1)}.$$

Στο δεύτερο βήμα θέτουμε

$$K_{(00)} = [0, \frac{1}{9}], \quad K_{(01)} = [\frac{1}{9}, \frac{1}{3}], \quad K_{(10)} = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}], \quad K_{(11)} = [\frac{8}{9}, 1]$$

και

$$C_2 = K_{(00)} \cup K_{(01)} \cup K_{(10)} \cup K_{(11)}.$$

Παρατηρούμε ότι οι δείκτες είναι όλες οι ακολουθίες μήκους 2 από 0 και 1.

Ας υποθέσουμε ότι έχουν οριστεί τα σύνολα K_s για όλες τις ακολουθίες από 0 και 1 με $|s| \leq k$ ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες

(α) Το K_s είναι κλειστό υποδιάστημα του $[0,1]$ μήκους $\frac{1}{3^{|s|}}$.

(β) Το s_1 είναι αρχικό διάστημα του s_2 αν και μόνο αν $K_{s_2} \subset K_{s_1}$.

(γ) Αν $|s_1| = |s_2|$ με $s_1 \neq s_2$ τότε $K_{s_1} \cap K_{s_2} = \emptyset$

και ότι $C_j = \bigcup_{|s|=j} K_s$ για $j = 1, \ldots, k$

Ορίζουμε τώρα το K_t για κάθε ακολουθία t από 0 και 1 μήκους $k+1$. Κάθε τέτοια t είναι της μορφής $s^\frown 0$ ή $s^\frown 1$ για κάποια s με $|s| = k$. Έτσι, αν $K_s = [a, b]$ ορίζουμε

$$K_{s^\frown 0} = [a, a + \frac{1}{3}(b-a)], \quad \text{και} \quad K_{s^\frown 1} = [a + \frac{2}{3}(b-a), b].$$

Έτσι τώρα έχουν οριστεί τα K_t για t με $|t| \leq k+1$ και είναι άμεσο ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες (α),(β),(γ). Θέτουμε

$$C_{k+1} = \bigcup_{|t|=k+1} K_t.$$

Το σύνολο Cantor είναι το σύνολο

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k.$$

Ιδιότητες του συνόλου Cantor

(1) Το σύνολο Cantor C είναι συμπαγές μη κενό υποσύνολο του $[0,1]$. Πράγματι, επειδή $0 \in C_k$ για κάθε k έπεται ότι $0 \in C$ και άρα $C \neq \emptyset$. Επειδή κάθε C_k είναι κλειστό υποσύνολο του $[0,1]$ η τομή τους $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$ θα είναι επίσης κλειστό υποσύνολο του $[0,1]$ και άρα το C θα είναι συμπαγές ως κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς $[0,1]$.

(2) Το C δεν περιέχει κανένα ανοικτό διάστημα. Πράγματι, έστω ότι περιείχε ένα ανοικτό διάστημα (a,b). Επιλέγουμε $k \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{3^k} < b-a$. Επειδή $C_k = \bigcup_{|s|=k} K_s$ και τα τα $(K_s)_{|s|=k}$ είναι ξένα ανά δύο κλειστά υποδιαστημάτα του $[0,1]$ το (a,b) πρέπει να περιέχεται σε κάποιο από αυτά. Όμως το μήκος κάθε διαστήματος K_s είναι ίσο με $\frac{1}{3^k}$ και άρα δεν μπορεί να περιέχει το διάστημα (a,b) που έχει μήκος $b-a$. Επομένως το C δεν περιέχει ανοικτό διάστημα.

(3) Έστω $\vec{s} = (\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ και θεωρούμε για κάθε k την πεπερασμένη ακολουθία $s_k = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$. Τότε η ακολουθία $(K_{s_k})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων με $\operatorname{diam} K_{s_k} \longrightarrow 0$ στον πλήρη μετρικό χώρο $[0,1]$. Άρα το σύνολο $\bigcap_{k=1}^{\infty} K_{s_k}$ είναι μονοσύνολο, $\bigcap_{k=1}^{\infty} K_{s_k} = \{x_{\vec{s}}\}$.

(4) Για κάθε $x \in C$ υπάρχει $\vec{s} = (\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ώστε $\{x\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} K_{s_k}$ (όπου $s_k = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ για κάθε k). Πράγματι, έστω $x \in C$. Τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $x \in C_k$ και άρα υπάρχει μοναδική ακολουθία s_k μήκους k (από 0 και 1) ώστε $x \in K_{s_k}$. Από τις (β),(γ) προκύπτει ότι αν $k_1 \leq k_2$ τότε $s_{k_1} \preceq s_{k_2}$ και άρα η ένωση των $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ορίζει ένα στοιχείο $\vec{s} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Είναι άμεσο ότι $x = x_{\vec{s}} = \bigcap_{k=1}^{\infty} K_{s_k}$.

Θεώρημα 12.14. *Οι συμπαγείς μετρικοί χώροι $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ και C είναι ομοιομορφικοί. (Για το λόγο αυτό πολλές φορές το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ καλείται και σύνολο Cantor).*

Απόδειξη.. Ορίζουμε

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & C \\ \text{με} \quad \Phi(\vec{s}) & = & x_{\vec{s}} \end{array}$$

όπου $x_{\vec{s}}$ όπως στην (3) παραπάνω. Από τη (γ) στον ορισμό του συνόλου Cantor έπεται ότι η Φ είναι 1–1, ενώ από την ιδιότητα (4) παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η Φ είναι επί.

Απομένει να δειχθεί ότι η Φ είναι αμφισυνεχής. Λόγω της συμπάγειας του $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ αρκεί να δειχθεί ότι η Φ είναι συνεχής (βλέπε πρόταση 9.23). Έστω $(\vec{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον

$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ και $\vec{s} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ώστε $\vec{s}_n \longrightarrow \vec{s}$ και θα δείξουμε ότι $\Phi(\vec{s}_n) \longrightarrow \Phi(\vec{s})$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{3^k} < \varepsilon$. Θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\vec{s}_n(i) = \vec{s}(i)$ για $i = 1, 2, \ldots, k$ (από πρόταση 12.13). Έτσι για κάθε $n \geq n_0$ τα $\Phi(\vec{s}_n) = x_{\vec{s}_n}$ και $\Phi(\vec{s}) = x_{\vec{s}}$ ανήκουν στο $K_{(\vec{s}(1),\ldots,\vec{s}(k))}$ που είναι διάστημα μήκους $\frac{1}{3^k}$ και άρα $|\Phi(\vec{s}_n) - \Phi(\vec{s})| \leq \frac{1}{3^k} < \varepsilon$. Επομένως $\Phi(\vec{s}_n) \longrightarrow \Phi(\vec{s})$ και άρα η Φ είναι συνεχής. □

Πόρισμα 12.15. *Ο χώρος $C^{\mathbb{N}}$ είναι ομοιομορφικός με τον C.*

Απόδειξη.. Επειδή ο C είναι ομοιομορφικός με τον $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ο $C^{\mathbb{N}}$, θα είναι ομοιομορφικός του $\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, που είναι ομοιμορφικός με τον $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (για την απόδειξη του τελευταίου ισομορφισμού χρησιμοποιήστε οποιαδήποτε 1–1 και επί απεικόνιση του $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ στο $\mathbb{N}$), που είναι ομοιομορφικός του C.

Επομένως ο $C^{\mathbb{N}}$ είναι ομοιομορφικός του C. □

Μπορεί να αποδειχθεί, χρησιμοποιώντας τεχνικές ανάλογες με αυτές του ορισμού του συνόλου Cantor, το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 12.16. *Κάθε (X, ρ) πλήρης και υπεραριθμήσιμος μετρικός χώρος περιέχει ένα (συμπαγές) υποσύνολο ομοιομορφικό με το σύνολο Cantor.*

Μια άλλη καθολική ιδιότητα του συνόλου Cantor περιγράφεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 12.17. *Κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι συνεχής εικόνα του σύνολου Cantor.*