ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σημειώσεις Παραδόσεων Συναρτησιακής Ανάλυσης

(Δεύτερη έκδοση)

Σπύρος Αργυρός

Μαΐος 2004

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η Συναρτησιακή Ανάλυση αποτελεί σημείο συνάντησης δύο θεμελιωδών κλάδων των Μαθηματικών, της Άλγεβρας και της Ανάλυσης. Ένας από τους βασικούς στόχους της, είναι η μελέτη των διανυσματικών χώρων με νόρμα και περαιτέρω η μελέτη των γραμμικών συνεχών απεικονίσεων που ορίζονται σ' αυτούς. Και στις δύο περιπτώσεις το χαρακτηριστικό γνώρισμα είναι η συνύπαρξη και συνλειτουργία αλγεβρικών και αναλυτικών δομών. (Γραμμικοί χώροι, γραμμικοί τελεστές, πληρότητα, συνέχεια, κ.ά.) Αρχέτυπα των δομών που μελετώνται αποτελούν οι πραγματικοί αριθμοί, ή πιο γενικά ο $\mathbb{R}^n$ με την ευκλείδεια νόρμα. Έτσι ο φοιτητής (φοιτήτρια) έχει μια εξοικείωση με παρόμοιες δομές από τα αρχικά μαθήματα Ανάλυσης. Εν τούτοις, τα αρχέτυπα που αναφέραμε δεν αποτελούν τα αντιπροσωπευτικά παραδείγματα δεδομένου ότι στην περίπτωση των διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης εμφανίζονται φαινόμενα αυτόματης πληρότητας και συνέχειας. Τα αντιπροσωπευτικά παραδείγματα αφορούν διανυσματικούς χώρους άπειρης διάστασης.

Από μια σκοπιά, το μάθημα της Συναρτησιακής Ανάλυσης αποφεύγει την δυσκολία των μαθημάτων που εισάγουν νέες έννοιες δεδομένου ότι το αλγεβρικό αλλά και το αναλυτικό μέρος του μαθήματος έχουν παρουσιαστεί σε προηγούμενα μαθήματα και άρα ο φοιτητής (φοιτήτρια) είναι εξοικειωμένος με τις επί μέρους εννοιολογικές συνιστώσες. Αυτό βέβαια δεν περιγράφει την πραγματικότητα, γιατί αφ' ενός μεν η σύνθεση των επί μέρους οδηγεί σε νέες έννοιες και επίσης γιατί απαιτείται προσπάθεια για την εξοικείωση με την ταυτόχρονη παρουσία των αλγεβρικών και αναλυτικών δομών.

Επειδή το μάθημα της Πραγματικής Ανάλυσης είναι πρόσφατο, οι παρούσες σημειώσεις δεν περιέχουν προκαταρκτικό κεφάλαιο από την θεωρία μετρικών χώρων. Αντίθετα, έχουμε συμπεριλάβει κάποια στοιχεία της Γραμμικής Άλγεβρας που είναι απαραίτητα για την ανάπτυξη των επόμενων κεφαλαίων. Γίνεται σύσταση για ουσιαστική μελέτη του περιεχομένου του κεφαλαίου αυτού. Χωρίς την κατανόηση της Γραμμικής Άλγεβρας που εμπλέκεται, είναι αδύνατη η μελέτη της Συναρτησιακής Ανάλυσης.

Το δεύτερο κεφάλαιο, αφορά την μελέτη της δομής των χώρων με νόρμα και το τρίτο περιέχει ιδιότητες των γραμμικών συνεχών απεικονίσεων και των διανυσματικών χώρων τελεστών.

Το τέταρτο κεφάλαιο, περιέχει τη μελέτη των χώρων Hilbert. Οι χώροι Hilbert είναι οι πλησιέστεροι πρός τον $\mathbb{R}^n$ με την ευκλείδεια νόρμα και οι χώροι που εμφανίζονται πιο συχνά στις εφαρμογές.

Τα δύο επόμενα κεφάλαια περιλαμβάνουν το θεώρημα Hahn – Banach και τις εφαρμογές του. Το θεώρημα Hahn – Banach είναι η θεμελιώδης αρχή στην οποία βασίζεται η Συναρτησιακή Ανάλυση. Οι εφαρμογές που παρουσιάζονται είναι ένα μικρό μέρος του πλήθους των αποτελεσμάτων που προκύπτουν ως συνέπειες αυτού.

Το τελευταίο κεφάλαιο περιέχει δύο σημαντικές εφαρμογές του θεωρήματος του Baire στη Συναρτησιακή Ανάλυση. Η πρώτη είναι η Αρχή του Ομοιομόρφου Φράγματος και η δεύτερη είναι το Θεώρημα της Ανοιχτής Απεικόνησης και οι συνεπειές του. Επίσης μελετώνται χώροι πηλίκα χώρων Banach και διασπάσεις χώρων Banach σε τοπολογικά αθροίσματα.

Η Συναρτησιακή Ανάλυση είναι ένας ευρύς κλάδος των Μαθηματικών, με πολλές εφαρμογές. Το περιεχόμενο του μαθήματος είναι μια εισαγωγή στη βασική θεωρία με στόχο την εξοικείωση των φοιτητών με έννοιες και τεχνικές αυτής. Όπως και στο μάθημα της Πραγματικής Ανάλυσης, αποφεύγονται αποτελέσματα με εκτενείς αποδείξεις, και στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχουν ασκήσεις για την καλύτερη κατανόηση του περιεχομένου τους.

Η έγκαιρη ολοκλήρωση της συγγραφής των σημειώσεων στηρίχθηκε στους συνεργάτες μου, τον Αλέκο Αρβανιτάκη, το Βασίλη Κανελλόπουλο, τον Αντώνη Μανουσάκη και τον Ανδρέα Τόλια, που επιθυμώ να ευχαριστήσω για την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφεραν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Στοιχεία γραμμικής άλγεβρας

1. Ορισμός διανυσματικού χώρου

Ορισμος 1.1. Πραγματικός *διανυσματικός χώρος* (ή *γραμμικός χώρος*) ονομάζεται μια τριάδα $(X, +, \cdot)$ όπου X είναι ένα σύνολο, $+ : X \times X \longrightarrow X$ μια εσωτερική πράξη (πρόσθεση) και $\cdot : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ μια εξωτερική πράξη (βαθμωτό γινόμενο) που ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $(x + y) + z = x + (y + z)$ για κάθε $x, y, z \in X$.

(ii) $x + y = y + x$ για κάθε $x, y \in X$.

(iii) Υπάρχει ένα στοιχείο 0 του X, που ονομάζεται μηδενικό στοιχείο, ώστε $x + 0 = 0 + x = x$ για κάθε $x \in X$.

(iv) Για κάθε $x \in X$ υπάρχει ένα στοιχείο $-x$ του X, που ονομάζεται αντίθετο του x, ώστε $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

(v) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

(vi) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ για κάθε $x \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (όπου στο πρώτο μέλος το σύμβολο + εκφράζει τη συνήθη πρόσθεση των πραγματικών αριθμών, ενώ στο δεύτερο μέλος το σύμβολο + εκφράζει την πρόσθεση στο διανυσματικό χώρο X).

(vii) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ για κάθε $x \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (όπου στο δεύτερο μέλος $\lambda\mu$ είναι το σύνηθες γινόμενο των πραγματικών αριθμών λ και μ).

(viii) $1x = x$ για κάθε $x \in X$.

Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου καλούνται και *διανύσματα*. Παρακάτω, χάριν συντομίας, θα χρησιμοποιούμε την έκφραση "Ο διανυσματικός χώρος X".

Σημειωση:. Αντικαθιστώντας στον παραπάνω ορισμό το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών με το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών έχουμε την έννοια του *μιγαδικού διανυσματικού χώρου.*

Παραδείγματα

1. Το προφανές παράδειγμα διανυσματικού χώρου είναι ο $\mathbb{R}$ (με τις συνήθεις πράξεις).

2. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ο χώρος $\mathbb{R}^k$ με πρόσθεση και βαθμωτό γινόμενο οριζόμενα κατά σημείο, δηλαδή από τις σχέσεις:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) + (y_1, y_2, \ldots, y_k) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_k + y_k)$$

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_k).$$

3. Ο χώρος $c_{00}(\mathbb{N})$ των τελικά μηδενικών ακολουθιών πραγματικών αριθμών αποτελείται από όλες τις ακολουθίες πραγματικών αριθμών της μορφής $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ για τις οποίες υπάρχει $i_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_i = 0$ για κάθε $i \geq i_0$. Η πρόσθεση και το βαθμωτό γινόμενο ορίζονται κατά σημείο, δηλαδή από τις σχέσεις

$$(x_1, x_2, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$$

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots).$$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι το άθροισμα δύο τελικά μηδενικών ακολουθιών, καθώς και το γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού με μια τελικά μηδενική ακολουθία είναι τελικά μηδενική ακολουθία και άρα οι πράξεις, όπως ορίστηκαν προηγουμένως, είναι καλά ορισμένες στο $c_{00}(\mathbb{N})$. Ο διανυσματικός χώρος $c_{00}(\mathbb{N})$ είναι η φυσιολογική επέκταση κάθε $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, υπό την έννοια ότι για κάθε k ο $\mathbb{R}^k$ μπορεί να ταυτιστεί με το σύνολο των στοιχείων $\vec{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ του $c_{00}(\mathbb{N})$ για τα οποία $x_i = 0$ για κάθε $i \geq k+1$.

4. Για ένα μη κενό σύνολο X, ο χώρος $\mathcal{F}(X)$ όλων των πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το X ($f : X \longrightarrow \mathbb{R}$) με πράξεις οριζόμενες κατά σημείο, δηλαδή από τις σχέσεις

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

5. Για ένα μη κενό σύνολο I, ο χώρος

$$c_{00}(I) = \big\{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} : \ \{i \in I : \ f(i) \neq 0\} \text{ πεπερασμένο } \big\}$$

με πράξεις οριζόμενες κατά σημείο.

6. Ο χώρος P όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές.

7. Για κάθε n ο χώρος P_n όλων των πολυωνύμων με βαθμό μικρότερο ή ίσο του n και πραγματικούς συντελεστές.

Υπάρχουν διανυσματικοί χώροι που συνδέονται με την ανάλυση για τους οποίους ο έλεγχος ότι οι πράξεις είναι καλά ορισμένες χρησιμοποιεί αποτελέσματα της ανάλυσης.

8. Ο χώρος $C(\mathbb{R})$ των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι διανυσματικός χώρος. Εδώ χρησιμοποιείται το γνωστό αποτέλεσμα της ανάλυσης ότι το άθροισμα δυο συνεχών συναρτήσεων, καθώς και το βαθμωτό γινόμενο πραγματικού αριθμού με συνεχή συνάρτηση είναι συνεχής συνάρτηση. Αντίστοιχα ορίζεται και ο χώρος $C[a,b]$ για κάθε κλειστό διάστημα $[a,b]$ του $\mathbb{R}$.

9. Ο χώρος $\ell_2(\mathbb{N}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \ a_n \in \mathbb{R}, \ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty\}$ με πράξεις οριζόμενες κατά σημείο, δηλαδή $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Η απόδειξη ότι αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι δυο στοιχεία του $\ell_2(\mathbb{N})$ τότε $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2 < \infty$ και άρα $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$ απαιτεί χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwartz.

Ορισμος 1.2. Αν X διανυσματικός χώρος, ένα μη κενό $Y \subset X$ ονομάζεται *(γραμμικός) υπόχωρος* του X αν για κάθε $x, y \in Y$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι $x + y \in Y$ και $\lambda x \in Y$.

Είναι άμεσο από τον ορισμό, ότι αν ο Y είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου X, τότε ο Y με τον περιορισμό των πράξεων $+ : X \times X \longrightarrow X$ και $\cdot : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ στον $Y \times Y$ και $\mathbb{R} \times Y$ αντίστοιχα, οι οποίες βάσει του ορισμού παίρνουν τιμές στον Y (δηλ. $+ : Y \times Y \longrightarrow Y$ και $\cdot : \mathbb{R} \times Y \longrightarrow Y$) καθιστούν τον $(Y, +, \cdot)$ διανυσματικό χώρο, με μηδενικό στοιχείο το μηδενικό στοιχείο του X.

Παραδείγματα

1. Για κάθε διανυσματικό χώρο X, οι $\{0\}$ (μηδενικός υπόχωρος) και X αποτελούν τα προφανή παραδείγματα υποχώρων του. Ένας υπόχωρος Y του X ονομάζεται *γνήσιος υπόχωρος* αν $\{0\} \neq Y \neq X$.

2. Οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ είναι τεσσάρων ειδών.

(i) Ο μηδενικός υπόχωρος $\{0\}$.

(ii) Οι ευθείες που περνούν από το 0.

(iii) Τα επίπεδα που περνούν από το 0.

(iv) Ο ίδιος ο $\mathbb{R}^3$.

3. Ένα παράδειγμα υποχώρου του $\mathbb{R}^k$ είναι ο

$$Y = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k : \ x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 0\}.$$

Πρόταση 1.3. *Αν $(X_a)_{a\in\mathcal{A}}$ είναι μια οικογένεια υποχώρων του X τότε και ο $\bigcap\limits_{a\in\mathcal{A}} X_a$ είναι υπόχωρος του X.*

Απόδειξη. Κατ΄ αρχήν ο $\bigcap\limits_{a\in\mathcal{A}} X_a$ περιέχει το 0, αφού αυτό περιέχεται στον X_a για κάθε $a \in \mathcal{A}$, και άρα είναι μη κενός. Αρκεί να δείξουμε ότι αν $x, y \in \bigcap\limits_{a\in\mathcal{A}} X_a$ τότε $x+y \in \bigcap\limits_{a\in\mathcal{A}} X_a$ και $\lambda x \in \bigcap\limits_{a\in\mathcal{A}} X_a$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Αφού $x, y \in \bigcap\limits_{a\in\mathcal{A}} X_a$ έπεται ότι για κάθε $a \in \mathcal{A}$ είναι $x \in X_a$ και $y \in X_a$ και αφού ο X_a είναι γραμμικός υπόχωρος έπεται ότι $x + y \in X_a$. Αφού αυτό συμβαίνει για κάθε $a \in \mathcal{A}$ έχουμε $x + y \in \bigcap\limits_{a\in\mathcal{A}} X_a$. Ομοίως προκύπτει και ότι $\lambda x \in \bigcap\limits_{a\in\mathcal{A}} X_a$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Ορισμός 1.4. Αν X γραμμικός χώρος και $G \subset X$, ονομάζουμε *γραμμική θήκη* του G και συμβολίζουμε με $< G >$ το μικρότερο γραμμικό υπόχωρο του X που περιέχει το G.

Η προηγούμενη πρόταση εξασφαλίζει την ύπαρξη του ελαχίστου υποχώρου που περιέχει το G. Πράγματι, θεωρώντας την οικογένεια $\mathcal{C}$ όλων των υποχώρων του X που περιέχουν το G, η οποία είναι μη κενή αφού περιέχει τον X, ισχυριζόμαστε ότι η τομή $\cap\mathcal{C}$ της οικογένειας αυτής είναι ο χώρος $< G >$. Από την προηγούμενη πρόταση ο $\cap\mathcal{C}$ είναι υπόχωρος του X, ενώ περιέχει το G αφού για κάθε $Y \in \mathcal{C}$ είναι $G \subset Y$. Αν τώρα Z είναι ένας υπόχωρος του X που περιέχει το G τότε $Z \in \mathcal{C}$ και άρα $\cap\mathcal{C} \subset Z$. Επομένως ο $\cap\mathcal{C}$ είναι ο ελάχιστος υπόχωρος του X που περιέχει το G, δηλαδή ο $< G >$.

Παρατηρήσεις. (i) Αν $G_1 \subset G_2$ τότε $< G_1 > \subset < G_2 >$.

(ii) $< \emptyset > = \{0\}$

(iii) Για $x \in X$ είναι $< \{x\} > = \{\lambda x : \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Πρόταση 1.5 (Εναλλακτική περιγραφή του $< G >$). *Για $G \subset X$ με $G \neq \emptyset$ ισχύει*

$$< G > = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \ \lambda_i \in \mathbb{R}, \ x_i \in G, \ i = 1, \ldots, n, \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $Z = \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \ \lambda_i \in \mathbb{R}, \ x_i \in G, \ i = 1, \ldots, n, \ n \in \mathbb{N} \right\}$ και θα δείξουμε ότι $< G > = Z$.

Είναι άμεσο ότι ο Z είναι γραμμικός υπόχωρος του X καθώς και ότι $G \subset Z$. Από αυτά τα δύο έπεται ότι $< G > \subset Z$. Αν τώρα Y είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του X που περιέχει το G, είναι εύκολο να δούμε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του υποχώρου, ότι θα περιέχει και κάθε στοιχείο του Z. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $Z \subset < G >$. Επομένως $Z = < G >$ □

Σημείωση:. Η χρησιμότητα της παραπάνω πρότασης έγκειται στο γεγονός ότι δίνει περιγραφή των στοιχείων του $< G >$ με χρήση στοιχείων του G. Τα στοιχεία του X της μορφής $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ λέγονται *γραμμικοί συνδυασμοί* των στοιχείων $x_1, \ldots, x_n$. Με αυτή την ορολογία η γραμμική θήκη $< G >$ του G ταυτίζεται με το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του G.

Ορισμος 1.6 (Γραμμική ανεξαρτησία). Έστω X ένας γραμμικός χώρος.

(i) Ένα πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_1, \dots, x_n\}$ του X λέγεται *γραμμικά ανεξάρτητο* αν για κάθε $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ώστε $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ έπεται ότι $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή αν υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ όχι όλα ίσα με μηδέν ώστε $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$, το σύνολο λέγεται *γραμμικά εξαρτημένο.*

(ii) Ένα $A \subset X$, λέγεται γραμμικά ανεξάρτητο αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι γραμμικά ανεξάρτητο, διαφορετικά, δηλαδή αν έχει ένα γραμμικά εξαρτημένο πεπερασμένο υποσύνολο, λέγεται γραμμικά εξαρτημένο.

Παραδείγματα

1. Δυο διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν δεν είναι συνευθειακά και τρία διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν δεν είναι συνεπίπεδα.
2. Σε κάθε διανυσματικό χώρο το $\{0\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο ενώ για $x \in X$ με $x \neq 0$ το $\{x\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Το $\emptyset$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
3. Αν το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο και $B \subset A$ τότε και το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Παρατηρηση. Η γραμμική ανεξαρτησία είναι μια ιδιαίτερα σημαντική έννοια στη θεωρία γραμμικών χώρων. Ο ορισμός είναι ισοδύναμος με το ότι κάθε $x \in A$ για A γραμμικά ανεξάρτητο παράγει τη δική του διάσταση που παραμένει ανεξάρτητη από όλες τις διαστάσεις του γραμμικού χώρου των υπολοίπων. Η επόμενη πρόταση πιστοποιεί την ιδιότητα αυτή.

Προταση 1.7. *Έστω X γραμμικός χώρος και $A \subset X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(i) *Το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

(ii) *Για κάθε $x \in A$, $x \notin < A \setminus \{x\} >$.*

Αποδειξη. Στην περίπτωση που $A = \emptyset$ η ισοδυναμία είναι προφανής. Στην περίπτωση που το A είναι μονοσύνολο, $A = \{y\}$ η ισοδυναμία ισχύει αφού $\{y\}$ γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνο αν $y \neq 0$ δηλαδή αν και μόνο αν $y \notin \{0\} =< \emptyset >=< \{y\} \setminus \{y\} >$. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι το A έχει δύο τουλάχιστον στοιχεία.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω ότι A γραμμικά ανεξάρτητο και $x \in A$. Υποθέτουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι $x \in < A \setminus \{x\} >$. Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 1.5 υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in A \setminus \{x\}$ που μπορούν να υποτεθούν διαφορετικά ανά δύο και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ώστε $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$. Έπεται ότι $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + (-1)x = 0$ και άρα το $\{x_1, \dots, x_n, x\}$ είναι ένα γραμμικά εξαρτημένο υποσύνολο του A, άτοπο. (Τονίζουμε εδώ ότι τα $x_1, \dots, x_n, x$ είναι διαφορετικά ανά δύο.)

(ii) $\Rightarrow$ (i) Έστω ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \notin < A \setminus \{x\} >$ και ότι το A είναι γραμμικά εξαρτημένο. Τότε υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in A$ διαφορετικά ανά δύο και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ όχι όλα ίσα με μηδέν, ώστε $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$. Κατ΄ αρχήν δεν μπορεί να είναι $n = 1$ διότι τότε $\lambda_1 x_1 = 0$ με $\lambda_1 \neq 0$ και άρα $x_1 = 0$ συνεπώς $0 \in A$, άτοπο διότι $0 \in < A \setminus \{0\} >$. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $n \geq 2$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας (αλλάζοντας ενδεχομένως τη σειρά κάποιων x_i) ότι $\lambda_n \neq 0$. Έπεται ότι $x_n = (-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_n})x_1 + \cdots + (-\dfrac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n})x_{n-1}$ και άρα $x_n \in < \{x_1, \dots, x_{n-1}\} > \subset < A \setminus \{x_n\} >$, άτοπο. □

Ορισμος 1.8. Έστω X ένας γραμμικός χώρος. Ένα $B \subset X$ ονομάζεται *Hamel βάση* (*ή αλγεβρική βάση*) του X, αν το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο και $< B >= X$.

Άσκηση 1.1. Έστω X γραμμικός χώρος και $B \subset X$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(i) Το B είναι Hamel βάση του X.
(ii) Για κάθε $x \in X$ με $x \neq 0$, υπάρχουν μοναδικά $k \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_k \in B$ διαφορετικά ανά δύο και $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί ώστε $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$.

Παραδείγματα

1. Στον $\mathbb{R}^k$ η $\{e_1, \ldots, e_k\}$ όπου $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (η μονάδα βρίσκεται στην j-θέση) είναι η κανονική (standard) βάση του $\mathbb{R}^k$. Κάθε άλλη Hamel βάση του $\mathbb{R}^k$ αποτελείται από k γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα και αντιστρόφως, οποιαδήποτε k γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα αποτελούν Hamel βάση του $\mathbb{R}^k$.
2. Η κανονική (standard) βάση του $c_{00}(\mathbb{N})$ είναι η $e_1, e_2, \ldots$ όπου $e_j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ για $j = 1, 2, \ldots$ (η μονάδα βρίσκεται στην j-θέση).

Το λήμμα του Zorn: Το Λήμμα του Zorn είναι ένα αποδεικτικό εργαλείο (απ΄ όπου και η ονομασία του ως ''Λήμμα'') που εξυπηρετεί παρόμοιες ανάγκες όπως η Μαθηματική επαγωγή (της οποίας είναι και συνέπεια όπως θα δούμε παρακάτω στην περίπτωση που το σύνολό μας είναι αριθμήσιμο). Δίνουμε τώρα κάποιους ορισμούς απαραίτητους για τη διατύπωσή του. Μια διμελής σχέση $\leq$ σε ένα μη κενό σύνολο E καλείται *μερική διάταξη* στο E αν είναι

(i) *Αυτοπαθής*, δηλαδή $x \leq x$, για κάθε $x \in E$.
(ii) *Μεταβατική*, δηλαδή αν $x, y, z \in E$ με $x \leq y$ και $y \leq z$ τότε $x \leq z$.
(iii) *Αντισυμμετρική*, δηλαδή αν $x, y \in E$ με $x \leq y$ και $y \leq x$ τότε $x = y$.

Αν $\leq$ είναι μια μερική διάταξη στο E τότε ο $(E, \leq)$ (ή απλά ο E) καλείται *μερικά διατεταγμένος χώρος*. Μια μερική διάταξη δεν είναι πάντα ολική. Δηλαδή είναι πιθανόν για κάποια $x, y \in E$ να μην ισχύει ούτε $x \leq y$ ούτε $y \leq x$. Σαν παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ ενός συνόλου X με τη μερική διάταξη ''$\subset$'' του περιέχεσθαι. Ένα υποσύνολο C του $(X, \leq)$ ονομάζεται *αλυσίδα* αν δυο οποιαδήποτε στοιχεία του C είναι συγκρίσιμα ως προς την $\leq$, δηλαδή για κάθε $x, y \in C$ είτε $x \leq y$ είτε $y \leq x$. Αν $A \subset E$, ένα στοιχείο $z \in E$ ονομάζεται *άνω φράγμα* του A, αν $a \leq z$ για κάθε $a \in A$. Ένα στοιχείο $m \in E$ λέγεται *μεγιστικό* αν δεν υπάρχει στοιχείο του E μεγαλυτερό από αυτό (ως προς την $\leq$), δηλαδή αν $x \in E$ και $m \leq x$ τότε $m = x$.

ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ ZORN: Έστω $(E, \leq)$ ένας μερικά διατεταγμένος χώρος. Αν κάθε αλυσίδα του E έχει άνω φράγμα τότε ο E έχει μεγιστικό στοιχείο.

Στην περίπτωση που το E είναι αριθμήσιμο σύνολο το λήμμα του Zorn, όπως είπαμε προηγουμένως, είναι συνέπεια της Μαθηματικής επαγωγής.

Απόδειξη. (του λήμματος του Zorn στην περίπτωση που E αριθμήσιμο.) Κάνουμε την απόδειξη για την περίπτωση που το E είναι άπειρο αριθμήσιμο $E = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. (Η περίπτωση που το E είναι πεπερασμένο είναι προφανής.)

Υποθέτουμε ότι κάθε αλυσίδα του E έχει άνω φράγμα ενώ το E δεν έχει μεγιστικό στοιχείο. Θέτουμε $k_1 = 1$. Αφού το x_{k_1} δεν είναι μεγιστικό στοιχείο το σύνολο $\{m \in \mathbb{N} : m > k_1 \text{ και } x_{k_1} \leq x_m\}$ είναι ένα μη κενό υποσύνολο των φυσικών και άρα έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω k_2. Έτσι $1 = k_1 < k_2$ και $x_{k_1} \leq x_{k_2}$.

Έστω ότι έχουν οριστεί οι $1 = k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ ώστε για κάθε l με $1 \leq l < n$ να είναι $k_{l+1} = \min\{m \in \mathbb{N} : \ m > k_l$ και $x_{k_l} \leq x_m\}$. Θέτουμε $k_{n+1} = \min\{m \in \mathbb{N} : \ m > k_n$ και $x_{k_n} \leq x_m\}$.

Με αυτό τον τρόπο κατασκευάζουμε μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών $1 = k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε $x_{k_1} \leq x_{k_2} \leq \cdots \leq x_{k_n} \leq x_{k_{n+1}} \leq \cdots$. Το σύνολο $C = \{x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \ldots\}$ είναι αλυσίδα του E συνεπώς, από την υπόθεσή μας, έχει άνω φράγμα στο E δηλαδή υπάρχει $x \in E$ ώστε $x_{k_n} \leq x$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.

Αφού $E = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ είναι $x = x_j$ για κάποιο $j \in \mathbb{N}$ και άρα $x_{k_n} \leq x_j$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Αν $j = k_{n_0}$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ τότε $x_{k_{n_0+1}} \leq x_j = x_{k_{n_0}}$ και αφού $x_{k_{n_0}} \leq x_{k_{n_0+1}}$ από την αντισυμμετρική ιδιότητα της μερικής διάταξης έπεται ότι $x_{k_{n_0}} = x_{k_{n_0+1}}$, άτοπο. Υποθέτοντας ότι $j \notin \{k_1, k_2, k_3, \ldots\}$ υπάρχει κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $k_{n_0} < j < k_{n_0}+1$. Όμως τότε $j > k_{n_0}$ και $x_{k_{n_0}} \leq x_j$ ενώ $j < k_{n_0+1}$ που έρχεται σε αντίφαση με τον ορισμό του k_{n_0+1}.

Επομένως το E έχει μεγιστικό στοιχείο. $\square$

Άσκηση 1.2. Έστω X διανυσματικός χώρος, Y υπόχωρος του X, A ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του Y και $z \in X \setminus Y$. Αποδείξτε ότι το $A \cup \{z\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Θεώρημα 1.9. *Κάθε διανυσματικός χώρος έχει Hamel βάση.*

Απόδειξη. Έστω x διανυσματικός χώρος. Θεωρούμε το σύνολο

$$E = \{G \subset X : \text{ το } G \text{ είναι γραμμικά ανεξάρτητο}\}.$$

Το E με τη μερική διάταξη "$\subset$" του περιέχεσθαι είναι ένας μερικά διατεταγμένος χώρος. Σκοπός μας είναι να εφαρμόσουμε το λήμμα του Zorn στο μερικά διατεταγμένο χώρο $(E, \subset)$. Δείχνουμε ότι ο $(E, \subset)$ ικανοποιεί τη συνθήκη που απαιτεί το λήμμα του Zorn δηλαδή ότι κάθε αλυσίδα στο E έχει άνω φράγμα.

Έστω C μια αλυσίδα στο E. Θεωρούμε το σύνολο $\cup C$, την ένωση δηλαδή όλων των συνόλων που ανήκουν στη C.

(α) Το $\cup C$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο , δηλαδή $\cup C \in E$. Πράγματι, αν το $\cup C$ ήταν γραμμικά εξαρτημένο θα υπήρχαν $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in \cup C$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ όχι όλα ίσα με μηδέν ώστε $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$. Για κάθε $k = 1, \ldots, n$ θεωρούμε $G_k \in C$ ώστε $x_k \in G_k$. Αφού το C είναι αλυσίδα θα υπάρχει κάποιο $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$ ώστε $G_k \subset G_{k_0}$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$ και άρα $x_k \in G_{k_0}$, $k = 1, \ldots, n$. Αφού $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ και τα $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ δεν είναι όλα ίσα με μηδέν έπεται ότι το G_{k_0} είναι γραμμικά εξαρτημένο, άτοπο.

(β) Το $\cup C$ είναι άνω φράγμα της C. Πράγματι, αν $A \in C$ τότε προφανώς $A \subset \cup C$.

Έτσι κάθε αλυσίδα στο E έχει άνω φράγμα, συνεπώς, από το λήμμα του Zorn το E έχει μεγιστικό στοιχείο. Έστω B ένα μεγιστικό στοιχείο του E. Δείχνουμε ότι το B είναι Hamel βάση του X.

Εφόσον το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο (αφού $B \in E$) αρκεί να δείξουμε ότι $< B >= X$. Αν αυτό δεν συμβαίνει, μπορούμε να επιλέξουμε ένα $z \in X \setminus < B >$. Τότε, σύμφωνα με την Άσκηση 1.2, το $B \cup \{z\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, δηλαδή $B \cup \{z\} \in E$, ενώ $B \subset B \cup \{z\}$ και $B \neq B \cup \{z\}$ που αντίκειται στο γεγονός ότι το B είναι μεγιστικό στοιχείο του E. Επομένως $< B >= X$ και αφού το B είναι και γραμμικά ανεξάρτητο, το B είναι Hamel βάση του X. $\square$

Θεώρημα 1.10 (επέκτασης). *Αν X γραμμικός χώρος, Y γραμμικός υπόχωρος του X και A μια Hamel βάση του Y τότε υπάρχει Hamel βάση B του X που περιέχει την A.*

Απόδειξη. Άσκηση. (Υπόδειξη: Ορίστε κατάλληλο διατεταγμένο σύνολο όπως στο προηγούμενο θεώρημα και εφαρμόστε το λήμμα του Zorn.) □

Άσκηση 1.3. Έστω X διανυσματικός χώρος, Y υπόχωρος του X και $x \in X \setminus Y$. Τότε κάθε στοιχείο του $< Y \cup \{x\} >$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $y + \lambda x$ με $y \in Y$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 1.11. *Δυό Hamel βάσεις ενός διανυσματικού χώρου είναι ισοπληθικές (δηλαδή αν A, B είναι δυο Hamel βάσεις ενός διανυσματικού χώρου X τότε υπάρχει συνάρτηση $\phi : A \longrightarrow B$, 1-1 και επί).*

Απόδειξη. Αν ο χώρος X έχει μια πεπερασμένη Hamel βάση τότε κάθε άλλη Hamel βάση έχει το ίδιο πλήθος με αυτή όπως είναι γνωστό από τη γραμμική άλγεβρα.

Στην περίπτωση που ο X έχει μια άπειρη αριθμήσιμη Hamel βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κάθε άλλη Hamel βάση A του X είναι επίσης άπειρη αριθμήσιμη. Πράγματι, έστω A μια άλλη Hamel βάση του X. Το ότι η A είναι άπειρη έπεται από το προηγούμενο (αν η A ήταν πεπερασμένη, τότε κάθε άλλη βάση του X θα ήταν πεπερασμένη, άτοπο, διότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια άπειρη Hamel βάση του X). Για κάθε $a \in A$ υπάρχουν μοναδικά $n_a \in \mathbb{N}$, $k_1^a < \cdots < k_n^a$ φυσικοί $\lambda_1^a, \ldots, \lambda_n^a$ μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί ώστε $a = \sum_{i=1}^{n_a} \lambda_i^a e_{k_i^a}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $g : A \longrightarrow \mathrm{fin}(\mathbb{N})$ (όπου με $\mathrm{fin}(\mathbb{N})$ συμβολίζουμε το σύνολο των πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ που, ως γνωστόν, είναι αριθμήσιμο) με $g(a) = \{k_1^a, \ldots, k_n^a\}$ όπου τα k_i^a είναι όπως προηγουμένως. Αν $x \in A$ και $g(x) = F$ τότε από τον ορισμό $x \in < e_k : k \in F >$. Άρα για κάθε $F \in \mathrm{fin}(\mathbb{N})$, αν το F έχει n στοιχεία θα υπάρχουν το πολύ n στοιχεία του A που απεικονίζονται μέσω της g στο F (διότι διαφορετικά ο χώρος $< e_k : k \in F >$ που είναι διανυσματικός χώρος με Hamel βάση μεγέθους n θα είχε περισσότερα από n γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, άτοπο) συνεπώς για κάθε $F \in \mathrm{fin}(\mathbb{N})$ το $g^{-1}(F)$ πεπερασμένο. Έτσι το A γράφεται $A = \bigcup_{F\in\mathrm{fin}(\mathbb{N})} g^{-1}(F)$ και άρα είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων συνόλων. Επομένως το A είναι άπειρο αριθμήσιμο σύνολο. □

Η απόδειξη στη γενική περίπτωση είναι παρόμοια και γίνεται με χρήση του εξής επιχειρήματος. Σε κάθε άπειρο σύνολο το σύνολο των πεπερασμένων υποσυνόλων του έχει την ίδια πληθικότητα με αυτό.

Το προηγούμενο θεώρημα μας επιτρέπει να δώσουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.12. *Διάσταση* ενός διανυσματικού χώρου X $(\dim X)$ ονομάζεται η πληθικότητα μιας Hamel βάσης του.

2. Γραμμικοί Τελεστές

Οι γραμμικοί τελεστές μεταξύ διανυσματικών χώρων είναι απεικονίσεις που διατηρούν τις πράξεις. Αυτό έχει σαν συνέπεια να διατηρούν και την αλγεβρική δομή και επίσης να προσδιορίζονται πλήρως από τις τιμές που λαμβάνουν σ' ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού. Αναμφίβολα αποτελούν αντικείμενα εξ' ίσου σημαντικά με τους διανυσματικούς χώρους και θα περιγράψουμε σύντομα κάποιες από τις ιδιότητές τους. Αρχίζουμε με τον ορισμό τους.

Ορισμός 1.13. Έστω X, Y διανυσματικοί χώροι. Μια απεικόνιση $T : X \to Y$ λέγεται γραμμικός τελεστής αν διατηρεί τις πράξεις. Δηλαδή:

(1) $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in X$.
(2) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ $\forall x \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Για $T : X \to Y$ και A υποσύνολο του X θα συμβολίζουμε

$$T[A] = \{y \in Y : \exists x \in A \text{ με } T(x) = y\}$$

και για $A \subset Y$

$$T^{-1}(A) = \{x \in X : T(x) \in A\}.$$

Επίσης θα συμβολίζουμε με $\operatorname{Im} T$ το σύνολο $T[X]$, το οποίο είναι υποσύνολο του Y και με $\operatorname{Ker} T$ το σύνολο $T^{-1}(\{0\})$.

2.1. Άλλες ιδιότητες γραμμικών τελεστών. Αν $T : X \to Y$ είναι γραμμικός τελεστής, τότε:

(1) $T(0_X) = 0_Y$, όπου $0_X, 0_Y$ δηλώνουν τα ουδέτερα στοιχεία των X και Y αντίστοιχα.
(2) Το σύνολο $\operatorname{Im} T$ είναι υπόχωρος του Y.
(3) Το σύνολο $\operatorname{Ker} T$ είναι υπόχωρος του X.

Και οι τρείς ιδιότητες είναι συνέπεια του ότι ο τελεστής διατηρεί τις πράξεις. Η απόδειξή τους είναι εύκολη. Για παράδειγμα η (2) αποδεικνύεται ως εξής:

Έστω $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} T$. Πρέπει να δείξουμε ότι $y_1 + y_2 \in \operatorname{Im} T$. Επιλέγουμε $x_1, x_2 \in X$ ώστε $T(x_1) = y_1$, $T(x_2) = y_2$. Τότε

$$y_1 + y_2 = T(x_1) + T(x_2) = T(x_1 + x_2) \in \operatorname{Im} T.$$

Παρόμοια για $y \in ImT$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ δείχνουμε ότι $\lambda y \in \operatorname{Im} T$.

Η (3) αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο.

2.2. Παραδείγματα. Η υπόθεση της γραμμικότητας περιορίζει τις υποψήφιες συναρτήσεις από τον X στον Y που την ικανοποιούν.

(α). Το πλέον απλό παράδειγμα γραμμικής απεικόνισης είναι η $T : X \to Y$, X, Y διανυσματικοί χώροι με $T(x) = 0_Y$ για όλα τα $x \in X$.

(β). Έστω $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γραμμική. Θέτουμε $T(1) = a$. Τότε $T(\lambda) = T(\lambda \cdot 1) = a \cdot \lambda$.

Άρα *όλες* οι γραμμικές απεικονίσεις $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι της μορφής $T(x) = a \cdot x$. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να ταυτίσουμε τις γραμμικές $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τους πραγματικούς αριθμούς ώστε η T να ταυτίζεται με τον a ανν $T(x) = a \cdot x$.

(γ). Έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική. Τότε υπάρχει ένας $m \times n$ πίνακας (a_{ij}) ώστε αν $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ τότε

$$T(x) = (a_{ij}) \cdot x^{\perp}.$$

Η εύρεση του πίνακα. Αν $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$ και $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^m$ τότε για $i = 1, \ldots, n$

$$T(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} e_j$$

και ο πίνακας (a_{ij}) είναι ακριβώς αυτός που ορίζουν οι συντελεστές στην προηγούμενη ισότητα.

Αυτή η περιγραφή των γραμμικών τελεστών $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ επιτρέπει να τους ταυτίσουμε με τους $m \times n$ πίνακες.

(δ). Υπάρχουν τρείς γραμμικοί τελεστές που συνδέονται άμεσα με την Ανάλυση.

(1) Το ορισμένο ολοκλήρωμα I

$$C[0,1] \ni f \mapsto I(f) = \int_0^1 f(t)dt \in \mathbb{R},$$

είναι ένας γραμμικός τελεστής όπως προκύπτει από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος.

(2) Η παράγουσα L,

$$C[0,1] \ni f \mapsto L(f) \in C[0,1]$$

όπου

$$L(f)(s) = \int_0^s f(t)dt$$

είναι επίσης γραμμική.

(3) Η παράγωγος $D : \mathcal{D}_\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}_\infty(\mathbb{R})$ όπου $\mathcal{D}_\infty(\mathbb{R})$ είναι οι άπειρες φορές διαφορίσιμες συναρτήσεις και $D(f) = f'$.

Όπως γίνεται κατανοητό, οι γραμμικές απεικονίσεις υπόκεινται σε περιορισμούς (δηλαδή διατηρούν τις πράξεις). Κατά συνέπεια δεν είναι σωστό ότι η αυθαίρετη απεικόνιση μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων είναι γραμμική. Εν τούτοις υπάρχει αρκετή ελευθερία να ορίζουμε γραμμικούς τελεστές και αυτό περιγράφεται από την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.14. *Έστω X, Y διανυσματικοί χώροι και $\mathcal{D}$ μια Hamel βάση του X. Τότε για κάθε συνάρτηση $g : \mathcal{D} \to Y$ υπάρχει μοναδικός γραμμικός τελεστής $T_g : X \to Y$ ώστε για κάθε $x \in \mathcal{D}$, $T_g(x) = g(x)$.*

Πριν δώσουμε την απόδειξη ας παρατηρήσουμε ότι η πρόταση, εξασφαλίζει την ύπαρξη μη τετριμμένων γραμμικών τελεστών μεταξύ διανυσματικών χώρων. Αυτό οφείλεται στο ότι, όπως έχουμε δει, κάθε διανυματικός χώρος έχει μια Hamel βάση $\mathcal{D}$ και στο ότι η συνάρτηση $g : \mathcal{D} \to Y$ είναι τυχαία. Επίσης λόγω της μοναδικότητας, ταυτίζει τις γραμμικές $T : X \to Y$ με τις συναρτήσεις $g : \mathcal{D} \to Y$.

Απόδειξη. Ας παρατηρήσουμε κατ΄ αρχάς ότι για κάθε $x \in X$, $x \neq 0_X$ υπάρχει ένα μοναδικό F_x πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathcal{D}$ και μοναδικό $\{\lambda_z : z \in F_x\} \subset \mathbb{R}$ ώστε $\lambda_z \neq 0$ και

$$x = \sum_{z \in F_x} \lambda_z \cdot z.$$

Δοθείσης της απεικόνισης g από την Πρόταση, θέτουμε

$$T_g(x) = \sum_{z \in F_x} \lambda_z \cdot g(z).$$

και $T_g(0) = 0$. Είναι εύκολο να δούμε ότι ο T_g είναι καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής. Επίσης αν $T' : X \to Y$ είναι γραμμικός και $T'(z) = g(z)$ για κάθε $z \in \mathcal{D}$, τότε $T_g(x) = T'(x)$ για κάθε $x \in X$ και άρα ο T_g είναι μοναδικός. □

Μια συνέπεια της προηγούμενης πρότασης, που δείχνει τη μεγάλη ελευθερία που έχουμε να ορίζουμε γραμμικούς τελεστές είναι το επόμενο.

Πόρισμα 1.15 (Επέκταση γραμμικών τελεστών). *Έστω X, Y διανυσματικοί χώροι και Z υπόχωρος του X. Αν $T : Z \to Y$ είναι γραμμικός τελεστής, υπάρχει $\tilde{T} : X \to Y$ γραμμικός, ώστε $\tilde{T}|Z = T$.*

Αποδειξη. Έστω $\mathcal{D}_Z$ μια Hamel βάση του Z. Από την πρόταση 1.10 υπάρχει μια $\mathcal{D}$ Hamel βάση του X ώστε $\mathcal{D}_Z \subset \mathcal{D}$. Ορίζουμε $g : \mathcal{D} \to Y$ ώστε $g(z) = T(z)$ αν $z \in Z$ και $g(z) = 0$ αν $z \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_Z$ και θέτουμε $\tilde{T} = T_g$. Είναι εύκολο να δούμε ότι πράγματι η $\tilde{T}$ είναι επέκταση της T (δηλαδή $\tilde{T}|Z = T$). □

Παρατηρηση. Η επέκταση $\tilde{T}$ του T δεν είναι μοναδική αν $Z \neq X$). Αυτό φαίνεται εύκολα διότι $\mathcal{D}_Z \subsetneq \mathcal{D}$ και την συνάρτηση g που χρησιμοποιούμε στην απόδειξη μπορούμε να την ορίσουμε ελεύθερα για κάθε $z \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_Z$.

2.3. Ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{L}(X, Y)$. Έστω X, Y δυο διανυσματικοί χώροι και $T_1, T_2 : X \to Y$ γραμμικοί τελεστές. Ορίζουμε $T_1 + T_2 : X \to Y$ με τον κανόνα

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x).$$

και επίσης για $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda T_1)(x) = \lambda \cdot T_1(x).$$

Ορίζουμε τώρα $\mathcal{L}(X, Y)$ να είναι ο χώρος των γραμμικών τελεστών από τον X στον Y. Είναι εύκολη άσκηση να δείξουμε ότι ο $\mathcal{L}(X, Y)$ με τις πράξεις $(T_1, T_2) \mapsto T_1 + T_2$, $(\lambda, T_1) \mapsto \lambda T_1$ όπως ορίσθηκαν προηγουμένως, είναι διανυσματικός χώρος.

Έστω X διανυσματικός χώρος. Ο *αλγεβρικός συζυγής* (ή *δυϊκός* του X) συμβολίζεται με $X^\sharp$ και είναι ο χώρος $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ ο οποίος όπως αναφέραμε προηγουμένως είναι διανυσματικός χώρος.

2.4. Γραμμικοί ισομορφισμοί.

Ορισμος 1.16. Ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ λέγεται *γραμμικός ισομορφισμός* αν είναι 1–1 και επί. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι ο X είναι *γραμμικά ισόμορφος* προς τον Y.

Παρατηρήσεις (α). Αν $T : X \to Y$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, τότε ο αντίστροφος αυτού $T^{-1} : Y \to X$ είναι επίσης γραμμικός ισομορφισμός. Επίσης αν $T : X \to Y$ και $S : Y \to Z$ είναι γραμμικοί ισομορφισμοί, τότε $S \circ T : X \to Z$ είναι γραμμικός ισομορφισμός. Οι αποδείξεις αυτών είναι εύκολες. Συνέπεια όλων αυτών είναι ότι θέτοντας $X \cong Y$ ανν ο X είναι ισόμορφος προς τον Y τότε η "$\cong$" είναι σχέση ισοδυναμίας στην κλάση όλων των διανυσματικών χώρων.

(β). Ο γραμμικός ισομορφισμός, πρέπει να γίνεται αντιληπτός σαν ταύτιση των διανυσματικών χώρων X και Y. Αυτό σημαίνει ότι για οποιαδήποτε ιδιότητα που ισχύει για την γραμμική δομή του X, η αντίστοιχη ιδιότητα ισχύει στον Y. Για παράδειγμα αν X είναι ισόμορφος προς τον Y και $T : X \to Y$ ισομορφισμός (*προσοχή:* ο ισομορφισμός δεν είναι μοναδικός) και αν $\mathcal{D}$ είναι Hamel βάση του X, τότε το σύνολο $\mathcal{D}' = \{T(x) : x \in \mathcal{D}\}$ είναι Hamel βάση του Y.

(γ). Η επόμενη πρόταση χαρακτηρίζει τις κλάσεις ισοδυναμίας ισόμορφων διανυσματικών χώρων.

Προταση 1.17. *Για X, Y διανυσματικούς χώρους, τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Οι X, Y είναι γραμμικά ισόμορφοι.*
(2) $\dim X = \dim Y$.

Αποδειξη. Αν οι X, Y είναι γραμμικά ισόμορφοι και $T : X \to Y$ ισομορφισμός, $\mathcal{D}$ μια Hamel βάση του X, τότε $T[\mathcal{D}]$ είναι βάση του Y από την παρατήρηση (β) και ισοπληθικό με το $\mathcal{D}$ αφού η T είναι 1–1. Άρα $\dim X = \dim Y$.

Αντίστροφα, αν $\dim X = \dim Y$, και $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ βάσεις των X και Y αντίστοιχα, τότε θα υπάρχει $g : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$, 1–1 και επί. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι σ' αυτήν την περίπτωση, ο γραμμικός τελεστής T_g (βλ. πρόταση 1.14) θα είναι επίσης 1–1 και επί και άρα οι X και Y θα είναι ισόμορφοι. □

3. Κυρτά σύνολα

Αν $x, y \in \mathbb{R}^3$ με $x \neq y$ είναι γνωστό ότι το σύνολο $[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0,1]\}$ ταυτίζεται με το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία x, y. Επίσης αν x, y, z είναι τρία μη συνευθειακά σημεία του $\mathbb{R}^2$ το τρίγωνο $T(x, y, z)$ με κορυφές τα σημεία αυτά περιγράφεται ως

$$T(x, y, z) = \{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0, \ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\}.$$

Η έννοια του κυρτού συνόλου περιγράφει μια σημαντική κατηγορία υποσυνόλων διανυσματικών χώρων.

Ορισμος 1.18. Ένα υποσύνολο K ενός διανυσματικού χώρου X λέγεται *κυρτό* αν για κάθε $x, y \in K$ και $0 \leq \lambda \leq 1$ είναι $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$.

3.1. Παραδείγματα κυρτών συνόλων. (α) Κάθε υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου είναι κυρτό σύνολο. Το αντίστροφο προφανώς δεν ισχύει.
(β) Για κάθε $x \in X$ το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι κυρτό.
(γ) Ένα $A \subset \mathbb{R}$ είναι κυρτό αν και μόνο αν είναι διάστημα (όχι κατ' ανάγκη κλειστό διάστημα).
(δ) Το σύνολο $\{x = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1^2 + a_2^2 \leq 1\}$, δηλαδή ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος του $\mathbb{R}^2$, είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

3.2. Ιδιότητες κυρτών συνόλων. (α) Το σύνολο K είναι κυρτό αν και μόνο αν η επόμενη ιδιότητα ισχύει:
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ στο K και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ με $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ το στοιχείο $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$ ανήκει στο K.

Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση. Οι γραμμικοί συνδυασμοί $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ με $\lambda_i \geq 0$ και $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $n \in \mathbb{N}$ λέγονται *κυρτοί συνδυασμοί.*
(β) Αν $(K_i)_{i \in I}$ είναι οικογένεια κυρτών υποσυνόλων ενός διανυσματικού χώρου τότε το σύνολο $\bigcap_{i \in I} K_i$ είναι επίσης κυρτό. Αποδεικνύεται ανάλογα με την αντίστοιχη ιδιότητα των υποχώρων.
(γ) Αν $T : X \longrightarrow Y$ γραμμικός τελεστής και $K \subset X$ κυρτό το $T[K]$ είναι κυρτό υποσύνολο του Y. (Απόδειξη: εύκολη.)

3.3. Η κυρτή θήκη ενός συνόλου L.

Ορισμος 1.19. Έστω L ένα μη κενό υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου X. Η *κυρτή θήκη* ενός συνόλου L, που συμβολίζεται με $\mathrm{co}(L)$ είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει το L.

Η ύπαρξη του $\mathrm{co}(L)$ εξασφαλίζεται από το ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον κυρτό σύνολο που περιέχει το L (ο ίδιος ο χώρος X) και από την προαναφερθείσα ιδιότητα (β) προκύπτει ότι το

$$\cap\{K : \ L \subset \ K \text{ κυρτό } \}$$

είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει το L.

Όπως στην περίπτωση της γραμμικής θήκης ενός συνόλου G, έτσι και για την $\mathrm{co}(L)$ υπάρχει εναλλακτική περιγραφή του συνόλου που δίνεται από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.20. *Έστω L μη κενό σύνολο ενός διανυσματικού χώρου X. Τότε*

$$\mathrm{co}(L) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \ x_i \in L, \ \lambda_i \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \ i = 1, \ldots, n, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(Δηλαδή το σύνολο $\mathrm{co}(L)$ είναι το σύνολο των κυρτών συνδυασμών στοιχείων του L.)

Απόδειξη. Από τον ορισμό προκύπτει άμεσα ότι το σύνολο των κυρτών συνδυασμών του L είναι κυρτό (εύκολα) και άρα το $\mathrm{co}(L)$ είναι υποσύνολό του. Επίσης από την ιδιότητα (α) κάθε κυρτό που περιέχει το L περιέχει και τους κυρτούς συνδυασμούς στοιχείων του, επομένως έχουμε το συμπέρασμα. $\square$

Παραδείγματα

(α) Αν $L = \{x, y\}$ με $x \neq y$ τότε $\mathrm{co}(L) = [x, y]$.

(β) Αν $L = \{x, y, z\}$ με x, y, z μη συνευθειακά τότε το $\mathrm{co}(L)$ είναι το τρίγωνο με κορυφές τα x, y, z.

(γ) Στον $\mathbb{R}^2$ η κυρτή θήκη του κύκλου $L = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 : \ a_1^2 + a_2^2 = 1\}$ είναι ο κυκλικός δίσκος $\mathrm{co}(L) = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 : \ a_1^2 + a_2^2 \leq 1\}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω X διανυσματικός χώρος και A, B μη κενά υποσύνολα του X ώστε $A \cap B = \emptyset$ και $A \cup B$ γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.

(α) Δείξτε ότι $< A > \cap < B >= \{0\}$.

(β) Έστω $f : B \longrightarrow < A >$ συνάρτηση. Δείξτε ότι το σύνολο

$$B' = \{y + f(y) : \ y \in B\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

2. Έστω $T : X \longrightarrow Y$ γραμμικός τελεστής μεταξύ των διανυσματικών χώρων X, Y. Αν $A \subset X$ ώστε το $T[A]$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο δείξτε ότι και το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

3. Έστω X διανυσματικός χώρος με άπειρη αριθμήσιμη Hamel βάση. Δείξτε ότι ο $X^\sharp$ είναι ισόμορφος προς τον $\mathcal{F}(\mathbb{N}) = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\}$.

4. Έστω X διανυσματικός χώρος και Y υπόχωρος του X. Δείξτε ότι υπάρχει $P : X \longrightarrow Y$ γραμμική προβολή (δηλαδή $P(y) = y, \ \forall y \in Y$).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Νόρμες σε διανυσματικούς χώρους

1. Ορισμός και παραδείγματα

Ορισμος 2.1. Έστω X διανυσματικός χώρος. Μια απεικόνιση $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται νόρμα αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\|x\| \geq 0$ για κάθε $x \in X$.
(ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ για κάθε $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.
(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in X$ (τριγωνική ανισότητα).

Η νόρμα σε ένα διανυσματικό χώρο είναι το ανάλογο της απόλυτης τιμής στο $\mathbb{R}$. Η θεμελιώδης ιδιότητα που περιέχεται στον ορισμό είναι ότι κάθε νόρμα ορίζει μια ''απόσταση'' μεταξύ των διανυσμάτων του χώρου, δηλαδή μια μετρική. Πράγματι, όπως έχει αναφερθεί στο μάθημα της Πραγματικής Ανάλυσης, δοθείσης μιας νόρμας $\|\cdot\|$ η απεικόνιση

$$X \times X \ni (x, y) \mapsto \rho_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x - y\|$$

είναι μια μετρική στον X. Αυτό κατ΄ αρχάς σημαίνει ότι ο $(X, \|\cdot\|)$ έχει δομή μετρικού χώρου η οποία παρουσιάζει κάποιες ιδιομορφίες που θα τις εξετάσουμε περαιτέρω. Επίσης από την τριγωνική ανισότητα προκύπτει με επαγωγή ότι για κάθε n, αν $x_1, \ldots, x_n \in X$ τότε $\|\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i\|$.

Παραδείγματα

(α) Το βασικό παράδειγμα είναι ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Είναι δε εύκολο να δούμε ότι αν $\|\cdot\|$ είναι μια άλλη νόρμα ορισμένη στον $\mathbb{R}$ τότε $\|x\| = a|x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όπου $a = \|1\|$.

(β) Οι $p-$νόρμες στον $\mathbb{R}^n$. Για $1 \leq p < \infty$, $x = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ θέτουμε

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{όπου } x = (a_1, \ldots, a_n).$$

Επίσης για $p = \infty$ ορίζουμε

$$\|x\|_\infty = \max\{|a_i| : \ i = 1, \ldots, n\} \ \text{ όπου } x = (a_1, \ldots, a_n).$$

(γ) Οι $p-$νόρμες στον $c_{00}(\mathbb{N})$ για $1 \leq p < \infty$. Για $x = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_{00}(\mathbb{N})$ θέτουμε

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|a_i| : \ i \in \mathbb{N}\}.$$

Το ότι οι $p-$νόρμες ικανοποιούν τις ιδιότητες της νόρμας είναι συνέπεια των ανισοτήτων Hölder και Minkowski που έχουν αποδειχθεί στο μάθημα της Πραγματικής Ανάλυσης και εμπεριέχονται στις Σημειώσεις του μαθήματος.

(δ) Ο χώρος $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ με $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : \ t \in [0,1]\}$ και αντίστοιχα ο χώρος

$C(K)$ όπου K είναι συμπαγής μετρικός χώρος, είναι χώροι με νόρμα.
(ε) Ο χώρος $(C[0,1], \|\cdot\|_p)$ για $1 \leq p < \infty$ με τη νόρμα

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. Μπάλες και σφαίρες σε χώρους με νόρμα

Συμβολισμός: Για $(X, \|\cdot\|)$ χώρο με νόρμα, $x \in X$ και $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ ορίζουμε:
(α) Ανοικτή μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα M

$$B(x, M) = \{y \in X : \ \|x - y\| < M\}.$$

(β) Κλειστή μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα M

$$B[x, M] = \{y \in X : \ \|x - y\| \leq M\}.$$

(γ) Σφαίρα με κέντρο το x και ακτίνα M

$$S(x, M) = \{y \in X : \ \|x - y\| = M\}.$$

Παρατηρήσεις:
1. Η ανοικτή μπάλα $B(x, M)$, που στους μετρικούς χώρους τη συμβολίζαμε με $S(x, M)$, είναι ανοικτό σύνολο στη μετρκή που ορίζει η νόρμα. Η κλειστή μπάλα $B[x, M]$ ταυτίζεται με την κλειστότητα της $B(x, M)$, είναι κλειστό σύνολο, και τέλος $S(x, M) = \partial B[x, M]$ και η σφαίρα $S(x, M)$ είναι επίσης κλειστό σύνολο.
2. Η δομή του $(X, \|\cdot\|)$ ως μετρικού χώρου παρουσιάζει ισχυρή ομοιογένεια. Αυτό κατ΄ αρχάς προκύπτει από την ακόλουθη, που είναι εύκολο να διαπιστωθεί, σχέση

$$x + B(0, M) = B(x, M).$$

Δηλαδή η ανοικτή μπάλα ακτίνας M γύρω από το τυχαίο x προκύπτει σαν μεταφορά κατά x της ανοικτής μπάλας με κέντρο 0 και την ίδια ακτίνα. Αυτή η απλή ιδιότητα θα χρησιμοποιηθεί στη μελέτη των συνεχών γραμμικών τελεστών. Αντίστοιχη ιδιότητα ισχύει για διαστολές και συστολές μπαλών. Δηλαδή αν $\lambda > 0$ και $M > 0$ ισχύει

$$\lambda \cdot B(0, M) = B(0, \lambda M).$$

3. Η σχέση της αλγεβρικής και της τοπολογικής δομής χώρων με νόρμα

Μια σημαντική ιδιότητα της νόρμας είναι ότι επιτρέπει να συνλειτουργήσουν η δομή του διανυσματικού χώρου και αυτή του μετρικού χώρου. Η πρώτη είναι αλγεβρική και η δεύτερη τοπολογική. Η σύνδεσή τους εμφανίζεται σε πολλά επιμέρους σημεία. Η δυνατότητα σύνδεσης ετερόκλητων δομών (αλγεβρική και τοπολογική) αποτελεί την ουσία της συναρτησιακής ανάλυσης και ενυπάρχει στη δομή των πραγματικών αριθμών. Θα αρχίσουμε με κάποιες απλές ιδιότητες των ακολουθίων.

Υπενθυμίζουμε ότι μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σε ένα χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ συγκλίνει στο $x \in X$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon)$ να ισχύει $\|x_n - x\| < \varepsilon$. Αντίστοιχα ορίζεται η βασική ακολουθία (ακολουθία Cauchy) δηλαδή η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_0(\varepsilon)$ να ισχύει $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Πρόταση 2.2. *Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δυο ακολουθίες σε ένα χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$. Τότε*

(i) *Αν* $x_n \to x$ *και* $y_n \to y$ *τότε* $x_n + y_n \to x + y$.
(ii) *Αν* $x_n \to x$ *και* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ακολουθία στο* $\mathbb{R}$ *με* $\lambda_n \to \lambda$ *τότε* $\lambda_n x_n \to \lambda x$.
(iii) *Αν οι* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι ακολουθίες Cauchy τότε και η* $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι Cauchy.*

Η απόδειξη της πρότασης είναι ακριβώς η ίδια με τα αντίστοιχα αποτελέσματα των πραγματικών αριθμών, αρκεί αντί της απόλυτης τιμής να χρησιμοποιηθεί η νόρμα. Το περιεχόμενο της προηγούμενης πρότασης αφορά ακριβώς αυτό που προείπαμε δηλαδή τη σύνδεση των πράξεων με την τοπολογία. Σαν συνέπεια αυτής προκύπτει ότι οι πράξεις $+ : X \times X \longrightarrow X$ της πρόσθεσης και $\cdot : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ του βαθμωτού γινομένου είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Πρόταση 2.3. *Έστω* $(X, \|\cdot\|)$ *χώρος με νόρμα και* Y *υπόχωρος του* X.
(i) *Αν* $Y^o \neq \emptyset$ *τότε* $Y = X$.
(ii) *Η κλειστότητα* $\overline{Y}$ *του* Y *είναι υπόχωρος του* X.

Απόδειξη. (i) Υπενθυμίζουμε ότι για $A \subset X$, $A^o = \cup\{V : V \subset A,\ V \text{ ανοικτό}\}$. Αν $Y^o \neq \emptyset$ έπεται ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ και $y \in Y$ ώστε $B(x, \varepsilon) \subset Y$. Αλλά τότε, επειδή ο Y είναι υπόχωρος $B(0, \varepsilon) = B(x, \varepsilon) - x \subset Y$. Άρα, πάλι επειδή ο Y είναι υπόχωρος, έπεται ότι $B(0, \lambda\varepsilon) = \lambda B(0, \varepsilon) \subset Y$ για κάθε $\lambda > 0$ επομένως $X = \bigcup\limits_{\lambda>0} B(0, \lambda\varepsilon) \subset Y$.
(ii) Έστω $y_1, y_2 \in \overline{Y}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $y_1 + y_2 \in \overline{Y}$ και $\lambda y_1 \in \overline{Y}$. Πράγματι, αφού $y_1, y_2 \in \overline{Y}$ έπεται ότι υπάρχουν ακολουθίες $(y_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον Y ώστε $y_1^n \to y_1$ και $y_2^n \to y_2$. Επειδή ο Y είναι υπόχωρος, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ $y_1^n + y_2^n \in Y$ και επίσης $y_1^n + y_2^n \to y_1 + y_2$, άρα $y_1 + y_2 \in \overline{Y}$. Ανάλογα αποδεικνύεται και η δεύτερη απαιτούμενη ιδιότητα. □

4. Χώροι Banach

Μια σημαντική υποκλάση των χώρων με νόρμα είναι οι χώροι Banach (ο Stefan Banach, κορυφαίος Πολωνός μαθηματικός, υπήρξε από τους θεμελιωτές της θεωρίας χώρων με νόρμα).

Ορισμός 2.4. Ένας χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος Banach αν είναι πλήρης ως προς τη μετρική που ορίζει η νόρμα. (Δηλαδή αν κάθε ακολουθία Cauchy στον X συγκλίνει σε ένα στοιχείο του X.)

Υπενθυμίζεται ότι κλειστά υποσύνολα πλήρων μετρικών χώρων είναι πλήρη, άρα οι κλειστοί υπόχωροι χώρων Banach είναι επίσης χώροι Banach. Επίσης αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και Y υπόχωρος του X ώστε ο Y να είναι χώρος Banach τότε ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X.

Το προφανές παράδειγμα χώρου Banach είναι ο $\mathbb{R}$. Όπως θα δούμε κάθε χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ με τον X να είναι πεπερασμένης διάστασης είναι χώρος Banach. Επομένως χώροι με νόρμα που δεν είναι χώροι Banach πρέπει να είναι απειροδιάστατοι. Θα δείξουμε παρακάτω ότι κάθε απειροδιάστατος χώρος Banach έχει υποχρεωτικά υπεραριθμήσιμη Hamel βάση. Άρα ισχύει ότι για οποιαδήποτε νόρμα $\|\cdot\|$ στον $c_{00}(\mathbb{N})$ ο χώρος $(c_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|)$ δεν είναι χώρος Banach.

Ορισμός 2.5. Έστω $(X, \|\ \|)$ χώρος με νόρμα και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στον X. Λέμε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι συγκλίνουσα αν είναι συγκλίνουσα η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)_{n\in\mathbb{N}}$ δηλαδή αν υπάρχει $x \in X$ ώστε $\| \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - x\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Σε αυτή την περίπτωση συμβολίζουμε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = x$.

Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ λέγεται απολύτως συγκλινουσα αν $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$.

Προταση 2.6. *Έστω $(X, \| \|)$ ένας χώρος με νόρμα. Ο $(X, \| \|)$ είναι χώρος Banach αν και μόνο αν κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά στον X είναι συγκλίνουσα.*

Αποδειξη. Υποθέτουμε ότι ο X είναι χώρος Banach και θεωρούμε μια απολύτως συγκλίνουσα σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ στον X. Για να δείξουμε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει αρκεί, εφόσον ο X είναι πλήρης, να δείξουμε ότι η ακολουθία $(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)_{n\in\mathbb{N}}$ των μερικών αθροισμάτων είναι Cauchy. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m > n \geq n_0$ να ισχύει $\sum\limits_{i=n+1}^{m} \|x_i\| < \varepsilon$. Έτσι για κάθε $m > n \geq n_0$ έχουμε $\| \sum\limits_{i=n+1}^{m} x_i\| \leq \sum\limits_{i=n+1}^{m} \|x_i\| < \varepsilon$ και άρα η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι Cauchy άρα συγκλίνουσα.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι κάθε κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά στον X είναι συγκλίνουσα. Έστω $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία Cauchy στον X. Επαγωγικά επιλέγουμε φυσικούς $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε $\|y_{k_n} - y_{k_{n+1}}\| < \frac{1}{2^n}$. Θέτουμε $x_n = y_{k_{n+1}} - y_{k_n}$ για $n = 1, 2, \ldots$. Είναι $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ και άρα από την υπόθεσή μας η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει. Έστω $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. Όμως $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = y_{k_{n+1}} - y_{k_1}$ και άρα $y_{k_{n+1}} \to x + y_{k_1}$. Έτσι η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που είναι ακολουθία Cauchy έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία (την $(y_{k_{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$) και άρα η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα. Επομένως ο X είναι χώρος Banach. □

Ορισμος 2.7. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και A υποσύνολο του X. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε $\rho(x, A) = \inf\{\|x - y\| : \ y \in A\}$.

Ο ορισμός είναι εξειδίκευση της απόστασης σημείου από υποσύνολο που έχουμε δει στους μετρικούς χώρους. Έτσι ισχύουν $\rho(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$ και το A είναι κλειστό υποσύνολο του X αν και μόνο αν για κάθε $x \in X \setminus A$ ισχύει $\rho(x, A) > 0$.

Προταση 2.8. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, Y υπόχωρος του X, $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύει*

$$\rho(\lambda x, Y) = |\lambda| \rho(x, Y).$$

Αποδειξη. Παρατηρούμε ότι αν $\lambda = 0$ η αποδεικτέα σχέση ισχύει κατά προφανή τρόπο (και τα δύο μέλη είναι ίσα με 0) και άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda \neq 0$. Έτσι

$$\begin{aligned}
\rho(\lambda x, Y) &= \inf\{\|\lambda x - y\| : \ y \in Y\} \\
&= \inf\{|\lambda| \cdot \|x - \frac{1}{\lambda} y\| : \ y \in Y\} \\
&= |\lambda| \inf\{\|x - \frac{1}{\lambda} y\| : \ y \in Y\} \\
&= |\lambda| \inf\{\|x - z\| : \ z \in Y\} \\
&= |\lambda| \rho(x, Y).
\end{aligned}$$

□

Θεωρημα 2.9. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης. Τότε ο X είναι χώρος Banach.*

Αποδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στη διάσταση του X. Έστω ότι $\dim X = 1$. Αυτό σημαίνει ότι $X = \{\lambda x : \ \lambda \in \mathbb{R}\}$ για κάποιο $x \in X$, $x \neq 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|x\| = 1$, αλλιώς θέτουμε $x' = \dfrac{x}{\|x\|}$ και $X = \{\lambda x' : \ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Η απεικόνιση $T : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με $T(\lambda x) = \lambda$ είναι ισομετρία, αφού $\|\lambda x - \mu x\| = |\lambda - \mu|$, άρα ο X είναι πλήρης ως ισομετρικός προς τον $\mathbb{R}$.

Έστω τώρα ότι κάθε χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ με $\dim X = k$ είναι χώρος Banach. Θα δείξουμε ότι το ίδιο συμβαίνει για κάθε χώρο $(X, \|\cdot\|)$ με $\dim X = k+1$. Επιλέγουμε μια Hamel βάση $e_1, e_2, \ldots, e_{k+1}$ του X και έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία στον X. Τότε κάθε x_n γράφεται στη μορφή $x_n = \lambda_n^1 e_1 + \lambda_n^2 e_2 + \cdots + \lambda_n^{k+1} e_{k+1}$.

Ισχυρισμός: Για $i = 1, 2, \ldots, k+1$ η ακολουθία $(\lambda_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία του $\mathbb{R}$ (και άρα συγκλίνουσα).

Αποδειξη του Ισχυρισμου. Έστω $1 \leq i \leq k+1$. Θέτουμε $X_i = < \{e_j : \ j = 1, \ldots, k+1, \ j \neq i\} >$. Ο X_i είναι διάστασης k, άρα από την επαγωγική υπόθεση θα είναι χώρος Banach, άρα κλειστός υπόχωρος του X, συνεπώς $\rho(e_i, X_i) > 0$. Επίσης για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, από την προηγούμενη πρόταση έχουμε

$$\begin{aligned} |\lambda_n^i - \lambda_m^i| \rho(e_i, X_i) &= \rho\big((\lambda_n^i - \lambda_m^i)e_i, X_i\big) \leq \|(\lambda_n^i - \lambda_m^i)e_i - \big(-\sum_{j\neq i}(\lambda_n^j - \lambda_m^j)e_j\big)\| \\ &= \|\sum_{j=1}^{k+1} \lambda_n^j e_j - \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_m^j e_j\| = \|x_n - x_m\|. \end{aligned} \tag{1}$$

Έτσι από την (1), το γεγονός ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στον X και το ότι $\rho(e_i, X_i) > 0$ προκύπτει ότι η $(\lambda_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy στον $\mathbb{R}$. $\square$

Θέτουμε $\lambda_i = \lim\limits_n \lambda_n^i$ για $i = 1, 2, \ldots, k+1$ και $x = \sum\limits_{i=1}^{k+1} \lambda_i e_i$. Με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \|x_n - x\| &= \|\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_n^i e_i - \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i e_i\| = \|\sum_{i=1}^{k+1} (\lambda_n^i - \lambda_i) e_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{k+1} |\lambda_n^i - \lambda_i| \|e_i\| \leq \max_i \|e_i\| \cdot \sum_{i=1}^{k+1} |\lambda_n^i - \lambda_i| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

$\square$

Πορισμα 2.10. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και Y πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X. Τότε ο Y είναι κλειστός υπόχωρος.*

Αποδειξη. Από το προηγούμενο θεώρημα ο Y με τη νόρμα που επάγεται από τον X είναι πλήρης και άρα, αφού όπως έχουμε αναφέρει οι πλήρεις υπόχωροι είναι κλειστοί, είναι κλειστός. $\square$

Η επόμενη συνέπεια του Θεωρήματος 2.9 χρησιμοποιεί το θεώρημα του Baire. Ας θυμηθούμε ότι το θεώρημα του Baire ισχυρίζεται ότι αν (X, ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος και $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του ώστε $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $K_{n_0}^o \neq \emptyset$.

Πορισμα 2.11. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach. Τότε η διάσταση $\dim X$ του X είναι είτε πεπερασμένη ή υπεραριθμήσιμη.*

Αποδειξη. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ απειροδιάστατος χώρος Banach και ας υποθέσουμε ότι έχει μια αριθμήσιμη Hamel βάση $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ορίζουμε $Y_n = < \{x_i : \ 1 \leq i \leq n\} >$. Προφανώς κάθε Y_n είναι πεπερασμένης διάστασης και $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$. Επίσης κάθε Y_n είναι κλειστός υπόχωρος (Πόρισμα 2.10) άρα από το θεώρημα του Baire υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $Y_{n_0}^o \neq \emptyset$. Η Πρόταση 2.3(i) συνεπάγεται ότι $Y_{n_0} = X$ άρα ο X είναι πεπερασμένης διάστασης, άτοπο. □

Παρατηρήσεις:
(α) Ας παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν χώροι με νόρμα που έχουν αριθμήσιμη διάσταση. Για παράδειγμα οι $(c_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p \leq \infty$ είναι τέτοιοι χώροι. Συνέπεια του προηγούμενου πορίσματος είναι ότι αν X είναι διανυσματικός χώρος με αριθμήσιμη Hamel βάση τότε δεν υπάρχει δυνατότητα να ορίσουμε νόρμα στον X ώστε να γίνει χώρος Banach.
(β) Το γεγονός ότι κάθε Hamel βάση σε απειροδιάστατους χώρους Banach είναι υπεραριθμήσιμη καθιστά αναγκαία τη χρησιμοποίηση της Ανάλυσης για τη μελέτη αυτών. Αυτό οφείλεται στο ότι οι Hamel βάσεις σε αυτούς δεν μπορούν να έχουν ακριβή περιγραφή. (Είναι ενδιαφέρον ότι στην περίπτωση αυτή η ύπαρξη της Hamel βάσης δεν συνεπάγεται το λεπτομερή προσδιορισμό των στοιχείων της.) Για παράδειγμα θεωρήστε τον χώρο $\ell_2(\mathbb{N})$ που όπως θα δούμε είναι χώρος Banach. Ο χώρος δέχεται υπεραριθμήσιμη Hamel βάση αλλά δεν υπάρχει δυνατότητα να περιγράψουμε τα στοιχεία αυτής.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας μετρικός χώρος (X, ρ) λέγεται διαχωρίσιμος αν υπάρχει $D \subset X$ που να είναι αριθμήσιμο και πυκνό. Ένας χώρος με νόρμα λέγεται διαχωρίσιμος αν είναι διαχωρίσιμος στη μετρική που επάγει η νόρμα.

Προταση 2.12. *Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης τότε ο X είναι διαχωρίσιμος.*

Αποδειξη. Έστω $n = \dim X$ και $(x_i)_{i=1}^n$ μία Hamel βάση του X με $\|x_i\| = 1$. Θέτουμε

$$D = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i : \ r_i \in \mathbb{Q}, \ i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Το σύνολο D είναι αριθμήσιμο γιατί ταυτίζεται με το $\mathbb{Q}^n (= \{(r_1, \ldots, r_n) : \ r_i \in \mathbb{Q}, \ i = 1, \ldots, n\})$ που είναι αριθμήσιμο. Επίσης το D είναι πυκνό. Πράγματι, αν $x \in X$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$ και $\varepsilon > 0$, επιλέγοντας $r_i \in \mathbb{Q}$ ώστε $|a_i - r_i| < \dfrac{\varepsilon}{n}$ για $i = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} r_i x_i\| = \|\sum_{i=1}^{n} (a_i - r_i) x_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i - r_i| < n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

□

Προταση 2.13. *Ο χώρος $(c_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|)$, όπου $\|\cdot\|$ είναι μια οποιαδήποτε νόρμα, είναι διαχωρίσιμος.*

Αποδειξη. Έστω $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η συνήθης Hamel βάση του $c_{00}(\mathbb{N})$. Θεωρούμε το σύνολο

$$D = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i e_i : \ r_i \in \mathbb{Q}, \ i = 1, \ldots, n, \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Το D είναι αριθμήσιμο και όπως στην προηγούμενη πρόταση δείχνουμε ότι είναι πυκνό. $\square$

5. Κλασσικά παραδείγματα

Τα κλασσικά παραδείγματα χώρων Banach αποτελούν οι χώροι ακολουθιών $\ell_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$, ο $\ell_\infty(\mathbb{N})$ και ο $c_0(\mathbb{N})$ καθώς και ο $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Ο χώρος $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ έχει μελετηθεί στις Σημειώσεις του μαθήματος της Πραγματικής Ανάλυσης.

Για $1 \leq p < \infty$ ο χώρος $\ell_p(\mathbb{N})$ ορίζεται ως

$$\ell_p(\mathbb{N}) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \ x_n \in \mathbb{R}, \ n = 1, 2, \ldots, \ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

και γίνεται διανυσματικός χώρος με πράξεις κατά σημείο. Η νόρμα στον $\ell_p(\mathbb{N})$ ορίζεται για $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{n+1}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Το γεγονός ότι αν οι $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανήκουν στον ℓ_p τότε η ακολουθία $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανήκει επίσης στον ℓ_p καθώς και η τριγωνική ανισότητα της νόρμας $\|\cdot\|_p$ αποδεικνύεται με χρήση της ανισότητας Minkowski.

Ο χώρος $\ell_\infty(\mathbb{N})$ αποτελείται απο όλες τις φραγμένες πραγματικές ακολουθίες και η νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ για $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ ορίζεται ως

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Η απόδειξη ότι ο $(\ell_\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος με νόρμα είναι εύκολη.

Ο χώρος $c_0(\mathbb{N})$ αποτελείται απο όλες τις ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών ώστε $a_n \to 0$, και είναι προφανώς υπόχωρος του $\ell_\infty(\mathbb{N})$. Έτσι ο $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος με νόρμα.

Πρόταση 2.14. *Οι χώροι $\ell_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$, είναι διαχωρίσιμοι.*

Απόδειξη. Για δοθέν p, $1 \leq p < \infty$, παρατηρούμε ότι ο $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$ είναι υπόχωρος του $\ell_p(\mathbb{N})$. Θα δείξουμε ότι είναι πυκνός. Θεωρούμε $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p(\mathbb{N})$ και $\varepsilon > 0$. Αφού $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ μπορούμε να επιλέξουμε $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} |x_n|^p < \varepsilon^p$. Θέτουμε $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_{00}(\mathbb{N})$ με $y_n = x_n$ για $n \leq k$ και $y_n = 0$ για $n \geq k+1$. Είναι $\|x - y\|_p = \Big(\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$. Άρα ο $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$ είναι πυκνός στον $\ell_p(\mathbb{N})$.

Επειδή ο $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$ είναι διαχωρίσιμος, έπεται ότι ο $\ell_p(\mathbb{N})$, είναι διαχωρίσιμος. $\square$

Πρόταση 2.15. *Ο χώρος $\ell_\infty(\mathbb{N})$ δεν είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Ας θυμηθούμε από την πραγματική ανάλυση ότι ένας μετρικός χώρος (X, ρ) είναι μη διαχωρίσιμος αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ και $D \subset X$ ώστε το D να είναι υπεραριθμήσιμο και για κάθε $x, y \in D$ με $x \neq y$ να ισχύει $\rho(x, y) \geq \varepsilon$. Αυτό το κριτήριο θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη της πρότασης.

Θεωρούμε το σύνολο

$$D = \{\chi_A : \ A \subset \mathbb{N}\}$$

όπου $\chi_A : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του A, δηλαδή $\chi_A(n) = 1$ για $n \in A$ και $\chi_A(n) = 0$ αν $n \notin A$. Προφανώς $\chi_A \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ για κάθε $A \subset \mathbb{N}$ δηλαδή $D \subset \ell_\infty(\mathbb{N})$. Επίσης το D είναι υπεραριθμήσιμο γιατί ταυτίζεται με το σύνολο των υποσυνόλων του $\mathbb{N}$.

Αν $\chi_A, \chi_B \in D$ με $A \neq B$, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι $\|\chi_A - \chi_B\|_\infty \geq 1$. Επομένως ο $\ell_\infty(\mathbb{N})$ είναι μη διαχωρίσιμος. $\square$

5.1. Παραδείγματα χώρων Banach. Οι επόμενοι χώροι είναι χώροι Banach.

(1) Οι $\ell_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$.
(2) Ο $c_0(\mathbb{N})$.
(3) Ο $\ell_\infty(\mathbb{N})$.
(4) Ο $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.

Θα αποδείξουμε ότι ο $\ell_1(\mathbb{N})$ είναι χώρος Banach. Η απόδειξη για τους $\ell_p(\mathbb{N})$, $1 < p < \infty$, τον $c_0(\mathbb{N})$ και τον $\ell_\infty(\mathbb{N})$ γίνεται παρόμοια. Η απόδειξη ότι ο $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης (και άρα χώρος Banach) περιέχεται στις σημειώσεις της Πραγματικής Ανάλυσης.

Πρόταση 2.16. *Ο $\ell_1(\mathbb{N})$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη. Έστω $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία Cauchy στον $\ell_1(\mathbb{N})$ (όπου $x_i = (x_i(n))_{n\in\mathbb{N}}$). Έστω $n \in \mathbb{N}$. Ισχύει

$$|x_i(n) - x_j(n)| \leq \|x_i - x_j\|_1 \quad \text{για κάθε } i, j \in \mathbb{N}$$

και άρα η ακολουθία $(x_i(n))_{i\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $\mathbb{R}$ και άρα συγκλίνουσα. Έτσι ορίζεται η συνάρτηση $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $x(n) = \lim_i x_i(n)$. Αρκεί να δείξουμε ότι $x \in \ell_1(\mathbb{N})$ και $\|x_i - x\|_1 \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy έπεται ότι υπάρχει $i_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\|x_i - x_j\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall i, j \geq i_0$$

δηλαδή

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_i(n) - x_j(n)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall i, j \geq i_0.$$

Συνεπώς θα ισχύει

$$\sum_{n=1}^{m} |x_i(n) - x_j(n)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall i, j \geq i_0 \ \ \forall m \in \mathbb{N} \tag{1}$$

οπότε παίρνοντας όριο για $j \to \infty$ στην (1) έχουμε

$$\sum_{n=1}^{m} |x_i(n) - x(n)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall i \geq i_0 \ \ \forall m \in \mathbb{N}\,. \tag{2}$$

Για $m \to \infty$ από την (2) προκύπτει

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_i(n) - x(n)| \leq \frac{\varepsilon}{2} (< \infty) \qquad \forall i \geq i_0 \tag{3}$$

Η (3) έχει δύο συνέπειες. Για $i = i_0$ έπεται ότι $x_{i_0} - x \in \ell_1(\mathbb{N})$ και άρα $x = x_{i_0} - (x_{i_0} - x) \in \ell_1(\mathbb{N})$. Επίσης για κάθε $i \geq i_0$, $\|x_i - x\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Έτσι, αφού για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $i_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $i \geq i_0$ να ισχύει $\|x_i - x\|_1 < \varepsilon$, συμπεραίνουμε ότι $\|x_i - x\|_1 \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Επομένως ο $\ell_1(\mathbb{N})$ είναι πλήρης. $\square$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω X χώρος με νόρμα και $D \subset X$ πυκνό.

(α) Δείξτε ότι το σύνολο $D' = \{\frac{x}{\|x\|} \ : \ x \in D,\ x \neq 0\}$ είναι πυκνό υποσύνολο στη μοναδιαία σφαίρα $S(0,1)$ του X.

(β) Αν $D \subset S(0,1)$ είναι πυκνό υποσύνολο της μοναδιαίας σφαίρας του X δείξτε ότι το σύνολο

$$D' = \{\lambda x : \ x \in D, \ \lambda \in \mathbb{Q}\}$$

είναι πυκνό στον X.

(γ) Δείξτε ότι ένας χώρος με νόρμα X είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν η μοναδιαία σφαίρα $S(0,1)$ του X είναι διαχωρίσιμη.

2. Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα, $D = \{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ ένα πυκνό υποσύνολο του X και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο $B(0,1)$. Δείξτε ότι το σύνολο $D' = \{x_n + \frac{1}{n} y_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.

3. Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach και $\{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ ένα αριθμήσιμο υποσύνολο του X. Δείξτε ότι υπάρχει $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $B(0,1)$ ώστε το σύνολο $\{x_n + \frac{1}{n} y_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Χρησιμοποιώντας την άσκηση 2 δείξτε ότι κάθε διαχωρίσιμος απειροδιάστατος χώρος Banach περιέχει πυκνό γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο. Ισχύει ανάλογο αποτέλεσμα για χώρους Banach πεπερασμένης διάστασης;

4. Δείξτε ότι ο $c_0(\mathbb{N})$ και ο $\ell_\infty(\mathbb{N})$ είναι χώροι Banach.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Συνεχείς (ή φραγμένοι) γραμμικοί τελεστές

1. Ορισμός - ιδιότητες

Οι συνεχείς γραμμικοί τελεστές μεταξύ χώρων με νόρμα είναι από τις σημαντικές συνιστώσες της Συναρτησιακής Ανάλυσης. Αποτελούν αντικείμενα στα οποία συνυπάρχουν οι δύο δομές, δηλαδή η αλγεβρική (γραμμικότητα) και η αναλυτική (συνέχεια). Όπως θα δούμε, αυτή η συνύπαρξη την εφοδιάζει με ισχυρή κανονικότητα, όπως για παράδειγμα, αν ένας γραμμικός τελεστής είναι συνεχής σε ένα σημείο τότε είναι συνεχής παντού. Θα ξεκινήσουμε υπενθυμίζοντας την έννοια της συνέχειας συναρτήσεων μεταξύ μετρικών χώρων.

Ορισμος 3.1. Μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$, όπου (X, ρ) και (Y, d) δυο μετρικοί χώροι, λέγεται συνεχής στο $x_o \in X$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ με $\rho(x_0, x) < \delta$ να ισχύει $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.

Η συνάρτηση f λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in X$.

Θεωρημα 3.2. *Έστω (X, ρ), (Y, d) δύο μετρικοί χώροι και $f : X \longrightarrow Y$ μια συνάρτηση. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(1) *Η f είναι συνεχής.*
(2) *Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X και $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$ ισχύει $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x)$.*
(3) *Αν $V \subset Y$ ανοικτό τότε το $f^{-1}(V) = \{x \in X : \ f(x) \in V\}$ είναι ανοικτό στον X.*
(4) *Αν $K \subset Y$ κλειστό τότε το $f^{-1}(K)$ είναι κλειστό στον X.*

Πριν προχωρήσουμε στα κριτήρια συνέχειας γραμμικών τελεστων, θυμίζουμε ότι ένα υποσύνολο A ενός χώρου με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται *φραγμένο* αν υπάρχει $K > 0$ ώστε $\|x\| \leq K$ για κάθε $x \in A$.

Προταση 3.3 (Χαρακτηρισμοί συνέχειας γραμμικών τελεστών). *Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ χώροι με νόρμα και $T : X \longrightarrow Y$ γραμμικός. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Ο $T : X \longrightarrow Y$ είναι συνεχής.*
(2) *Υπάρχει $x_0 \in X$ και $\delta > 0$ ώστε το σύνολο $T[B(x_0, \delta)]$ να είναι φραγμένο.*
(3) *Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε το σύνολο $T[B(0_X, \delta)]$ να είναι φραγμένο.*
(4) *Το $T[B[0_X, 1]]$ είναι φραγμένο.*
(5) *Υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$ για κάθε $x \in X$.*
(6) *Ο T είναι Lipschitz, δηλαδή υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $\|T(x) - T(z)\|_Y \leq M\|x - z\|_X$ για κάθε $x, z \in X$.*

Πριν δώσουμε την απόδειξη, αξίζει να συζητήσουμε τη σημασία των ισοδυνάμων μορφών της συνέχειας γραμμικών τελεστών. Κατ΄ αρχάς ο ορισμός της συνέχειας είναι δυναμικός. Δηλαδή για να διαπιστώσουμε τη συνέχεια του T στο σημείο x_0 πρέπει να διατρέξουμε όλα τα $\varepsilon > 0$ και για κάθε ένα να βρούμε το αντίστοιχο $\delta > 0$. Η συνθήκη (2) υποστηρίζει ότι στην περίπτωση των γραμμικών τελεστών αρκεί να δείξουμε ότι κάποια μπάλα με κέντρο x_0 έχει φραγμένη εικόνα. Αυτό είναι πολύ πιο απλό να ελεγχθεί. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η συνθήκη (6). Στη γενική περίπτωση των συνεχών συναρτήσεων υπάρχει μια διαβάθμιση που αρχίζει από τη γενικότερη κλάση των συνεχών συναρτήσεων, ακολουθούν οι ομοιόμορφα συνεχείς και ακόμη μικρότερη είναι η κλάση των Lipschitz συναρτήσεων. Στην περίπτωση γραμμικών συναρτήσεων μεταξύ χώρων με νόρμα, η συνέχεια συνεπάγεται ότι ο τελεστής είναι Lipschitz. Με άλλα λόγια δεν υπάρχει συνεχής και όχι Lipschitz γραμμικός τελεστής.

Απόδειξη της Πρότασης. (1) $\Rightarrow$ (2) Αν ο τελεστής είναι συνεχής και $x_0 \in X$, για $\varepsilon = 1$ θα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $T[B(x_0,\delta)] \subset B(T(x_0),1)$. Είναι άμεσο ότι το σύνολο $B(T(x_0),1)$ είναι φραγμένο. (Για κάθε $y \in B(T(x_0),1)$, $\|y\|_Y - \|T(x_0)\|_Y \leq \|y - T(x_0)\|_Y < 1$ και άρα $\|y\|_Y < 1 + \|T(x_0)\|_Y$.) Επομένως το $T[B(x_0,\delta)]$ είναι φραγμένο.

(2) $\Rightarrow$ (3) Επειδή, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, $B(x_0,\delta) = x_0 + B(0_X,\delta)$, έχουμε $T[B(x_0,\delta)] = T[x_0 + B(0_X,\delta)] = T(x_0) + T[B(0_X,\delta)]$ και άρα $T[B(0_X,\delta)] = (-T(x_0)) + T[B(x_0,\delta)]$. Έστω τώρα $K > 0$ ώστε $\|y\| \leq K$ για κάθε $y \in T[B(x_0,\delta)]$. Με χρήση της τριγωνικής ανισότητας προκύπτει ότι για κάθε $y \in T[B(0_X,\delta)]$ ισχύει $\|y\| \leq \|T(x_0)\| + K$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Έστω $K > 0$ ώστε αν $x \in X$ με $\|x\|_X < \delta$ να ισχύει $\|T(x)\|_Y \leq K$. Θεωρούμε τώρα τυχαίο $x \in X$ με $\|x\|_X \leq 1$. Είναι $\|\frac{\delta}{2}x\|_X = \frac{\delta}{2}\|x\|_X \leq \frac{\delta}{2} < \delta$ και άρα $\|T(\frac{\delta}{2}x)\|_Y \leq K$. Από τη γραμμικότητα του T προκύπτει ότι $\|\frac{\delta}{2}T(x)\|_Y \leq K$, άρα $\frac{\delta}{2}\|T(x)\|_Y \leq K$, συνεπώς $\|T(x)\|_Y \leq \frac{2K}{\delta}$. Επομένως για κάθε $y \in T[B[0_X,1]]$ έχουμε $\|y\|_Y \leq \frac{2K}{\delta}$.

(4) $\Rightarrow$ (5) Έστω $M > 0$ ώστε $\|Tz\| \leq M$ για κάθε $z \in T[B[0_X,1]]$ και έστω $x \in X$. Αν $x = 0_X$ τότε $T(0_X) = 0_Y$ και άρα $\|T(0_X)\|_Y = 0 = M\|0_X\|_X$. Αν $x \neq 0_X$ τότε $\|\frac{x}{\|x\|_X}\|_X = 1$ άρα $\|T(\frac{x}{\|x\|_X})\|_Y \leq M$ συνεπώς $\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$.

(5) $\Rightarrow$ (6) Αν $x,z \in X$ από τη γραμμικότητα του T και την (5) προκύπτει ότι $\|T(x) - T(z)\|_Y = \|T(x-z)\|_Y \leq M\|x-z\|_X$.

(6) $\Rightarrow$ (1) Είναι άμεσο από το ότι οι Lipschitz συναρτήσεις είναι συνεχείς. $\square$

Παρατήρηση:

Μια συνέπεια της συνθήκης (5) είναι ότι ο συνεχής γραμμικός τελεστής απεικονίζει φραγμένα υποσύνολα του X σε φραγμένα υποσύνολα του Y και αυτό βεβαίως, όπως αποδείξαμε, είναι ισοδύναμο με τη συνέχεια. Στη βιβλιογραφία οι συνεχείς γραμμικοί τελεστές αναφέρονται σαν *φραγμένοι* γραμμικοί τελεστές και το σύνολο των φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον X στον Y συμβολίζεται με $\mathcal{B}(X,Y)$.

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι ο χώρος $\mathcal{L}(X,Y)$ των γραμμικών τελεστών μεταξύ διανυσματικών χώρων είναι επίσης διανυσματικός χώρος με τις προφανείς πράξεις. Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι στην περίπτωση χώρων με νόρμα ο $\mathcal{B}(X,Y)$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{L}(X,Y)$.

Πρόταση 3.4. *Έστω $(X,\|\cdot\|)$, $(Y,\|\cdot\|)$ χώροι με νόρμα. Αν οι $T,S : X \longrightarrow Y$ είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε οι $T+S$ και λT είναι επίσης φραγμένοι.*

Απόδειξη. Από την προηγούμενη πρόταση υπάρχουν $M_1, M_2 > 0$ ώστε $\|T(x)\| \leq M_1\|x\|$ και $\|S(x)\| \leq M_2\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Έπεται ότι $\|(T+S)(x)\| = \|T(x) + S(x)\| \leq \|T(x)\| + \|S(x)\| \leq M_1\|x\| + M_2\|x\| = (M_1+M_2)\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Ομοίως $\|(\lambda T)(x)\| \leq |\lambda| M_1\|x\|$ για κάθε $x \in X$. $\square$

Πορισμα 3.5. *Ο $\mathcal{B}(X,Y)$ είναι διανυσματικός χώρος.*

Αποδειξη. Άμεση από την προηγούμενη πρόταση. $\square$

2. Η νόρμα στο χώρο $\mathcal{B}(X,Y)$

Ο χώρος $\mathcal{B}(X,Y)$ εκτός από το ότι είναι διανυσματικός χώρος δέχεται και μία νόρμα που ορίζεται φυσιολογικά δεδομένου ότι είναι χώρος συναρτήσεων. Ας θυμήσουμε ότι αν K είναι συμπαγής μετρικός χώρος και $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής τότε ορίζουμε $\|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in K\}$ και είναι $\|f\| \in \mathbb{R}$ διότι οι συνεχείς συναρτήσεις σε συμπαγή μετρικό χώρο είναι φραγμένες. Αν τώρα $T : X \longrightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής και $T \neq 0$ τότε $\sup\{\|T(x)\|_Y : x \in X\} = \infty$ αλλά $\sup\{\|T(x)\|_Y : \|x\| \leq 1\} < \infty$ άρα μπορούμε να ορίσουμε
$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_Y : \|x\| \leq 1\}.$$

Προταση 3.6. *Η συνάρτηση $\|\cdot\| : \mathcal{B}(X,Y) \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι νόρμα στον $\mathcal{B}(X,Y)$.*

Αποδειξη. Εύκολη. $\square$

Προταση 3.7. *Αν X,Y χώροι με νόρμα και $T : X \longrightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής τότε*

(i) $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ *για κάθε* $x \in X$.
(ii) $\|T\| = \inf\{M > 0 : \|T(x)\| \leq M \cdot \|x\| \ \forall x \in X\}$.

Αποδειξη. Εύκολη. $\square$

Προταση 3.8. *Αν X,Y,Z χώροι με νόρμα και $T : X \longrightarrow Y$, $S : Y \longrightarrow Z$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Τότε η σύνθεση $S \circ T : X \longrightarrow Z$ των T και S είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.*

Αποδειξη. Για κάθε $x \in X$ είναι $\|(S \circ T)(x)\| = \|S(T(x))\| \leq \|S\| \cdot \|T(x)\| \leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|$. Επομένως ο $S \circ T$ είναι φραγμένος τελεστής με $\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$. $\square$

Θεωρημα 3.9. *Έστω X χώρος με νόρμα και Y χώρος Banach. Τότε ο χώρος $\mathcal{B}(X,Y)$ με τη νόρμα που έχουμε ορίσει είναι χώρος Banach.*

Αποδειξη. Έστω $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία Cauchy στον $\mathcal{B}(X,Y)$. Δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$ να ισχύει $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $T : X \longrightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής ώστε $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$.

Ας παρατηρήσουμε κατ΄ αρχήν ότι για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στον Y. Πράγματι για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|$ από όπου προκύπτει ότι η ακολουθία $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ικανοποιεί το ζητούμενο. Επειδή ο Y είναι χώρος Banach έπεται ότι για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα στον Y. Θέτουμε $T : X \longrightarrow Y$ με $T(x) = \lim\limits_n T_n(x)$.

Ο T είναι γραμμικός. Πράγματι αν $x, y \in X$ τότε $T(x+y) = \lim\limits_n T_n(x+y) = \lim\limits_n T_n(x) + \lim\limits_n T_n(y) = T(x) + T(y)$ και όμοια δείχνεται ότι αν $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $T(\lambda x) = \lambda T(x)$. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι ο T είναι φραγμένος. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $\mathcal{B}(X,Y)$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$ να ισχύει $\|T_n - T_m\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ και άρα
$$\|T_n(x) - T_m(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in X,\ \|x\| \leq 1,\ \ \forall n, m \geq n_0.$$

Παίρνοντας όριο για $m \to \infty$ προκύπτει ότι

$$\|T_n(x) - T(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in X,\ \|x\| \leq 1,\ \ \forall n \geq n_0. \tag{1}$$

Η (1) για $n = n_0$ δίνει ότι $T_{n_0} - T \in \mathcal{B}(X,Y)$ και άρα $T = T_{n_0} - (T_{n_0} - T) \in \mathcal{B}(X,Y)$ δηλαδή ο T είναι φραγμένος. Επίσης, πάλι η σχέση (1) δίνει ότι $\|T_n - T\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Έτσι αφού για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\|T_n - T\| < \varepsilon$ συμπεραίνουμε ότι $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$. □

Οι ομοιόμορφα συνεχείς, και άρα οι Lipschitz συναρτήσεις, ικανοποιούν την ακόλουθη ιδιότητα επέκτασης. Αν (X,ρ) είναι μετρικός χώρος, (Y,d) πλήρης μετρικός χώρος, $D \subset X$ πυκνό, και $f : D \longrightarrow Y$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση τότε υπάρχει μοναδική $\tilde{f} : X \longrightarrow Y$ ομοιόμορφα συνεχής ώστε $\tilde{f}_{|D} = f$. Θα δείξουμε την ανάλογη ιδιότητα για φραγμένους γραμμικούς τελεστές.

Θεωρημα 3.10. *Έστω X χώρος με νόρμα, Z ένας πυκνός υπόχωρος του X και Y ένας χώρος Banach. Τότε κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : Z \longrightarrow Y$ επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε ένα φραγμένο γραμμικό τελεστή $\tilde{T} : X \longrightarrow Y$. Επιπλέον θα ισχυει $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.*

Αποδειξη. Η μοναδικότητα του $\tilde{T}$ είναι συνέπεια της πυκνότητας του Z στον X και της συνέχειας του $\tilde{T}$. Πράγματι, είναι γνωστό και εύκολο να δειχθεί ότι αν δυο συνεχείς συναρτήσεις $f, g : X \longrightarrow Y$ ταυτίζονται σε ένα πυκνό υποσύνολο του X τότε είναι ίσες παντού. Η βασική ιδιότητα που μας επιτρέπει να ορίσουμε τον $\tilde{T}$ είναι η ακόλουθη: Αν $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια βασική ακολουθία στον Z τότε η $(T(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι επίσης βασική. Αυτή διαπιστώνεται εύκολα λόγω της Lipschitz ιδιότητας του T, αλλά ισχύει γενικότερα για ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Με βάση τα παραπάνω ορίζουμε $\tilde{T} : X \longrightarrow Y$ ως εξής: $\tilde{T}(z) = T(z)$ για κάθε $z \in Z$ ενώ αν $x \in X \setminus Z$ επιλέγουμε ακοουθία $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον Z με $z_n \to x$ και ορίζουμε $\tilde{T}(x) = \lim T(z_n)$ (το όριο υπάρχει επειδή ο Y είναι χώρος Banach και η $(T(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία).

Για να είναι ο $\tilde{T}$ καλά ορισμένος πρέπει να δείξουμε ότι η $\tilde{T}(x)$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της $z_n \to x$. Πράγματι, αν $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια άλλη ακολουθία στο X με $y_n \to x$ τότε, όπως είδαμε προγουμένως η $(T(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία στον Y. Πρέπει να δείξουμε ότι $\lim T(z_n) = \lim T(y_n)$. Η ακολουθία $(z_1, y_1, z_2, y_2, \ldots, z_n, y_n, \ldots)$ είναι επίσης ακολουθία του X που συγκλίνει στο x και άρα η εικόνα της μέσω του T θα είναι συγκλίνουσα ακολουθία στον Y. Οι $(T(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ και $(T(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι δυο υπακολουθίες αυτής και άρα συγκλίνουν στο ίδιο όριο με αυτή, συνεπώς έχουν κοινό όριο.

Η γραμμικότητα αποδεικνύεται εύκολα. Τέλος, επειδή ο Z είναι πυκνός υπόχωρος του X, η $B_Z[0,1]$ είναι πυκνή στην $B_X[0,1]$. Θεωρώντας $x \in B_X[0,1]$ υπάρχει ακολουθία $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στη $B_Z[0,1]$ ώστε $z_n \to x$. Είναι $\tilde{T}(x) = \lim T(z_n)$ άρα $\|\tilde{T}(x)\| = \lim \|T(z_n)\|$ (λόγω της συνέχειας της νόρμας) και εφόσον για κάθε n είναι $\|T(z_n)\| \leq \|T\|$ έπεται ότι $\|\tilde{T}(x)\| \leq \|T\|$. Συνεπώς ο $\tilde{T}$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. Η αντίστροφη ανισότητα $\|\tilde{T}\| \geq \|T\|$ είναι προφανής από το γεγονός ότι $B_Z[0,1] \subset B_X[0,1]$. Επομένως $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. □

Πορισμα 3.11. *Αν X, Y, Z όπως στο προηγούμενο θεώρημα τότε η απεικόνιση*

$$I : \mathcal{B}(Z,Y) \longrightarrow \mathcal{B}(X,Y)$$

που αντιστοιχεί σε κάθε συνεχή $T : Z \longrightarrow Y$ τη μοναδική συνεχή του επέκταση $\widetilde{T} : X \longrightarrow Y$ είναι γραμμική ισομετρία.

Απόδειξη. Είναι άμεση από το προηγούμενο θεώρημα. $\square$

3. Γραμμικά συναρτησοειδή και ο X^*

Με τον όρο γραμμικό συναρτησοειδές εννοούμε τις γραμμικές απεικονίσεις $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ όπου X είναι διανυσματικός χώρος. Αν X χώρος με νόρμα τα φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή του X (δηλ. οι συνεχείς γραμμικές συναρτήσεις $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$) παρουσιάζουν κάποιες ιδιαιτερότητες ενώ ο $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ λέγεται συζυγής η δυϊκός του X και έχει δομή που συναρτάται με τη δομή του X. Θα αρχίσουμε τη μελέτη των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών με κάποιες αλγεβρικές ιδιότητές τους.

Πρόταση 3.12. *Έστω X διανυσματικός χώρος και Y, Z υπόχωροι του X ώστε $Y \cap Z = \{0\}$. Τότε κάθε $x \in <Y \cup Z>$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $x = y + z$ με $y \in Y$ και $z \in Z$.*

Ειδικότερα, αν Y είναι υπόχωρος του X και $x \in X \setminus Y$ τότε κάθε $x' \in <Y \cup \{x\}>$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $x' = y + \lambda x$ με $y \in Y$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έστω $x \in <Y \cup Z>$. Το x γράφεται στη μορφή $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$ ως γραμμικός συνδυασμός του συνόλου $\{w_i : \ i = 1, \ldots, n\} \subset Y \cup Z$. Άρα $\{1, \ldots, n\} = I_1 \cup I_2$ όπου $i \in I_1$ ανν $w_i \in Y$ και $i \in I_2$ διαφορετικά (οπότε $w_i \in Z$). Θέτουμε $y = \sum\limits_{i \in I_1} \lambda_i w_i$ και $z = \sum\limits_{i \in I_2} \lambda_i w_i$. Επειδή οι Y, Z είναι υπόχωροι του X συμπεραίνουμε ότι $y \in Y$ και $z \in Z$ ενώ προφανώς $x = y + z$. Άρα κάθε $x \in <Y \cup Z>$ γράφεται ως $x = y + z$ με $y \in Y$ και $z \in Z$. Δείχνουμε τώρα τη μοναδικότητα. Έστω ότι το $x \in <Y \cup Z>$ έχει δύο τέτοιες αναπαραστάσεις, δηλαδή $x = y + z = y' + z'$ με $y, y' \in Y$ και $z, z' \in Z$. Τότε $y - y' = z' - z$ με $y - y' \in Y$ και $z' - z \in Z$ και δεδομένου ότι $Y \cap Z = \{0\}$ συμπεραίνουμε ότι $y - y' = z' - z = 0$ και άρα $y = y'$ και $z = z'$ δηλαδή η αναπαράσταση του x είναι μοναδική.

Το δεύτερο μέρος της Πρότασης είναι άμεση συνέπεια του πρώτου. Πράγματι, για $x \in X \setminus Y$, θέτοντας $Z = <\{x\}> = \{\lambda x : \ \lambda \in \mathbb{R}\}$ έχουμε ότι $Y \cap Z = \{0\}$ και $<Y \cup Z> = <Y \cup \{x\}>$. Άρα κάθε $x' \in <Y \cup \{x\}>$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $x' = y + \lambda x$ με $y \in Y$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Ορισμός 3.13. (α) Ένας υπόχωρος Y του X λέγεται *πεπερασμένης συνδιάστασης* αν υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ ώστε $X = <Y \cup \{x_1, \ldots, x_n\}>$.
(β) Ένας υπόχωρος Y του X λέγεται *συνδιάστασης 1* αν $Y \neq X$ και υπάρχει ένα $x \in X$ ώστε $X = <Y \cup \{x\}>$.
(γ) Ένας υπόχωρος Y του X λέγεται συνδιάστασης n, n φυσικός αριθμός, αν υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n$ στον X ώστε $<Y \cup \{x_1, \ldots, x_n\}> = X$, και n είναι ο μικρότερος φυσικός με αυτή την ιδιότητα.

Παρατήρηση: Αν ένας διανυσματικός χώρος είναι πεπερασμένης διάστασης τότε προφανώς κάθε υπόχωρός του είναι πεπερασμένης διάστασης. Οι υπόχωροι συνδιάστασης 1 είναι οι μέγιστοι γνήσιοι υπόχωροι. Έτσι για παράδειγμα οι υπόχωροι συνδιάστασης 1 του $\mathbb{R}^3$ είναι τα επίπεδα που περιέχουν το 0. Αν Y είναι συνδιάστασης 1 υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και $x \in \mathbb{R}^3$ τότε το σύνολο $x + Y = \{x + y : \ y \in Y\}$ προσδιορίζει το μοναδικό επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ που είναι παράλληλο προς το Y και διέρχεται από το x.

Ορισμος 3.14. Ένα υποσύνολο W ενός διανυσματικού χώρου X λέγεται *υπερεπίπεδο* αν $W = x + Y$ όπου $x \in X$ και Y είναι συνδιάστασης 1 υπόχωρος του X.

Προφανώς οι υπόχωροι συνδιάστασης 1 είναι υπερεπίπεδα. Η επόμενη πρόταση προσδιορίζει τη σχέση των υπερεπιπέδων με τα γραμμικά συναρτησοειδή.

Προταση 3.15. *Έστω X διανυσματικός χώρος. Τότε*

(i) *Αν $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ γραμμική με $f \neq 0$ τότε ο $\operatorname{Ker} f$ είναι συνδιάστασης 1.*
(ii) *Ένα $W \subset X$ είναι υπερεπίπεδο αν και μόνο αν υπάρχει $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ γραμμική με $f \neq 0$ και $t \in \mathbb{R}$ ώστε $W = f^{-1}(\{t\})$.*
(iii) *Αν $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ γραμμικά συναρτησοειδή τότε $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$ αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ ώστε $f = \lambda g$.*

Αποδειξη. (i) Επειδή η f είναι γραμμική ο $\operatorname{Ker} f = \{x \in X : \ f(x) = 0\}$ είναι υπόχωρος του X και $\operatorname{Ker} f \neq X$ διότι $f \neq 0$. Επιλέγουμε $x \in X$ ώστε $f(x) = 1$ (παρατηρείστε ότι αν $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ γραμμική με $f \neq 0$ τότε υποχεωτικά η f είναι επί). Θα δείξουμε ότι για κάθε $y \in X$ υπάρχουν $z \in \operatorname{Ker} f$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $y = \lambda x + z$ το οποίο συνεπάγεται ότι ο $\operatorname{Ker} f$ είναι συνδιάστασης 1. Πράγματι, αν $\lambda = f(y) \in \mathbb{R}$ τότε $f(y - \lambda x) = f(y) - \lambda f(x) = \lambda - \lambda 1 = 0$ άρα $y - \lambda x \in \operatorname{Ker} f$ συνεπώς, αφού $y = \lambda x + (y - \lambda x)$ το ζητούμενο έχει δειχθεί.

(ii) Αν $W \subset X$ είναι υπερεπίπεδο τότε $W = x + Y$ με Y υπόχωρο συνδιάστασης 1. Αν $x \notin Y$ ορίζουμε $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(\lambda x + y) = \lambda$ και παρατηρούμε ότι η f είναι καλά ορισμένη, γραμμική, $f \neq 0$ και $W = f^{-1}(\{1\})$. Αν $x \in Y$ τότε $W = Y$ οπότε επιλέγοντας τυχαίο $z \in X \setminus Y$ και ορίζοντας $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(\lambda z + y) = \lambda$, η f είναι γραμμική και $W = f^{-1}(\{0\})$.

(iii) Αν $f = \lambda g$ με $\lambda \neq 0$ τότε $f(x) = 0$ αν και μόνο αν $g(x) = 0$, άρα $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$. Αντίστροφα, έστω ότι $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$. Αν $\operatorname{Ker} g = X$ τότε $f = g = 0$ και άρα έχουμε το συμπέρασμα. Αν όχι, επιλέγουμε $x \in X$ ώστε $g(x) = 1$. Προφανώς $x \notin \operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f$ και άρα $f(x) = \lambda \neq 0$. Τότε κάθε $z \in X$ γράφεται $z = y + \mu x$ με $y \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f$ και $\mu \in \mathbb{R}$ και άρα

$$f(z) = \mu f(x) + f(y) = \mu \lambda = \lambda g(\mu x + y) = \lambda g(z)$$

επομένως $f = \lambda g$. $\square$

Το περιεχόμενο της προηγούμενης πρότασης είναι η πολύ καλή αντιστοιχία μεταξύ υπερεπιπέδων και γραμμικών συναρτησοειδών. Με την επόμενη πρόταση δίνουμε δύο επιπλέον κριτήρια για τη συνέχεια γραμμικών συναρτησοειδών που ορίζονται σε χώρους με νόρμα.

Προταση 3.16 (Κριτήρια συνέχειας συναρτησοειδών με υπερεπίπεδα). *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $f : X \longrightarrow R$, $f \neq 0$ ένα γραμμικό συναρτησοειδές. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Το f είναι φραγμένο (δηλαδή συνεχές).*
(2) *Το $\operatorname{Ker} f$ είναι κλειστό.*
(3) *Το $\operatorname{Ker} f$ δεν είναι πυκνό στο X.*

Αποδειξη. (1) $\Rightarrow$ (2) Προφανές διότι η f, ως συνεχής, αντιστρέφει κλειστά σε κλειστά και $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0\})$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Αφού $f \neq 0$ είναι $\operatorname{Ker} f \neq X$ και άρα αν το $\operatorname{Ker} f$ είναι κλειστό τότε δεν είναι πυκνό.

$(3) \Rightarrow (1)$ Έστω f ένα γραμμικό συναρτησοειδές ώστε το $\operatorname{Ker} f$ να μην είναι πυκνό. Θα υπάρχει $x \in X$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \cap \operatorname{Ker} f = \emptyset$ δηλαδή $(x + B(0,\varepsilon)) \cap f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ άρα $0 \notin f(x + B(0,\varepsilon)) = f(x) + f(B(0,\varepsilon))$ συνεπώς $-f(x) \notin f(B(0,\varepsilon))$. Υποθέτουμε ότι το f δεν είναι φραγμένο. Από την Πρόταση 3.3 έπεται ότι το σύνολο $f[B(0,\varepsilon)]$ δεν είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Επειδή το $B(0,\varepsilon)$ είναι κυρτό και συμμετρικό υποσύνολο του X (και τα δύο αποδεικνύονται εύκολα) και η f είναι γραμμική, το $f[B(0,\varepsilon)]$ θα είναι κυρτό και συμμετρικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ δηλαδή συμμετρικό διάστημα του $\mathbb{R}$. Συνεπώς, αφού το $f[B(0,\varepsilon)]$ είναι μη φραγμένο υποχρεωτικά $f[B(0,\varepsilon)] = \mathbb{R}$, άτοπο διότι $-f(x) \notin f(B(0,\varepsilon))$. □

Πορισμα 3.17. *Έστω Y υπόχωρος συνδιάστασης 1 ενός χώρου με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$. Τότε ένα από τα ακολουθά ισχύει αποκλειστικά.*

(1) *Ο Y κλειστός υπόχωρος.*
(2) *Ο Y πυκνός υπόχωρος.*

Αποδειξη. Έστω $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές ώστε $\operatorname{Ker} f = Y$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις. Η πρώτη είναι το f να είναι φραγμένο από όπου συνάγεται ότι ο Y είναι κλειστός υπόχωρος. Η δεύτερη περίπτωση είναι το f να μην είναι φραγμένο, οπότε από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι ο $Y = \operatorname{Ker} f$ είναι πυκνός υπόχωρος. □

Παρατηρήσεις:

1) Κατ΄ αρχήν το συμπέρασμα του προηγούμενου πορίσματος δείχνει ότι οι υπόχωροι συνδιάστασης 1 έχουν μια ιδιόμορφη συμπεριφορά. Το ότι είναι είτε κλειστοί ή διαφορετικά πυκνοί αφορά αποκλειστικά αυτούς και δεν επεκτείνεται σε άλλες κλάσεις υποχώρων (π.χ. υπόχωροι συνδιάστασης 2).
2) Η απόδειξη αυτής της ιδιότητας, η οποία είναι ιδιότητα της δομής του X επιτυγχάνεται με χρήση γραμμικών συναρτησοειδών και αποτελεί ένα παράδειγμα όπου οι συναρτήσεις που δρουν σε ένα χώρο μπορούν να δώσουν πληροφορία για τη δομή του χώρου.

Ορισμος 3.18. Έστω X χώρος με νόρμα. Ο *δυϊκός* ή *συζυγής* του X συμβολίζεται με X^* και είναι ο χώρος $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών του X.

Όπως έχουμε αναφέρει ο X^* είναι υπόχωρος του αλγεβρικού δυϊκού $X^\sharp = \mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ του X και επειδή ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης ο X^* με τη νόρμα που έχουμε ορίσει είναι χώρος Banach ανεξάρτητα αν ο X είναι πλήρης ή μη πλήρης (Θεώρημα 3.9).

Προταση 3.19. *Αν X είναι πεπερασμένης διάστασης χώρος με νόρμα τότε κάθε γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι φραγμένο.*

Αποδειξη. Από το Πόρισμα 2.10 έπεται ότι κάθε υπόχωρος του X είναι κλειστός, άρα το $\operatorname{Ker} f$ είναι κλειστός υπόχωρος του X, επομένως το f είναι φραγμένο. □

Πορισμα 3.20. *Αν ο X είναι πεπερασμένης διάστασης χώρος με νόρμα τότε ο αλγεβρικός δυϊκός $X^\sharp$ και ο δυϊκός X^* του X ταυτίζονται.*

Αποδειξη. Άμεση από την προηγούμενη πρόταση. □

Προταση 3.21. *Αν ο X είναι απειροδιάστατος χώρος με νόρμα τότε υπάρχει $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ γραμμικό και μη φραγμένο συναρτησοειδές. Άρα για X απειροδιάστατο χώρο με νόρμα ο X^* είναι γνήσιος υπόχωρος του $X^\sharp$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{D}$ μια Hamel βάση του X. Είναι εύκολο να δούμε ότι αν $\mathcal{D}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο τότε το σύνολο $\mathcal{D}' = \{\frac{x}{\|x\|} : x \in \mathcal{D}\}$ παραμένει γραμμικά ανεξάρτητο, άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάθε $x \in \mathcal{D}$ είναι $\|x\| = 1$. Επειδή το $\mathcal{D}$ είναι απειροσύνολο μπορούμε να επιλέξουμε μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από διαφορετικά ανά δύο στοιχεία του $\mathcal{D}$. Ορίζουμε $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $g(x_n) = n$ για $n = 1, 2\ldots$ και $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathcal{D} \setminus \{x_1, x_2, \ldots\}$. Όπως έχουμε δείξει (Πρόταση 1.14) υπάρχει $f_g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές ώστε $f_g(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{D}$. Προφανώς το f_g δεν είναι φραγμένο διότι $\sup\limits_{x\in B[0,1]} |f_g(x)| \geq \sup\limits_{n} |f_g(x_n)| = \sup\limits_{n} n = +\infty$. □

Όπως έχουμε προαναφέρει το $\operatorname{Ker} f_g$ είναι πυκνός υπόχωρος συνδιάστασης 1. Τα δύο προηγούμενα αποτελέσματα δείχνουν ότι ένας χώρος με νόρμα είναι πεπερσμένης διάστασης αν και μόνο αν $X^* = X^\sharp$.

4. Ισομορφισμοί και Ισομετρίες χώρων με νόρμα

Ένα από τα βασικά προβλήματα των μαθηματικών είναι η ταξινόμηση των αντικειμένων που συνιστούν τις διάφορες θεωρίες. Με τον όρο "ταξινόμηση" εννοούμε ταυτοποίηση μελών μιας θεωρίας η οποία είναι ευρύτερη της ισότητας. Το σύνηθες εργαλείο ταξινομήσεων είναι οι συναρτήσεις. Ένα απλό παράδειγμα είναι η πληθικότητα των συνόλων. Έτσι τα σύνολα $\mathbb{N}$ των φυσικών και $\mathbb{Q}$ των ρητών έχουν την ίδια πληθικότητα, άρα ανήκουν στην ίδια κλάση συνόλων, χωρίς βέβαια να ταυτίζονται πλήρως (π.χ. ως προς τη διάταξη είναι διαφορετικά μεταξύ τους). Έχουμε επίσης δει ότι οι διανυσματικοί χώροι ταξινομούνται με βάση τη διάστασή τους. Οι ισομορφισμοί και οι ισομετρίες ταξινομούν τους χώρους με νόρμα.

Ορισμός 3.22. Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ χώροι με νόρμα.
(α) Οι X, Y λέγονται *ισόμορφοι* αν υπάρχει $T : X \longrightarrow Y$ γραμμικός 1-1 και επί τελεστής ώστε οι T και T^{-1} να είναι φραγμένοι. (Ο τελεστής T λέγεται σε αυτή την περίπτωση *ισομορφισμός*.)
(β) Οι X, Y λέγονται *ισομετρικοί* αν υπάρχει $T : X \longrightarrow Y$ γραμμικός 1-1 και επί τελεστής ώστε $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$ για κάθε $x \in X$. (Ο τελεστής T λέγεται σε αυτή την περίπτωση *ισομετρία*.)

Είναι εύκολο να δούμε ότι οι ισομετρίες είναι ισομορφισμοί διότι $T[B(0_X, 1)] = B(0_Y, 1)$. Άρα οι T, T^{-1} είναι φραγμένοι τελεστές.

Επίσης αν X, Y, Z είναι χώροι με νόρμα ώστε ο X είναι ισόμορφος (αντ. ισομετρικός) με τον Y και ο Y είναι ισόμορφος (αντ. ισομετρικός) με τον Z τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι ο X είναι ισόμορφος (αντ. ισομετρικός) με τον Z. Δεδομένου ότι κάθε χώρος X είναι ισομετρικός με τον εαυτό του και ότι αν ο X είναι ισόμορφος (αντ. ισομετρικός) με τον Y τότε ο Y είναι ισόμορφος (αντ. ισομετρικός) με τον X συμπεραίνουμε ότι οι σχέσεις "X ισόμορφος του Y" και "X ισομετρικός του Y" είναι σχέσεις ισοδυναμίας στην κλάση των χώρων με νόρμα.

Πρόταση 3.23. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \longrightarrow Y$ γραμμικός 1-1 και επί. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

(1) *Ο T είναι ισομορφισμός.*
(2) *Υπάρχουν θετικοί c, C ώστε*

$$c\|x\|_X \leq \|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$$

για κάθε $x \in X$.

Αποδειξη. (1)$\Rightarrow$ (2) Επειδή ο $T : X \longrightarrow Y$ είναι φραγμένος έπεται ότι υπάρχει $C > 0$ ώστε $\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$ για κάθε $x \in X$. Επίσης, επειδή ο T^{-1} είναι φραγμένος έπεται ότι υπάρχει $C' > 0$ ώστε $\|T^{-1}(y)\|_X \leq C'\|y\|_Y$ για κάθε $y \in Y$. Άρα για κάθε $x \in X$ είναι $\|T^{-1}(T(x)))\|_X \leq C'\|T(x)\|_Y$ δηλαδή $\|x\|_X \leq C'\|T(x)\|_Y$. Έτσι, θέτοντας $c = \dfrac{1}{C'}$ έχουμε ότι $c\|x\|_X \leq \|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$ για κάθε $x \in X$.

(2)$\Rightarrow$ (1) Από τη σχέση $\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$ προκύπτει ότι ο T είναι φραγμένος. Από τη σχέση $c\|x\|_X \leq \|T(x)\|_Y$ προκύπτει ότι $\|T^{-1}(y)\|_X \leq \dfrac{1}{c}\|y\|_Y$ για κάθε $y \in Y$ και άρα ο T^{-1} είναι φραγμένος. □

Παρατήρηση: Η προηγούμενη πρόταση προσδιορίζει τη διαφορά μεταξύ ισομορφισμού και ισομετρίας των χώρων X και Y. Πράγματι, η ισομετρία απεικονίζει τη μοναδιαία σφαίρα του X στη μοναδιαία σφαίρα του Y. Αυτό σημαίνει διατηρεί πλήρως τη γεωμετρία των χώρων. Ο ισομορφισμός απεικονίζει κάθε $x \in X$ με $\|x\| = 1$ στο $T(x) \in Y$ που ικανοποιεί τη σχέση $c \leq \|T(x)\| \leq C$. Δηλαδή απεικονίζει τη μοναδιαία σφαίρα του X σε ένα χωρίο που είναι ''μακριά'' από το μηδέν και από το άπειρο. Ο ισομορφισμός δεν διατηρεί τη γεωμετρία αλλά διατηρεί την αναλυτική (τοπολογική) δομή των χώρων. Όπως θα δούμε αμέσως μετά, αν οι X και Y είναι πεπερασμένης διάστασης χώροι με νόρμα και $\dim X = \dim Y$ τότε είναι ισόμορφοι. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν χώροι με νόρμα που είναι ισόμορφοι και όχι ισομετρικοί. Για παράδειγμα οι $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ δεν είναι ισομετρικοί. (Παρατηρήστε ότι η $S(0,1)$ στον $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ έχει ευθύγραμμα τμήματα που διατηρούνται από γραμμικές απεικονίσεις, άρα δεν μπορεί να ταυτιστεί μέσω γραμμικής απεικόνισης με την $S(0,1)$ του $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ που είναι ο μοναδιαίος κύκλος.)

5. Η αυτόματη συνέχεια γραμμικών τελεστών σε χώρους πεπερασμένης διάστασης

Έχουμε δείξει ότι αν ο X είναι πεπερασμένης διάστασης χώρος με νόρμα τότε ο X είναι πλήρης. Θα δώσουμε μια διαφορετική απόδειξη αυτού του αποτελέσματος χρησιμοποιώντας τα γραμμικά συναρτησοειδή.

Προταση 3.24. *Κάθε χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ πεπερασμένης διάστασης είναι πλήρης.*

Αποδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στη διάσταση του X. Αν $\dim X = 1$ ο X είναι ισομετρικός του $\mathbb{R}$ άρα πλήρης. Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα ισχύει για χώρους διάστασης k και θεωρούμε χώρο με νόρμα X με $\dim X = k+1$. Έστω $(e_i)_{i=1}^{k+1}$ μια Hamel βάση του X με $\|e_i\| = 1$. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία Cauchy του X. Για κάθε n, έστω $x_n = \lambda_1^n e_1^n + \cdots + \lambda_{k+1}^n e_{k+1}^n$. Θα δείξουμε ότι για $1 \leq i \leq k+1$ η ακολουθία $(\lambda_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στο $\mathbb{R}$ και άρα συγκλίνουσα. Ορίζουμε $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(\sum\limits_{j=1}^{k+1} r_j e_j) = r_j$. Η f είναι γραμμική και ο υπόχωρος $\operatorname{Ker} f_i =< e_j : \ j \neq i >$ έχει διάσταση k. Από επαγωγική υπόθεση, ο $\operatorname{Ker} f_i$ είναι πλήρης άρα κλειστός υπόχωρος του X, συνεπώς η f_i είναι φραγμένη (συνεχής). Επειδή η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική και $f_i(x_n) = \lambda_i^n$ έπεται ότι η $(\lambda_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στο $\mathbb{R}$. Το υπόλοιπο της απόδειξης έχει δοθεί στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.9. □

Λημμα 3.25. *Έστω X χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης και $(e_i)_{i=1}^n$ μια Hamel βάση του X. Τότε υπάρχει $M > 0$, που εξαρτάται από τη νόρμα και τη βάση, ώστε* *για κάθε* $x \in X$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ *με* $\|x\| \leq 1$ *να ισχύει*

$$\max\{|\lambda_i| : \ i = 1, \dots, n\} \leq M.$$

Απόδειξη. Για κάθε $i = 1, \dots, n$ ορίζουμε $f_i(\sum\limits_{j=1}^{n} r_j e_j) = r_i$. Όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη απόδειξη κάθε f_i είναι γραμμική και φραγμένη. Θέτουμε $M = \max\{\|f_i\| : i = 1, \dots, n\}$.

Αν τώρα $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ με $\|x\| \leq 1$ τότε για κάθε $i = 1, \dots, n$ έχουμε $|\lambda_i| = |f_i(x)| \leq \|f_i\| \leq M$. □

Θεωρημα 3.26 (αυτόματης συνέχειας). *Έστω X, Y χώροι με νόρμα με τον X πεπερασμένης διάστασης. Τότε κάθε γραμμικός τελεστής $T : X \longrightarrow Y$ είναι φραγμένος.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε μια Hamel βάση $(e_i)_{i=1}^{n}$ του X και θέτουμε $N = \sum\limits_{i=1}^{n} \|T(e_i)\|$. Από το προηγούμενο λήμμα υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in X$ με $\|x\| \leq 1$ να ισχύει $\max\{|\lambda_i| : \ i = 1, \dots, n\} \leq M$.

Έτσι για κάθε $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in X$ με $\|x\| \leq 1$ έχουμε

$$\|T(x)\| = \|T(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i)\| = \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(e_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \cdot \|T(e_i)\| \leq M \sum_{i=1}^{n} \|T(e_i)\| = MN.$$

Επομένως ο T είναι φραγμένος. □

Πορισμα 3.27. *Αν X, Y είναι χώροι με νόρμα πεπερασμένης διάστασης και $\dim X = \dim Y$ τότε οι X και Y είναι ισόμορφοι.*

Απόδειξη. Έστω $(x_i)_{i=1}^{n}$, $(y_i)_{i=1}^{n}$ Hamel βάσεις των X και Y αντίστοιχα. Ορίζουμε $T : X \longrightarrow Y$ με $T(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$ Είναι άμεσο ότι ο T είναι γραμμικός 1-1 και επί. Επειδή οι X, Y είναι πεπερασμένης διάστασης από το θεώρημα της αυτόματης συνέχειας έπεται ότι οι T, T^{-1} είναι φραγμένοι και άρα οι X και Y είναι ισόμορφοι. □

Πορισμα 3.28. *Έστω X χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης. Αν $K \subset X$ είναι κλειστό και φραγμένο τότε το K είναι συμπαγές. Ειδικότερα οι κλειστές μπάλες $B[x, M]$ και οι σφαίρες $S(x, M)$ είναι συμπαγή σύνολα.*

Απόδειξη. Οι ισομορφισμοί $T : X \longrightarrow Y$ απεικονίζουν κλειστά και φραγμένα υποσύνολα του X σε κλειστά και φραγμένα υποσύνολα του Y. Έστω $n = \dim X$ και θεωρούμε $T : X \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ ισομορφισμό. Γνωρίζουμε ότι τα κλειστά και φραγμένα υποσύνολα του $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ είναι συμπαγή άρα το ίδιο ισχύει και για τον X. Επίσης τα σύνολα $B[x, M]$ και $S(x, M)$ είναι κλειστά και φραγμένα άρα συμπαγή. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $T : (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ με $T(f) = \int_0^1 f(t)dt$. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος και υπολογίστε την νόρμα του.

2. (α) Έστω $T : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N})$ ώστε

$$T((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots).$$

Δείξτε ότι ο T είναι γραμμική ισομετρία.

(β) Έστω $S : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N})$ ώστε

$$S((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (0, a_2, 0, \dots, 0, a_{2n}, 0, \dots).$$

Δείξτε ότι ο S είναι φραγμένος, υπολογίστε την νόρμα του και τους υποχώρους $\operatorname{Im} S$ και $\operatorname{Ker} S$.

3. Έστω $\mathcal{D}_\infty[0,1]$ οι "άπειρες φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεισ" στο $[0,1]$ με την supremum νόρμα. Έστω ακόμα $D : \mathcal{D}_\infty[0,1] \to \mathcal{D}_\infty[0,1]$ ο τελεστής της παραγώγου. $D(f) = f'$. Δείξτε ότι ο D είναι γραμμικός αλλά όχι φραγμένος.

4. Έστω X χώρος με νόρμα και

$$T : (c_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1) \to X,$$

γραμμικός, ώστε το $\{T(e_n) : n \in \mathbb{N}\}$ να είναι φραγμένο υποσύνολο του X. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

5. Δείξτε ότι ένας χώρος με νόρμα είναι πεπερασμένης διάστασης αν και μόνο αν κάθε υπόχωρος του είναι κλειστός.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Χώροι Hilbert

Οι χώροι Hilbert αποτελούν μια ιδιαίτερη κλάση χώρων Banach. Καταρχήν αποτελούν την φυσιολογική γενίκευση του $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. Όπως και στον $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, η νόρμα στους χώρους Hilbert ορίζεται από ένα εσωτερικό γινόμενο. Έτσι, η γεωμετρία των χώρων Hilbert, είναι όμοια με αυτή των χώρων $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. Π.χ. ορίζεται η καθετότητα μεταξύ δύο στοιχείων τους, έννοια που δεν υπάρχει γενικά σε χώρους Banach. Επίσης είναι ουσιαστικά μοναδικοί. Όλοι οι χώροι Hilbert με την ίδια τοπολογική διάσταση ταυτίζονται. Έτσι, όλοι οι διαχωρίσιμοι απειροδιάστατοι χώροι Hilbert είναι ισομετρικοί μεταξύ τους. Όπως αναφέραμε και στην Εισαγωγή, οι χώροι αυτοί έχουν πολλές εφαρμογές σε διάφορους κλάδους των Μαθηματικών και της Φυσικής (Ανάλυση, Διαφορικές εξισώσεις, Μαθηματική Φυσική, Κβαντομηχανική κ.ά.)

1. Εσωτερικά γινόμενα

Ορισμος 4.1. Έστω E διανυσματικός χώρος. *Εσωτερικό γινόμενο* στον E είναι μια συνάρτηση

$$< \, , \, >: E \times E \to \mathbb{R}$$

με τις ιδιότητες

(1) $< x, x > \geq 0$, για κάθε $x \in E$.
(2) Αν $< x, x >= 0$ τότε $x = 0$.
(3) $< x, y >=< y, x >$, για κάθε $x, y \in E$.
(4) $< \lambda x + \mu y, z >= \lambda < x, z > +\mu < y, z >$ για κάθε $x, y, z \in E$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Παρατηρείστε ότι από τις ιδιότητες (3) και (4) έχουμε ότι $< x, \lambda y + \mu z >= \lambda < x, y > +\mu < x, z >$ για κάθε $x, y, z \in E$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Επίσης $< x, x >= 0 \iff x = 0$.

Προταση 4.2 (ανισότητα Cauchy–Schwartz). *Αν E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε για κάθε $x, y \in E$ έχουμε*

$$< x, y >^2 \leq < x, x > \cdot < y, y >$$

Αποδειξη. Αν $y = 0$ τότε η ανισότητα ισχύει αφού και τα δύο μέλη της είναι μηδέν.

Έστω $y \neq 0$ και έστω ένα αυθαίρετο $x \in E$. Τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$< x - \lambda y, x - \lambda y > \geq 0$$

$$\iff < y, y > \lambda^2 - 2 < x, y > \cdot \lambda + < x, x > \geq 0.$$

Αφού $< y, y >> 0$ και η ανισότητα ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, θα πρέπει $\Delta = 4 < x, y >^2 -4 < x, x > \cdot < y, y > \leq 0$ ή $< x, y >^2 \leq < x, x > \cdot < y, y >$. □

Προταση 4.3. *Ένα εσωτερικό γινόμενο $< \, , \, >$ σε ένα διανυσματικό χώρο E ορίζει μια νόρμα στον E από τη σχέση*

$$\|x\| =< x, x >^{1/2}, x \in E$$

Αποδειξη. Οι ιδιότητες $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$, $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ προκύπτουν εύκολα. Η τριγωνική ιδιότητα της νόμας $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ προκύπτει από την ανισότητα Cauchy–Schwartz. Πράγματι, $\|x+y\|^2 = < x+y, x+y > = < x, x > + < x, y > + < y, x > + < y, y > = \|x\|^2 + 2 < x, y > + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$, από όπου έπεται ότι $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. □

Παρατηρηση. Η ανισότητα Cauchy–Schwartz διατυπώνεται τώρα ως εξής: Για κάθε $x, y \in E$

$$| < x, y > | \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Προταση 4.4. *Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\|x\| = < x, x >^{1/2}, x \in E$ η νόρμα στον E που ορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο. Τότε η απεικόνιση $<,>: E \times E \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση.*

Αποδειξη. Αρκεί να δειχθεί ότι για κάθε $x, y \in E$, και $(x_n)_n, (y_n)_n$ ακολουθίες στον E με $x_n \to x$ και $y_n \to y$, έχουμε ότι $< x_n, y_n > \to < x, y >$. Από την ανισότητα Cauchy–Schwartz έπεται ότι

$$\begin{aligned}
| < x_n, y_n > - < x, y > | &\leq | < x_n, y_n > - < x_n, y > | + | < x_n, y > - < x, y > | \\
&\leq | < x_n, y_n - y > | + | < x_n - x, y > | \\
&\leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\|
\end{aligned}$$

και άρα $< x_n, y_n > \to < x, y >$. □

1.1. Παραδείγματα χώρων με εσωτερικό γινόμενο. (1). Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ με εσωτερικό γινόμενο

$$< x, y > = x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n,$$

όπου $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

(2). Ο χώρος c_{00} των πεπερασμένων ακολουθιών πραγματικών αριθμών, δηλαδή

$$c_{00} = \{x = (x_n)_n : x_n \in \mathbb{R} \text{ και } \exists n_x \in \mathbb{N}, x_n = 0, \forall n \geq n_x\}$$

με εσωτερικό γινόμενο

$$< x, y > = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n,\ x = (x_n)_n,\ y = (y_n)_n.$$

(Το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται καλά διότι η σειρά έχει πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών όρων).

(3) Ο χώρος ℓ_2 δηλαδή,

$$\ell_2 = \left\{x = (x_n)_n : x_n \in \mathbb{R} \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\right\}$$

με εσωτερικό γινόμενο

$$< x, y > = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,\ x = (x_n)_n,\ y = (y_n)_n.$$

Το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται καλά διότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ είναι (απολύτως) αθροίσιμη για κάθε $(x_n)_n, (y_n)_n$ στον ℓ_2. Πράγματι: $|x_n \cdot y_n| \leq |x_n|^2 + |y_n|^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα $\sum |x_n y_n| \leq \sum |x_n|^2 + \sum |y_n|^2 < \infty$.

(4). Ο χώρος $C[0,1]$ των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων ορισμένων στο $[0,1]$, με εσωτερικό γινόμενο

$$< f, g >= \int_0^1 f(t) \cdot g(t) dt.$$

Η ιδιότητα $< f, f >= 0 \Rightarrow f = 0$ του εσωτερικού γινομένου ισχύει, αφού αν $f \in C[0,1]$ και $\int_0^1 f^2(t)dt = 0$ τότε $f^2(t) = 0$ για κάθε $t \in [0,1]$ (επειδή $f^2(t) \geq 0$ και η f^2 είναι συνεχής) και άρα $f(t) = 0$ για κάθε $t \in [0,1]$.

Πρόταση 4.5 (Κανόνας παραλληλογράμμου). *Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινομενο, τότε για κάθε $x, y \in E$*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται εύκολα χρησιμοποιώντας τον ορισμό της νόρμας $\|x\| =< x, x >^{1/2}$ και τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου. □

Σημείωση. Η παραπάνω πρόταση μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για να δείξουμε ότι ένας χώρος με μια νόρμα δεν είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο. π.χ. ο $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο (δηλαδή η νόρμα του δεν προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο.) Πράγματι αν $f(t) = 1$, $g(t) = t, \forall t \in [0,1]$ τότε $\|f+g\|_\infty = 2$, $\|f-g\|_\infty = 1$, $\|f\|_\infty = 1$, $\|g\|_\infty = 1$ και

$$\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 = 4 + 1 = 5 \neq 2\|f\|_\infty^2 + 2\|g\|_\infty^2 = 4.$$

Ορισμός 4.6. Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Δύο στοιχεία $x, y \in E$ λεγονται *κάθετα* (συμβολικά $x \perp y$), όταν $< x, y >= 0$.

Παρατήρηση. Το 0 είναι κάθετο σε κάθε στοιχείο του E και είναι και το μοναδικό στοιχείο με την ιδιότητα αυτή. (Πράγματι: αν $< x, y >= 0, \forall y \in E$ τότε $< x, x >= 0$ και άρα $x = 0$.)

Πρόταση 4.7 (Πυθαγόρειο θεώρημα). *Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $x, y \in E$ ώστε $x \perp y$. Τότε*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται εύκολα με πράξεις. □

2. Χώροι Hilbert

Ορισμός 4.8. Ένας χώρος Banach $(H, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος Hilbert αν η νόρμα του ορίζεται από ένα εσωτερικό γινόμενο στον H, δηλαδή υπάρχει εσωτερικό γινόμενο $< \, , \, >$ στον H ώστε $\|x\| =< x, x >^{1/2}$ για κάθε $x \in H$.

Παρατηρήσεις. (1). Ισοδύναμα ένας χώρος Hilbert είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο που είναι πλήρης ως προς τη μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

(2) Κάθε κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert είναι χώρος Hilbert.

(3) Αν ένας χώρος Banach X είναι ισομετρικός με ένα χώρο Hilbert H τότε και ο X είναι χώρος Hilbert. Πράγματι αν $T : X \to Y$ είναι ισομετρία, τότε θέτουμε $< x, y > = < Tx, Ty >, \forall x, y \in X$ και αποδεικνύεται εύκολα ότι η $< \, , \, >: X \to \mathbb{R}$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον X και $\|x\| =< x, x >^{1/2}, \forall x \in X$.

(4). Αν ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος Banach και ο Y είναι ένας πυκνός υπόχωρος του X έτσι ώστε η νόρμα στον Y να καθορίζεται από ένα εσωτερικό γινόμενο στον Y, τότε ο X είναι χώρος Hilbert. Πράγματι: για κάθε $x, y \in X$ ορίζουμε

$$< x, y >= \lim_{n\to\infty} < x_n, y_n >$$

όπου $(x_n)_n, (y_n)_n$ ακολουθίες στον Y με $x_n \to x, y_n \to y$. Αποδεικνύεται ότι το $< x, y >$ είναι καλά ορισμένο (ανεξάρτητο από την επιλογή των $(x_n), (y_n)$) εσωτερικό γινόμενο στον X, που στον Y ταυτίζεται με το εσωτερικό γινόμενο που ήδη υπάρχει και ότι

$$\|x\| =< x, x >^{1/2} \quad \forall x \in X.$$

(5). Γενικότερα αποδεικνύεται το εξής:

Αν $(E, < \, , \, >)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε υπάρχει χώρος Hilbert $(H, < \, , \, >)$ στον οποίο ο E εμφυτεύεται γραμμικά και ισομετρικά ως πυκνός υπόχωρος. Ο H είναι μοναδικός, με την έννοια ότι αν $(H', < \, , \, >)$ είναι χώρος Hilbert και $T : E \to H'$ γραμμική ισομετρία με πυκνή εικόνα, τότε η T επεκτείνεται σε μια γραμμική ισομετρία $\tilde{T}$ από τον H επί του H'.

2.1. Παραδείγματα χώρων Hilbert. (1). Ο $\mathbb{R}^n$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο είναι ένας (πεπερασμένης διάστασης) χώρος Hilbert.

(2). Ο ℓ_2 με το εσωτερικό γινόμενο που ήδη ορίσαμε στην παράγραφο 1 είναι χώρος Hilbert.

(3). Ο c_{00} με το εσωτερικό γινόμενο που ορίσαμε δεν είναι χώρος Hilbert διότι δεν είναι πλήρης.

(4). Ο $C[0, 1]$ με εσωτερικό γινόμενο

$$< f, g >= \int_0^1 f(t) \cdot g(t) dt$$

αποδεικνύεται ότι δεν είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή υπάρχει ακολουθία $(f_n)_n$ που είναι Cauchy ως προς την μετρική που ορίζεται από την νόρμα αλλά δεν συγκλίνει σε συνεχή συνάρτηση.

Η παρακάτω πρόταση μας βεβαιώνει ότι το πρόβλημα της βέλτιστης προσέγγισης ενός στοιχείου $x \in H$ από ένα στοιχείο y ενός κλειστού υπόχωρου (και γενικότερα από ένα κλειστό κυρτό υποσύνολο) του H έχει λύση και μάλιστα μοναδική.

Πρόταση 4.9. *Έστω H χώρος Hilbert και K κλειστό και κυρτό υποσύνολο του H. Τότε για κάθε $x \in H$ υπάρχει μοναδικό $y \in K$ ώστε*

$$\|x - y\| = \rho(x, K) = \inf\{\|x - z\| : z \in K\}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $d = \rho(x, K)$. Τότε υπάρχει μια ακολουθία $(y_n)_n$ στο K ώστε $\|y_n - x\| \to d$. Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\|^2$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$.

Επειδή $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in K$ έχουμε

$$\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\|^2 \geq d^2$$

και συνεπώς

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4d^2.$$

Όταν $n \to \infty$ και $m \to \infty$ το δεξιό μέλος της παραπάνω ανισότητας τείνει στο $2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$. Επομένως η $(y_n)_n$ είναι βασική ακολουθία. Αφού ο H είναι πλήρης, υπάρχει $y \in H$ ώστε $\|y_n - y\| \to 0$. Επειδή το K είναι κλειστό και $(y_n)_n$ ακολουθία στο K, έχουμε ότι $y \in K$. Η συνέχεια της νόρμας δίνει ότι

$$\|y - x\| = \|\lim_{n\to\infty} y_n - x\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n - x\| = d.$$

Η μοναδικότητα έπεται και αυτή από τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Αν $y_1, y_2 \in K$ και $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d$ τότε

$$\begin{aligned} 0 \leq \|y_1 - y_2\|^2 &= 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_2 - x\|^2 - 4\|\frac{1}{2}(y_1 + y_2) - x\|^2 \\ &= 2d^2 + 2d^2 - 4\|\frac{1}{2}(y_1 + y_2) - x\|^2 \\ &\leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0 \end{aligned}$$

Άρα $y_1 = y_2$. □

Η επόμενη πρόταση συνεπάγεται ότι για κάθε γνήσιο κλειστό υπόχωρο F ενός χώρου Hilbert υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα κάθετο στον F, μια ιδιότητα που είναι γνωστή για το υπερεπίπεδα του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμος 4.10. Έστω A μη κενό υποσύνολο ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο $(E, <, >)$. Ένα στοιχείο $x \in E$ καλείται *κάθετο* στο A συμβολικά $(x \perp A)$, αν για κάθε $y \in A$, $< x, y >= 0$ δηλαδή για κάθε $y \in A$, $x \perp y$.

Προταση 4.11. *Έστω H χώρος Hilbert, F κλειστός γνήσιος υπόχωρος του H και $x \in H \setminus F$. Τότε υπάρχει μοναδικό $y \in F$ ώστε $x - y \perp F$.*

Αποδειξη. Από την πρόταση 4.9, (επειδή ο F είναι κυρτό υποσύνολο του H και κλειστό από την υπόθεση) έχουμε ότι υπάρχει $y \in F$ ώστε $\|x - y\| = \rho(x, F)$. Θα δείξουμε ότι $x - y \perp F$.

Θέτουμε $u = x - y$.

Έστω $z \in F$. Αν $z = 0$ τότε προφανώς $u \perp z$.

Έστω $z \neq 0$. Τότε παρατηρούμε ότι

$$\|u\| \leq \|u + \lambda z\|, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Πράγματι $\|x - y\| \leq \|x - (y - \lambda z)\|$, αφού $y - \lambda z \in F$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ και y είναι το πλησιέστερο σημείο του F στο x. Άρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|u\|^2 \leq \|u + \lambda z\|^2 &=< u + \lambda z, u + \lambda z > \\ &=< u, u > + 2\lambda < u, z > + \lambda^2 < z, z > . \end{aligned}$$

Θέτοντας $\lambda = -\frac{<u,z>}{<z,z>}$ έχουμε ότι

$$0 \leq -2\frac{< u, z >}{< z, z >} < u, z > + \frac{< u, z >^2}{< z, z >^2} < z, z >$$

δηλαδή $0 \leq - < u, z >^2$, οπότε $< u, z >= 0$, για κάθε $z \in F$. Άρα $u \perp F$.

Για να δείξουμε ότι το y είναι το μοναδικό σημείο του F ώστε $x - y \perp F$ παρατηρούμε ότι αν $y' \in F$ ώστε $x - y' \perp F$, τότε για κάθε $z \in F$ θα έχουμε ότι

$$\|x - z\|^2 = \|(x - y') + (y' - z)\|^2 = \|x - y'\|^2 + \|y' - z\|^2$$

αφού $x - y' \perp y' - z$ επειδή $y' - z \in F$. Άρα

$$\|x - z\|^2 \geq \|x - y'\|^2, \ \forall z \in F \text{ ή}$$
$$\|x - z\| \geq \|x - y'\|, \ \forall z \in F$$

Συνεπώς $\|x - y'\| = \rho(x, F)$ δηλαδή το y' είναι το πλησιέστερο στο x σημείο του F και από την πρόταση 4.9, $y' = y$. □

Παρατηρηση. Στην προηγούμενη πρόταση δείξαμε και ότι $\|x - y\| = \rho(x, F) \iff x - y \perp F$.

Ορισμος 4.12. Έστω H χώρος Hilbert και $A \subset H$. Το *ορθογώνιο σύνολο* του A είναι το σύνολο

$$A^{\perp} = \{x \in H : x \perp y, \ \forall y \in A\}.$$

Προταση 4.13. *Έστω H χώρος Hilbert και $A \subset H$. Τότε το $A^{\perp}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H.*

Αποδειξη. Για κάθε $x, y \in A^{\perp}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι $x + \lambda y \in A^{\perp}$. Άρα ο $A^{\perp}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του H. Έστω $(x_n)_n$ ακολουθία στον $A^{\perp}$, $x \in H$ ώστε $x_n \to x$. Τότε $\forall y \in A$, έχουμε $< x_n, y > \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} < x, y >$ και επειδή $< x_n, y >= 0$, έχουμε $< x, y >= 0$, για κάθε $y \in A$, δηλαδή $x \in A^{\perp}$. Άρα ο $A^{\perp}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H. □

Παρατηρηση. Αν F γραμμικός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H τότε $F \cap F^{\perp} = \{0\}$. Πράγματι: Αν $x \in F \cap F^{\perp}$ τότε $x \perp x$ δηλαδή $< x, x >= 0 \Rightarrow x = 0$.

Θεωρημα 4.14. *Έστω H χώρος Hilbert και F κλειστός υπόχωρος του H. Τότε $H = F \oplus F^{\perp}$ (δηλαδή $F, F^{\perp}$ κλειστοί γραμμικοί υπόχωροι του H, $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ και $H = F + F^{\perp}$).*

Αποδειξη. Έστω $x \in H$. Αν y είναι το μοναδικό σημείο του F που είναι πλησιέστερο στο x (πρόταση 4.9) τότε από την πρόταση 4.11 έχουμε ότι $y' = x - y \in F^{\perp}$. Άρα $x = y + y'$ με $y \in F$ και $y' \in F^{\perp}$. Από την πρόταση 4.13 ο $F^{\perp}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H και από την προηγούμενη παρατήρηση θα έχουμε ότι $F \cap F^{\perp} = \{0\}$. □

Προταση 4.15. *Έστω H χώρος Hilbert και F κλειστός υπόχωρος του H. Τότε υπάρχει προβολή $P : H \to F$ με $\operatorname{Ker} P = F^{\perp}$ και $\|P\| = 1$.*

Αποδειξη. Από το Θεώρημα 4.14 έχουμε ότι για κάθε $x \in H$ υπάρχουν δύο μοναδικά $y \in F$ και $y' \in F^{\perp}$ με $x = y + y'$. (Το y ικανοποιεί τις ιδιότητες $\rho(x, F) = \|x - y\|$ και $x - y \perp F$.)

Θέτουμε $P : H \to F$ με $P(x) = y$. Τότε η P είναι γραμμική και $P(z) = z$ για κάθε $z \in F$. Επιπλέον $y \perp y'$ και άρα

$$\|x\|^2 = \|y + y'\|^2 = \|y\|^2 + \|y'\|^2 \geq \|y\|^2 = \|P(x)\|^2.$$

Άρα $\|P(x)\| \leq \|x\|$ για κάθε $x \in H$, οπότε $\|P\| \leq 1$. Τέλος επειδή $P(z) = z$, για κάθε $z \in F$, έχουμε $\|P\| = 1$. □

Η προβολή $P : H \to F$ με $P(x) = y$ όπου $\|x - y\| = \rho(x, F)$ καλείται *ορθή προβολή του H επί του F.*

3. Ο δυϊκός ενός χώρου Hilbert

Υπενθυμίζουμε ότι αν X είναι ένας χώρος με νόρμα, τότε το σύνολο των συνεχών γραμμικών απεικονίσεων $f : X \to \mathbb{R}$ αποτελεί τον δυϊκό X^* του X. Ο X^* είναι χώρος Banach με τη νόρμα $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$.

Δεν είναι προφανές ότι ο δυϊκός ενός χώρου με νόρμα περιέχει μη μηδενικά στοιχεία. (Αυτό είναι συνέπεια του θεωρήματος Hahn–Banach). Στην περίπτωση των χώρων Hilbert μπορούμε να διαπιστωσουμε σχετικά εύκολα ότι ο δυϊκός έχει πάρα πολλά στοιχεία και ουσιαστικά όπως θα δούμε, ο H^* ταυτίζεται (γραμμικά και ισομετρικά) με τον H.

Πρόταση 4.16. *Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $x \in E$. Θεωρούμε την απεικόνιση*

$$f_x : E \ni y \mapsto f_x(y) = < y, x > \in \mathbb{R}.$$

Τότε η f_x είναι γραμμική, συνεχής και $\|f_x\| = \|x\|$.

Απόδειξη. Η f_x εύκολα προκύπτει ότι είναι γραμμική. Επίσης

$$|f_x(y)| = | < y, x > | \leq \|x\| \cdot \|y\|, \ \forall y \in E$$

και άρα

$$\|f_x\| \leq \|x\|. \tag{1}$$

Αν $x = 0$ τότε $f_x = 0$ και $\|f_x\| = 0$.

Αν $x \neq 0$, τότε επειδή $f_x(\frac{x}{\|x\|}) = < \frac{x}{\|x\|}, x > = \|x\|$, έπεται ότι

$$\|f_x\| \geq \|x\|. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $\|f_x\| = 1$. □

Παρατήρηση. Αν E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και θέσουμε $T : E \to E^*$ με $T(x) = f_x$, τότε η T είναι γραμμική ισομετρική εμφύτευση του E στον E^*. (Η γραμμικότητα προκύπτει εύκολα και η ισομετρία από την πρόταση 4.16.) Η T δεν είναι όμως επί αν ο E δεν είναι Hilbert (δηλαδή πλήρης.) Πράγματι, ο E^* είναι πλήρης και αν η T ήταν επί, αυτό θα είχε ως συνέπεια ότι και ο E θα ηταν πλήρης. Το επόμενο θεώρημα του Riesz μας πληροφορεί ότι η T είναι επί αν και μόνο αν ο E είναι (ως ισομετρικός με πλήρη χώρο) χώρος Hilbert.

Θεώρημα 4.17 (Riesz). *Έστω H χώρος Hilbert. Τότε για κάθε $f \in H^*$ υπάρχει μοναδικό $x \in H$ ώστε $f = f_x$, δηλαδή $f(y) = < y, x >$, $\forall y \in H$.*

Απόδειξη. Αν $f = 0$ τότε θέτουμε $x = 0$.

Έστω $f \neq 0$ και $M = \operatorname{Ker} f = \{y \in H : f(y) = 0\}$. Τότε ως γνωστόν ο M είναι γραμμικός υπόχωρος του H (η f είναι γραμμική) που είναι και κλειστός αφού η f είναι συνεχής. Επειδή $f \neq 0$, ο M είναι κλειστός γνήσιος γραμμικός υπόχωρος του H. Από την πρόταση 4.11, υπάρχει $z \in H$ ώστε $z \perp M$ και $z \neq 0$. Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο x είναι ένα πολλαπλάσιο του z, δηλαδή $x = \lambda z$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.

Έστω $y \in H$. Έχουμε ότι

$$f(z) \cdot y - f(y) \cdot z \in M \text{ διότι } f(f(z) \cdot y - f(y) \cdot z) = 0.$$

Επειδή $z \perp M$, θα έχουμε

$$0 = < f(z)y - f(y)z, z > = f(z) < y, z > - f(y) < z, z >$$

$$\Rightarrow f(y) = \frac{f(z)}{< z, z >} < y, z > = < y, x >,$$

όπου $x = \frac{f(z)}{<z,z>} z$.

Η μοναδικότητα του x έπεται άμεσα, αφού

$$\begin{aligned} f_{x_1} = f_{x_2} &\Rightarrow < y, x_1 > = < y, x_2 > \ \forall y \in H \\ &\Rightarrow < y, x_1 - x_2 > = 0 \ \forall y \in H \\ &\Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Από το θεώρημα Riesz και την προηγούμενη παρατήρηση έχουμε το εξής:

Πορισμα 4.18. *Έστω H χώρος Hilbert. Η απεικόνιση*

$$T : H \ni x \mapsto T(x) = f_x \in H^*$$

είναι γραμμική ισομετρία επί.

4. Ορθοκανονικά συστήματα

4.1. Ορθοκανονικά σύνολα.

Ορισμος 4.19. Έστω $(E, < \ , \ >)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο.
Ένα σύνολο $S = \{e_i \in E : i \in I\}$ καλείται *ορθοκανονικό* αν

(1) $e_i \perp e_j$, $\forall i, j \in I$ με $i \neq j$ και
(2) $\|e_i\| = 1$, $\forall i \in I$.

Παρατηρηση. Τα διανύσματα ενός ορθοκανονικού συνόλου είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πραγματικά, αν $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$ τότε

$$\lambda_k = < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, e_k > = < 0, e_k > = 0 \ \ \forall 1 \leq k \leq n.$$

Θεωρημα 4.20 (Διαδικασία ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt). *Έστω $\{x_1, x_2, \ldots\}$ μια ακολουθία γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο $(E, < \ , \ >)$. Τότε υπάρχει μια ορθοκανονική ακολουθία $\{e_1, e_2, \ldots\}$ ώστε*

$$< e_n : n = 1, 2, \ldots > = < x_n : n = 1, 2, \ldots >$$

όπου με $< e_n : n = 1, 2, \cdots >$, $< x_n : n = 1, 2, \cdots >$ συμβολίζουμε τους γραμμικούς χώρους που παράγονται από τα $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ και $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ αντίστοιχα.

Αποδειξη. Θέτουμε $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$. Τότε $< e_1 > = < x_1 >$. Υποθέτουμε ότι τα $e_1, \ldots, e_n$ έχουν οριστεί έτσι ώστε το $\{e_1, \ldots, e_n\}$ να είναι ορθοκανονικό σύνολο και

$$< e_1, \ldots, e_k > = < x_1, \ldots, x_k >$$

για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Θέτουμε

$$y_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} < x_{n+1}, e_j > e_j.$$

Είναι $y_{n+1} \neq 0$ (διότι διαφορετικά $x_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} < x_{n+1}, e_j > e_j$ και άρα θα έχουμε ότι $x_{n+1} \in < e_1, \ldots, e_n > = < x_1, \ldots, x_n >$, άτοπο.)

Θέτουμε επίσης $e_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{\|y_{n+1}\|}$. Τότε $< e_{n+1}, e_j > = 0$ (ελέγξτε το) για $j = 1, \ldots, n$. Άρα το $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ είναι ορθοκανονικό και εύκολα έχουμε ότι $< e_1, \ldots, e_{n+1} > = < x_1, \ldots, x_{n+1} >$. Επαγωγικά έχουμε το συμπερασμα. □

Παραδείγματα (1). Το σύνολο $\{e_n : n = 1, 2, \dots\}$ στον ℓ_2, όπου $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ και το 1 εμφανίζεται στην n-θέση, είναι μια ορθοκανονική ακολουθία στον ℓ_2.

(2). Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις $\phi_0(t) = 1$, $\phi_1(t) = t$, $\phi_2(t) = t^2$, $\dots$ συνιστούν ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων στον $C[0, 1]$. Εφαρμόζοντας την διαδικασία Gram–Schmidt λαμβάνουμε μια ακολουθία συναρτήσεων, η οποία αποδεικνύεται ότι δίνεται από την εξής σχέση:

$$e_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n, \ n = 0, \dots,$$

και είναι τα λεγόμενα πολυώνυμα Legendre, που συνιστούν ένα ορθοκανονικό σύστημα στον $C[0, 1]$.

Πρόταση 4.21. *Έστω $(E, < , >)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ ένα πεπερασμένο ορθοκανονικό σύνολο στον E.*

Θέτουμε $F =< e_1, \dots, e_n >$. Τότε για κάθε $x \in E$, το $u = \sum_{j=1}^{n} < x, e_j > e_j$ είναι το πλησιέστερο στοιχείο του F στο x.

Απόδειξη. Από την παρατήρηση της παραγράφου 3, έχουμε ότι για $x \in E$, $y \in F$ ισχύει η ισοδυναμία

$$\|x - y\| = \rho(x, F) \iff x - y \perp F.$$

Άρα αρκεί να δειχτεί ότι $x - u \perp F$ πράγμα που ισχύει αφού $< x - u, e_k >= 0$ για όλα τα $k = 1, \dots, n$. □

Πρόταση 4.22 (Ανισότητα Bessel). *Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον $(E, < , >)$. Τότε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n >^2 \leq \|x\|^2.$$

Απόδειξη. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Θέτουμε

$$u_k = \sum_{n=1}^{k} < x, e_n > e_n.$$

Τότε από προηγούμενη πρόταση $x - u_k \perp u_k$ και άρα από το Πυθαγόρειο θεώρημα

$$\|x\|^2 = \|(x - u_k) + u_k\|^2 = \|x - u_k\|^2 + \|u_k\|^2 \geq \|u_k\|^2.$$

Πάλι από το Πυθαγόρειο θεώρημα,

$$\|u_k\|^2 = \sum_{k=1}^{k} < x, e_n >^2 .$$

Άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{k} < x, e_n >^2 \leq \|x\|^2$$

και συνεπώς $\sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n >^2 \leq \|x\|^2$. □

4.2. Σειρές σε χώρους Banach.

Ορισμος 4.23. Έστω X χώρος Banach και $(x_n)_n$ μια ακολουθία στοιχείων του X. Με τον όρο *σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ονομάζουμε την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(s_n)_n$ όπου

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Αν η $(s_n)_n$ συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$ (δηλαδή $\lim_{n\to\infty} \|s_n - x\| \to 0$) λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι *συγκλίνουσα στο* x και γράφουμε $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$.

Παρατηρούμε ότι στον ορισμό της σειράς εμπλέκεται τόσο η αλγεβρική δομή του X (στον ορισμό των πεπερασμένων αθροισμάτων $s_n = x_1 + \cdots + x_n$) όσο και η αναλυτική του δομή ως μετρικού χώρου (στον ορισμό της σύγκλισης της ακολουθίας $(s_n)_n$).

Παραδειγμα. Στον c_0 έχουμε ότι κάθε στοιχείο του $x = (\lambda_n)_n$ γράφεται και ως σειρά, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$. Όμοια για τους ℓ_1, ℓ_2 και γενικά τους ℓ_p $(1 \leq p < \infty.)$ Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση για τον αναγνώστη.

Όπως και ο ορισμός της σειράς σε ένα χώρο Banach έτσι και οι ιδιότητες των σειρών, είναι ανάλογες μ΄ αυτές των σειρών πραγματικών αριθμών. Αναφέρουμε ενδεικτικά μερικές απ΄ αυτές.

Προταση 4.24. *Αν η* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *συγκλίνει, τότε* $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Προταση 4.25 (Κριτήριο Cauchy). *Μια σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *σ΄ ένα χώρο Banach* X *συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της* $(s_n)_n$ *είναι Cauchy (δηλαδή για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$, *ώστε για κάθε* $n, m \geq n_0$, $\|s_n - s_m\| < \epsilon$*).*

Προταση 4.26. *Αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ *συγκλίνει (στο* $\mathbb{R}$*) τότε και η* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *συγκλίνει στον* X.

Οι αποδείξεις των παραπάνω προτάσεων είναι ανάλογες με αυτές για τις σειρές στο $\mathbb{R}$ και αφήνονται για άσκηση. (Αρκεί να χρησιμοποιήσετε την νόρμα αντί για την απόλυτη τιμή.) Παρατηρείστε επίσης ότι το αντίστροφο της Πρότασης 4.26 δεν εσχύει. Π.χ. στον c_0, αν $x_n = \frac{1}{n} e_n$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$, όπου $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$, ενώ $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Σχετικά με τους χώρους Hilbert για σειρές της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ όπου $\{e_n : n = 1, 2, \dots\}$ ορθοκανονικό σύνολο, έχουμε την επόμενη:

Προταση 4.27. *Έστω* H *χώρος Hilbert,* $\{e_n : n = 1, 2, \dots\}$ *ορθοκανονική ακολουθία στον* H *και* $(\lambda_n)_n$ *ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ *συγκλίνει αν και μόνο αν* $(\lambda_n) \in \ell_2$.

Αποδειξη. Θέτουμε $s_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$ και $t_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2$. Τότε για κάθε $n > m$ έχουμε

$$\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{j=m+1}^{n} |\lambda_j|^2 = t_n - t_m.$$

Άρα

$$\begin{aligned} & \text{η } (s_n) \text{ συγκλίνει} \\ \iff & \text{η } (s_n) \text{ είναι βασική} \\ \iff & \text{η } (t_n) \text{ είναι βασική} \\ \iff & \text{η } (t_n) \text{ είναι συγκλίνουσα} \\ \iff & (\lambda_n)_n \in \ell_2. \end{aligned}$$

και το τελευταίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πορισμα 4.28. *Για κάθε* $x \in H$, *η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n > e_n$ *συγκλίνει στον* H.

Αποδειξη. Προκύπτει άμεσα από την ανισότητα Bessel και την προηγούμενη πρόταση. □

4.3. Ορθοκανονικές βάσεις. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει σε προηγούμενο κεφάλαιο, με τον όρο (Hamel) βάση ενός διανυσματικού χώρου X, εννοούμε ένα υποσύνολο B του X που αποτελείται από γραμμικά νεξάρτητα διανύσματα με την ιδιότητα κάθε στοιχείο το X να γράφεται σαν *πεπερασμένος* γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του B. Γνωρίζουμε επίσης ότι κάθε Hamel βάση ενός απειροδιάστατου χώρου Banach είναι υπεραριθμήσιμη. Πρακτικά είναι αδύνατον να κατασκευάσουμε μια Hamel βάση ενός απειροδιάστατου χώρου Banach. Όπως όμως έχουμε ήδη δει στον προηγούμενη παράγραφο, σε ορισμένους χώρους (π.χ. στους c_0, ℓ_p $1 \leq p < \infty$) κάθε στοιχείο τους γράφεται σαν ''άπειρο'' άθροισμα. Δηλαδή γράφεται ως σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$. Έτσι στους χώρους αυτούς, θα λέγαμε ότι το σύνολο $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ αποτελεί ένα είδος ''βάσησ'' όπου όμως κάθε στοιχείο του χώρου είναι ένας ''άπειροσ'' γραμμικός συνδυασμός των e_n, $n \in \mathbb{N}$ που εύκολα προκύπτει ότι είναι και μοναδικός. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε ότι τέτοιες βάσεις υπάρχουν σε όλους τους διαχωρίσιμους χώρους Hilbert και μάλιστα μπορεί να επιλεγούν έτσι ώστε να είναι και ορθοκανονικές.

Ορισμος 4.29. Έστω H χώρος Hilbert και $S = \{e_i : i \in I\}$ μια ορθοκανονική οικογένεια του H. Η S καλείται *ορθοκανονική βάση* του H αν είναι μια μεγιστική ορθοκανονική οικογένεια του H, δηλαδή δεν περιέχεται γνήσια σε μια άλλη ορθοκανονική οικογένεια του H.

Ως συνέπεια του Λήμματος Zorn, κάθε χώρος Hilbert έχει μια ορθοκανονική βάση και γενικά κάθε ορθοκανονική οικογένεια επεκτείνεται σε ορθοκανονική βάση. (Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση.)

Προταση 4.30. *Έστω* H *χώρος Hilbert και* $\mathcal{E} = \{e_n : n = 1, 2, \dots\}$ *μια ορθοκανονική ακολουθία του* H. *Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η* $\mathcal{E}$ *είναι μια ορθοκανονική βάση του* H.
(2) *Αν* $x \in H$ *και* $x \perp e_n$ *για όλα τα* $n = 1, 2, \dots$ *τότε* $x = 0$.
(3) *Για κάθε* $x \in H$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n > e_n$.
(4) *Για κάθε* $x, y \in H$, $< x, y >= \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n >< y, e_n >$.
(5) *Για κάθε* $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n >^2$.

Αποδειξη. (1)⇒(2) Αν $x \perp e_n$ για $n = 1, 2, \dots$ και $x \neq 0$ τότε η $\mathcal{E}$ περιέχεται γνήσια στην $\mathcal{E} \cup \{\frac{x}{\|x\|}$ που είναι ορθοκανονική οικογένεια. Άτοπο, αφού η $\mathcal{E}$ είναι ορθοκανονική βάση.

(2)⇒(3). Θέτουμε $u = \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n > e_n$. Η σειρά συγκλίνει από το προηγούμενο πόρισμα και $< x - u, e_j >= 0$ για όλα τα $j \in \mathbb{N}$. Πραγματικά

$$\begin{aligned}
< u, e_j > &=< \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} < x, e_n > e_n, e_j > \\
&= \lim_{k\to\infty} < \sum_{n=1}^{k} < x, e_n > e_n, e_j > \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} << x, e_n > e_n, e_j > \\
&=< x, e_j > .
\end{aligned}$$

Άρα

$$< x - u, e_j >=< x, e_j > - < u, e_j >= 0$$

συνεπώς $x - u = 0$. Επομένως $x = u$.

(3)⇒(4). Έπεται από την συνέχεια του εσωτερικού γινομένου (δες και προηγούμενη απόδειξη).

(4)⇒(5). $\|x\|^2 =< x, x >= \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n >^2$.

(5)⇒(1). Αν η $\mathcal{E}$ δεν ήταν ορθοκανονική βάση, θα υπήρχε $x \notin \mathcal{E}$ με $\|x\| = 1$ και $x \perp \mathcal{E}$. Αλλά τότε $< x, e_n >= 0$ για όλα τα n, οπότε $\|x\|^2 = 0$ και συνεπώς $x = 0$, που είναι άτοπο. □

Θεωρημα 4.31. *Έστω H ένας χώρος Hilbert άπειρης διάστασης. Τότε ο H είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν ο H έχει μια αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση.*

Αποδειξη. Έστω ότι ο H είναι διαχωρίσιμος και έστω $D = \{x_1, x_2, \dots\}$ ένα αριθμήσιμο γραμμικά ανεξάρτητο πυκνό υποσύνολο του H. Εφαρμόζοντας την διαδικασία Gram–Schmidt παίρνουμε μια ορθοκανονική ακολουθία $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots\}$. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{E}$ είναι ορθοκανονική βάση. Πράγματι: Αν αυτό δεν συμβαίνει τότε υπάρχει $x \neq 0$, στον H με $< x, e_n >= 0$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|x\| = 1$. Εφ' όσον το D είναι πυκνό στον H υπάρχει x_{n_0} με $\|x - x_{n_0}\| < \frac{1}{2}$. Είναι $< x, x_{n_0} >= 0$ γιατί $x \perp < e_1, e_2, \cdots >=< x_1, x_2, \cdots >$. Τότε

$$1 = \|x\|^2 =< x, x >=< x, x - x_{n_0} >\leq \|x\| \cdot \|x - x_{n_0}\| < \frac{1}{2}$$

που είναι άτοπο. Αντίστροφα, έστω ότι ο H έχει μια αριθμήσιμη αρθοκανονική βάση $\mathcal{E} = \{e_n : n = 1, 2, \dots\}$. Τότε $x = \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n > e_n$ για όλα τα $x \in H$ (πρόταση 4.30). Το σύνολο

$$D = \Big\{ \sum_{j=1}^{n} q_j e_j : q_j \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N} \Big\}$$

είναι εύκολο να δειχτεί ότι είναι ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του H. □

Θεωρημα 4.32. *Κάθε διαχωρίσιμος και απειροδιάστατος χώρος Hilbert είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_2.*

Αποδειξη. Έστω H διαχωρίσιμος απειροδιάστατος χώρος Hilbert. Από το Θεώρημα 4.31 έχουμε ότι ο H έχει μια αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση, έστω $\mathcal{E} = \{e_n : n = 1, 2, \dots\}$. Από την πρόταση 4.30, για κάθε $x \in H$ έχουμε ότι

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n > e_n$$

και από την ίδια πρόταση,

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n >^2 .$$

Άρα ορίζεται η απεικόνιση $T : H \to \ell_2$ με

$$T : (x) = (< x, e_n >)_n \in \ell_2.$$

Είναι εύκολο να δειχτεί ότι η T είναι γραμμική και από την $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} < x, e_n >^2$ έχουμε ότι είναι ισομετρία. Τέλος, η T είναι και επί από την πρόταση 4.27. $\square$

Σημείωση. Το παραπάνω θεώρημα μας δείχνει ότι όλοι οι διαχωρίσιμοι απειροδιάστατοι χώροι Hilbert είναι ισομετρικά ισόμορφοι μεταξύ τους αφού είναι ισομετρικά ισόμορφοι με τον ℓ_2. Πρέπει όμως να πούμε ότι η δομή ενός χώρου Hilbert εξαρτάται και από την φύση των στοιχείων του. Π.χ. ο ℓ_2 αποτελείται από ακολουθίες πραγματικών αριθμών, ενώ ο $L_2[0,1]$ από συναρτήσεις (ακριβέστερα από κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) Υπάρχει εσωτερικό γινόμενο $< \cdot, \cdot >$ στον X ώστε $\|x\| =< x, x >^{\frac{1}{2}}$ για κάθε $x \in X$.

(ii) Η $\|\cdot\|$ ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου, δηλαδή

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

για κάθε $x, y \in X$.

(Υπόδειξη: Για τη συνεπαγωγή (ii)⇒(i), θέσατε $< x, y >= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$, $\forall x, y \in X$.)

2. Έστω H χώρος Hilbert και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$,$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δυο ακολουθίες του H ώστε $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ και $\lim_n \|x_n + y_n\| = 2$. Δείξτε ότι $\lim_n \|x_n - y_n\| = 0$.

3. Έστω H χώρος Hilbert και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ορθογώνια ακολουθία στον H, δηλαδή $< x_n, x_m >= 0$ για κάθε $n \neq m$. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει.

(ii) Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ συγκλίνει.

4. Έστω H χώρος Hilbert και Y γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in H$ με $\|x\| = 1$ ώστε $\rho(x, Y) = 1$.

5. Έστω F, G κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert H, ώστε $x \perp y$ για κάθε $x \in F$ και $y \in G$. Δείξτε ότι το άθροισμα $F + G$ είναι κλειστός υπόχωρος του H.

6. Έστω H χώρος Hilbert και $\emptyset \neq A \subset H$. Δείξτε ότι $(A^{\perp})^{\perp} = \overline{< A >}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Το θεώρημα Hahn – Banach

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι συνεχείς γραμμικές απεικονίσεις είναι από τα βασικά αντικείμενα μελέτης της συναρτησιακής ανάλυσης. Το πρόβλημα επέκτασης συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών που είναι ορισμένα σ' ένα υπόχωρο, αντιμετωπίζεται με το θεώρημα Hahn – Banach. Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το πρόβλημα της επέκτασης τίθεται με διάφορες μορφές σε πολλούς κλάδους των Μαθηματικών. Για παράδειγμα, όπως έχουμε δείξει στο Κεφάλαιο 1 (πόρισμα 1.15), μια γραμμική απεικόνιση που ορίζεται σ' έναν υπόχωρο, επεκτείνεται γραμμικά σ' όλο το χώρο. Επίσης, στη θεωρία μετρικών χώρων, αν (X, ρ) είναι μετρικός χώρος, $K \subset X$ κλειστό και $f : K \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε υπάρχει $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ συνεχής, που επεκτείνει την f. (Δηλαδή $\tilde{f}|K = f$). Το θεώρημα Hahn – Banach, δείχνει πώς μπορούμε να επιτύχουμε επέκταση που παραμένει γραμμική και παραμένει συνεχής. Αποτελεί δηλαδή μια σύζευξη των προαναφερθέντων δύο αποτελεσμάτων. Δεν είναι υπερβολή να πούμε ότι αποτελεί το θεμελιώδες θεώρημα της συναρτησιακής ανάλυσης, που επιτρέπει στη θεωρία να αποκτήσει την πλούσια δομή που την καθιστά χρήσιμη. Όπως θα το διατυπώσουμε αναφέρεται και σαν αναλυτική μορφή του θεωρήματος Hahn – Banach. Υπάρχει επίσης η γεωμετρική μορφή του που αφορά τα διαχωριστικά θεωρήματα και αναπτύσσεται στο επόμενο κεφάλαιο.

Ορισμος 5.1. Μια συνάρτηση $p : X \to \mathbb{R}$, X διανυσματικός χώρος, λέγεται *υπογραμμικό συναρτησοειδές*, αν ισχύουν τα ακόλουθα

(1) $p(x) \geq 0$, $\forall x \in X$.
(2) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ $\forall \lambda \geq 0$ (θετικά ομογενής)
(3) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$. (τριγωνική).

Παρατηρηση. Ας παρατηρήσουμε ότι τα υπογραμμικά συναρτησοειδή, έχουν παρόμοιες ιδιότητες με την νόρμα και ειδικότερα κάθε νόρμα στον X ορίζει ένα υπογραμμικό συναρτησοειδές. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα, αν X είναι διανυσματικός χώρος, $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμική, τότε η $p(x) = |f(x)|$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές. Η απόδειξη του είναι εύκολη.

Θεωρημα 5.2 (Hahn – Banach). *Έστω X διανυσματικός χώρος και $p : X \to \mathbb{R}$ υπογραμμικό συναρτησοειδές. Αν Y είναι υπόχωρος του X και $f : Y \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές, ώστε $f(y) \leq p(y)$ για κάθε $y \in Y$, τότε υπάρχει $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ γραμμική, ώστε $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$ και $\tilde{f}|Y = f$. (Δηλαδή η $\tilde{f}$ είναι επέκταση της f).*

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη, ας παρατηρήσουμε τον γενικό χαρακτήρα του θεωρήματος. Δηλαδή οι υποθέσεις αφορούν ένα διανυσματικό χώρο και ένα υπογραμμικό συναρτησοειδές που κυριαρχεί ένα γραμμικό συναρτησοειδές σ' έναν υπόχωρο. Οι ασθενείς υποθέσεις του θεωρήματος, το καθιστούν χρήσιμο σε διανυσματικούς τοπολογικούς χώρους. (Μια γενικότερη κλάση από τους χώρους με νόρμα.) Η απόδειξη του θεωρήματος, χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος γίνεται η κατά μια διάσταση επέκταση της f και στο δεύτερο με χρήση του λήμματος Zorn αποδεικνύεται το θεώρημα. Αρχίζουμε με το επόμενο.

Λημμα 5.3. *Έστω X, Y, p, f όπως στο προηγούμενο θεώρημα. Δηλαδή Y είναι υπόχωρος του X, p είναι υπογραμμικό, $f : Y \to \mathbb{R}$ είναι γραμμική, και $f(y) \leq p(y)$ για $y \in Y$. Υποθέτουμε ότι $z_0 \in X$ και $z_0 \notin Y$. Τότε υπάρχει $\tilde{f} : Z =< Y \cup \{z_0\} >\to \mathbb{R}$ γραμμική επέκταση της f ώστε $\tilde{f}(z) \leq p(z)$ για κάθε $z \in Z$.*

Αποδειξη. Όπως έχουμε δεί, κάθε $z \in Z =< Y \cup \{z_0\} >$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $z = y + \lambda z_0$ με $y \in Y$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Άρα κάθε γραμμική επέκταση $\tilde{f}$ της f θα έχει τη μορφή

$$\tilde{f}(y + \lambda z_0) = f(y) + \lambda c \quad \text{για κάποιο } c \in \mathbb{R}.$$

Το ζητούμενο είναι να προσδιορίσουμε την τιμή του c ώστε να ισχύει $f(y) + \lambda c \leq p(y + \lambda z_0)$ για κάθε $y \in Y$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ας παρατηρήσουμε το εξής:

Για $x, y \in Y$ ισχύει:

$$\begin{aligned} f(x-y) &\leq p(x-y) \quad \text{ή} \\ f(x) - f(y) &\leq p(x-y) = p(x + z_0 - y - z_0) \\ &\leq p(x + z_0) + p(-y - z_0). \end{aligned}$$

Άρα

$$-p(-y - z_0) - f(y) \leq p(x + z_0) - f(x).$$

Επειδή τα x, y επιλέγησαν τυχαία, έχουμε ότι

$$\sup_{y \in Y}\{-p(-y - z_0) - f(y)\} \leq \inf_{x \in Y}\{p(x + z_0) - f(x)\}.$$

Άρα υπάρχει $c_0 \in \mathbb{R}$, ώστε

$$\sup_{y \in Y}\{-p(-y - z_0) - f(y)\} \leq c_0 \leq \inf_{x \in Y}\{p(x + z_0) - f(x)\}$$

Ισχυρισμος. Η $\tilde{f} : Z \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως:

$$\tilde{f}(y + \lambda z_0) = f(y) + \lambda c_0$$

ικανοποιεί την $\tilde{f}(z) \leq p(z)$ για κάθε $z \in Z$.

Αποδειξη του ισχυρισμου. Αν $\lambda = 0$, τότε $z \in Y$ και

$$\tilde{f}(z) = f(z) \leq p(z).$$

Αν $\lambda > 0$, τότε:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y + \lambda z_0) &= \lambda(f(\frac{y}{\lambda}) + c_0) \\ &\leq \lambda(f(\frac{y}{\lambda}) + p(\frac{y}{\lambda} + z_0) - f(\frac{y}{\lambda})) \\ &= p(y + \lambda z_0). \end{aligned}$$

Τέλος, αν $\lambda < 0$, ισχύει

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y + \lambda z_0) &= -\lambda(f(-\frac{y}{\lambda}) - c_0) \\ &\leq -\lambda(f(-\frac{y}{\lambda}) + p(-\frac{y}{\lambda} - z_0) + f(\frac{y}{\lambda})) \\ &= p(y + \lambda z_0). \end{aligned}$$

Επομένως η τιμή $\tilde{f}(z_0) = c_0$ μας δίνει την επέκταση $\tilde{f} : Z \to \mathbb{R}$, της f που ικανοποιεί

$$\tilde{f}(z) \leq p(z) \quad \forall z \in Z.$$

και το τελευταίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

□

Αποδειξη του θεωρηματος. Έχοντας αποδείξει ότι η κατά μία διάσταση επέκταση της f είναι δυνατή, θα ολοκληρώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος, με χρήση του λήμματος Zorn.

Θεωρούμε το σύνολο

$$\begin{aligned}\mathcal{E} = \{(Z, f_Z) : Z \hookrightarrow X, f_Z : Z \to \mathbb{R} \text{ γραμμική},\\ Y \hookrightarrow Z,\ f_Z|Y = f,\ f_Z(z) \leq p(z)\ \forall z \in Z\}.\end{aligned}$$

Καταρχήν το $\mathcal{E}$ είναι μη κενό αφού $(Y, f) \in \mathcal{E}$. Ορίζουμε μια μερική διάταξη στο σύνολο $\mathcal{E}$ με τον κανόνα $(Z_1, f_{Z_1}) \prec (Z_2, f_{Z_2})$ αν

$$Z_1 \hookrightarrow Z_2 \quad \text{και} \quad f_{Z_2}|Z_1 = f_{Z_1}.$$

Παρατηρούμε ότι κάθε $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ αλυσίδα (δηλαδή γραμμικά διατεταγμένο), έχει ένα άνω φράγμα. Πράγματι, ο $\overline{Z} = \cup\{Z : (Z, f_Z) \in \mathcal{E}'\}$ είναι υπόχωρος γιατί η $\mathcal{E}'$ είναι αλυσίδα, η $\overline{f}_{\overline{Z}} = \cup\{f_Z : (Z, f_Z) \in \mathcal{E}'\}$ είναι καλά ορισμένη γραμμική, $\overline{f}_{\overline{Z}} : \overline{Z} \to \mathbb{R}$ και $(\overline{Z}, \overline{f}_{\overline{Z}}) \in \mathcal{E}$. και τέλος είναι άνω φράγμα του $\mathcal{E}'$.

Άρα το μερικά διατεταγμένο σύνολο $(\mathcal{E}, \prec)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του λήμματος του Zorn και επομένως υπάρχει $(Z, f_Z) \in \mathcal{E}$ που είναι μεγιστικό. Θα δείξουμε ότι υποχρεωτικά $Z = X$ και κατά συνέπεια η f_Z είναι η ζητούμενη επέκταση της συνάρτησης f. Αν $Z \neq X$, τότε επιλέγουμε $z_0 \in X \setminus Z$, και με βάση το λήμμα, υπάρχει γραμμική επέκταση $\tilde{f}_Z$ της f_Z με $\tilde{f}_Z :< Z \cup \{z_0\} > \to \mathbb{R}$ ώστε $\tilde{f}_Z(z) \leq p(z)$ για κάθε $z \in < Z \cup \{z_0\} >$. Αλλά αυτό αντιβαίνει την μεγιστική ιδιότητα του (Z, f_Z), άτοπο. Η απόδειξη του θεωρήματος Hahn – Banach έχει ολοκληρωθεί. □

Παρατηρησεις. (1) Το ουσιαστικό επιχείρημα της απόδειξης, περιέχεται στο Λήμμα της κατά μία διάσταση επέκτασης. Το δεύτερο μέρος που χρησιμοποιεί το Zorn είναι η γενικευμένη επαγωγή. Αν για παράδειγμα ο X έχει αριθμήσιμη Hamel βάση, τότε το Zorn μπορεί να αντικατασταθεί από ένα απλό επαγωγικό επιχείρημα.

(2) Είναι φυσικό να τεθεί το ερώτημα αν ένα αντίστοιχο θεώρημα μπορεί να αποδειχτεί για γενικούς γραμμικούς τελεστές, δηλαδή, αντί να επεκτείνουμε γραμμικά συναρτησοειδή, να επεκτείνουμε τελεστές που λαμβάνουν τιμές σε ένα χώρο Banach. Τέτοιου είδους θεώρημα εν γένει δεν ισχύει. Ανατρέχοντας στην επιλογή του c_0 στην απόδειξη του λήμματος, θα δούμε ότι αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας την διάταξη του $\mathbb{R}$ και η διάταξη του $\mathbb{R}$ είναι μη επεκτάσιμη σε χώρους πολλών διαστάσεων.

Η βασική εφαρμογή του θεωρήματος Hahn – Banach δίνεται στο επόμενο.

Πορισμα 5.4. *Έστω X χώρος με νόρμα και Y υπόχωρος του X. Αν $f : Y \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές και $M \geq 0$ ώστε $f(y) \leq M\|y\|$ για όλα τα $y \in Y$, τότε υπάρχει $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ γραμμική επέκταση του f, ώστε $\tilde{f}(x) \leq M\|x\|$ για όλα τα $x \in X$.*

Ειδικότερα, αν $M = \|f\|$, τότε $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

Αποδειξη. Παρατηρούμε ότι η $p(x) = M\|x\|$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές και το αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος Hahn – Banach. $\square$

Παρατηρησεις. (1) Ας παρατηρήσουμε ότι για X απειροδιάστατο χώρο με νόρμα, χωρίς τη χρήση του θεωρήματος Hahn – Banach, το μόνο φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές που μπορούμε να εξασφαλίσουμε, είναι το μηδενικό, δηλαδή $f(x) = 0\ \forall x \in X$. Το Hahn – Banach, μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μη τετριμμένων ως εξής:

Θεωρούμε έναν υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης Y του X και οποιοδήποτε $f : Y \to \mathbb{R}$ γραμμικό και μη μηδενικό. Λόγω του ότι η διάσταση του Y είναι πεπερασμένη, όπως έχουμε δείξει, το f θα είναι φραγμένο. Το πόρισμα μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό, φραγμένο, ώστε η $\tilde{f}$ να επεκτείνει το f, άρα $\tilde{f} \neq 0$.

(2) Ας υποθέσουμε ότι ο X είναι πεπερασμένης διάστασης χώρος με νόρμα, και ο Y γραμμικός υπόχωρός του. Είναι γνωστό ότι κάθε γραμμική $f : Y \to \mathbb{R}$, επεκτείνεται σε γραμμική $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ η οποία θα είναι και συνεχής, αφού ο X είναι πεπερασμένης διάστασης. Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς χρησιμοποιώντας τον ορισμό της νόρμας των συναρτησοειδών, ότι $\|f\| \leq \|\tilde{f}\|$. Το θεώρημα Hahn – Banach εξασφαλίζει σ' αυτήν την περίπτωση όπως είδαμε, την ύπαρξη γραμμικής επέκτασης $\tilde{f}$, ώστε $\|f\| = \|\tilde{f}\|$.

1. Συνέπειες του θεωρήματος Hahn – Banach

Προταση 5.5. *Έστω X χώρος με νόρμα και $x_0 \in X$. Τότε υπάρχει $f \in X^*$ με $\|f\| = 1$ και $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Αποδειξη. Αν $x_0 = 0$, το αποτέλεσμα ισχύει για κάθε $f \in X^*$. Έστω λοιπόν $x_0 \neq 0$. Τότε θέτουμε $Y =< x_0 >$ και ορίζουμε $f : Y \to \mathbb{R}$ με $f(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\|$. Η f είναι γραμμική, και $|f(y)| = \|y\|,\ \forall y \in Y$. Από το θεώρημα Hahn – Banach η f επεκτείνεται γραμμικά σε μια $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$, ώστε $|\tilde{f}(x)| \leq \|x\|$, για όλα τα $x \in X$. Άρα $\|\tilde{f}\| \leq 1$. Επειδή $\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$, θα έχουμε ότι $\tilde{f}(\frac{x_0}{\|x_0\|}) = 1$. Συνεπώς $\|\tilde{f}\| = 1$ και το $\tilde{f}$ είναι το ζητούμενο συνάρτησοειδές του X^*. $\square$

Η παραπάνω πρόταση έχει ως συνέπεια ότι η νόρμα στον X, που είναι εκ των προτέρων καθορισμένη, εκτιμάται και μέσω του X^*, όπως ακριβώς και η νόρμα του X^* ορίζεται μέσω του X. Έχουμε δηλαδή την παρακάτω πρόταση:

Προταση 5.6. *Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε για κάθε $x \in X$,*

$$\|x\| = \sup\{x^*(x) : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\}.$$

Αποδειξη. Έστω $x \in X$. Από την προηγούμενη πρόταση, έχουμε ότι υπάρχει $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$ ώστε $x^*(x) = \|x\|$. Επίσης, για κάθε $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| \leq 1$,

$$|x^*(x)| \leq \|x^*\| \cdot \|x\|, \quad \text{δηλαδή } x^*(x) \leq \|x\|$$

και το τελευταίο ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Παρατηρησεις. (1) Επειδή υπάρχει $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$, ώστε $x^*(x) = \|x\|$, έχουμε ειδικότερα ότι

$$\|x\| = \max\{x^*(x) : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\}.$$

(2) Από την πρόταση 5.5, έχουμε επίσης ότι ο X^* *διαχωρίζει τα σημεία του* X, δηλαδή για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$, υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε $x^*(x) \neq x^*(y)$. (Πράγματι. Θέτουμε $z = x - y$. Τότε $z \neq 0$ και από την πρόταση 5.5, υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε $x^*(z) = \|z\| \neq 0$, οπότε $x^*(x) - x^*(y) \neq 0$.)

Πρόταση 5.7. *Έστω X χώρος με νόρμα, Y κλειστός υπόχωρος του X και $x_0 \in X \setminus Y$. Τότε υπάρχει $f \in X^*$ με $\|f\| = 1$ ώστε $f(y) = 0 \; \forall y \in Y$ και*

$$f(x_0) = d(x_0, Y) = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in Y\}.$$

Συνεπώς, αν Y γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X, τότε υπάρχει $f \in X^*$, $\|f\| = 1$ με $f|Y = 0$.

Απόδειξη. Θέτουμε $Z =< Y \cup \{x_0\} >$ και $d = d(x_0, Y)$. Ορίζουμε την γραμμική συνάρτηση

$$f : Z \to \mathbb{R}$$

με $f(y + \lambda x_0) = \lambda d$, για $y \in Y$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Για κάθε $\lambda \neq 0$ και $y \in Y$, έχουμε,

$$\|y + \lambda x_0\| = |\lambda| \cdot \|\frac{y}{\lambda} + x_0\| \geq |\lambda| \cdot d(x_0, Y) = |f(y + \lambda x_0)|$$

και για κάθε $y \in Y$,

$$f(y) = 0.$$

Άρα για κάθε $z = y + \lambda x_0 \in Z$, έχουμε

$$|f(z)| \leq \|z\|.$$

Επίσης $f(x_0) = d$. Από το θεώρημα Hahn – Banach, υπάρχει γραμμική επέκταση $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ της f, ώστε $|\tilde{f}(x)| \leq \|x\|$, για κάθε $x \in X$, δηλαδή $\|\tilde{f}\| \leq 1$.

Μένει να δειχτεί ότι $\|\tilde{f}\| = 1$. Πράγματι. Έστω $(y_n)_n$ ακολουθία στον Y ώστε $\|y_n - x_0\| \to d(x_0, Y)$. Τότε $|\tilde{f}(y_n - x_0)| \leq \|\tilde{f}\| \cdot \|y_n - x_0\|$ ή

$$d \leq \|\tilde{f}\| \cdot \|y_n - x_0\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

οπότε παίρνοντας το όριο όταν $n \to \infty$, $d \leq \|\tilde{f}\| \cdot d$ δηλαδή $\|\tilde{f}\| \geq 1$. Επειδή $\|\tilde{f}\| \leq 1$, έχουμε $\|\tilde{f}\| = 1$. □

Πρόταση 5.8. *Έστω X χώρος με νόρμα. Αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος, τότε και ο X είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Εφ' όσον ο X^* είναι διαχωρίσιμος και η μοναδιαία σφαίρα $S_{X^*} = \{x^* \in X^* : \|x^*\| = 1\}$ είναι διαχωρίσιμη. Έστω λοιπόν $D = \{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολό της. Από τον ορισμό της νόρμας στον X^*, μπορούμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να επιλέξουμε $x_n \in B_X$ ώστε $x_n^*(x_n) > \frac{1}{2}$. Θέτουμε $Y =< \{x_n : n \in \mathbb{N}\} >$.

Ισχυριζόμαστε ότι $\overline{Y} = X$, πράγμα που σημαίνει ότι ο X είναι διαχωρίσιμος. Πράγματι. Ας υποθέσουμε προς απαγωγή σε άτοπο, ότι αυτό δε συμβαίνει. Τότε από την προηγούμενη πρόταση, υπάρχει $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$, ώστε $x^*|\overline{Y} = 0$. Επειδή $x_n \in B_X$, έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|x^* - x_n^*\| &\geq |(x^* - x_n^*)(x_n)| \\ &= |x^*(x_n) - x_n^*(x_n)| \\ &= |x_n^*(x_n)| > \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού το $D = \{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στην S_{X^*}. □

Παρατήρηση. Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης, δεν ισχύει. Όπως θα δούμε $\ell_1^* = \ell_\infty$ και ο ℓ_∞ δεν είναι διαχωρίσιμος.

Λήμμα 5.9. *Έστω Y γνήσιος κλειστός υπόχωρος ενός χώρου με νόρμα X. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $x \in S_X$ με $d(x, Y) > 1 - \epsilon$.*

Απόδειξη. Από την πρόταση 5.7 έχουμε ότι υπάρχει $x^* \in S_{X^*}$ με $x^*|Y = 0$. Επειδή

$$1 = \|x^*\| = \sup\{x^*(x) : x \in S_X\}$$

για δοθέν $\epsilon > 0$, υπάρχει $x \in S_X$ ώστε

$$x^*(x) > 1 - \epsilon.$$

Επειδή $\|x^*\| = 1$, για κάθε $y \in Y$,

$$|x^*(x-y)| \leq \|x-y\|,$$

και επειδή $x^*(y) = 0$, έχουμε

$$1 - \epsilon < |x^*(x)| \leq \|x-y\| \quad \forall y \in Y.$$

Άρα $d(x, Y) = \inf\{\|x-y\| : y \in Y\} > 1 - \epsilon$. □

Θεώρημα 5.10 (Riesz). *Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε η B_X είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο X είναι πεπερασμένης διάστασης.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι αν ο X είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε είναι ισομορφικός με τον $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. Αν $T : X \to \mathbb{R}^n$ ο ισομορφισμός, τότε $T(B_X)$ είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και άρα συμπαγές. Συνεπώς $B_X = T^{-1}(T(B_X))$ συμπαγές στον X.

Έστω λοιπόν ότι ο X είναι απειροδιάστατος. Επιλέγουμε με επαγωγή μια ακολουθία $(x_n)_n$ στην S_X ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x_{n+1}, < x_1, \dots, x_n >) > \frac{1}{2}.$$

Η κατασκευή γίνεται ως εξής.

Επιλέγουμε $x_1 \in S_X$. Έστω ότι $x_1, \dots, x_n$ έχουν επιλεγεί έτσι ώστε $d(x_{i+1}, < x_1, \dots, x_i >) > \frac{1}{2}$ για κάθε $i < n$. Τότε ο γραμμικός χώρος $< x_1, \dots, x_n >$ είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X αφού είναι πεπερασμένης διάστασης. Άρα από το προηγούμενο λήμμα, υπάρχει $x_{n+1} \in S_X$ ώστε $d(x_{n+1}, < x_1, \dots, x_n >) > \frac{1}{2}$.

Άρα για κάθε $n > m$, $\|x_n - x_m\| > \frac{1}{2}$ και συνεπώς η $(x_n)_n$ δεν έχει βασική υπακολουθία, συνεπώς δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Από το γνωστό κριτήριο συμπάγειας σε μετρικούς χώρους (το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν κάθε ακολουθία στο K έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο K), έχουμε ότι η B_X δεν είναι συμπαγής. □

2. Η κανονική εμφύτευση του X στον X^{**}.

Έστω X χώρος με νόρμα και X^* ο δυϊκός του X. Έχουμε δείξει ότι ο X^* είναι χώρος Banach ανεξάρτητα αν ο X είναι πλήρης ή όχι. Τελείως φυσιολογικά ορίζεται ο $(X^*)^*$, ο δυϊκός του X^* που καλείται ο *δεύτερος δυϊκός* του X. Ο σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να μελετήσουμε την σχέση του X και του X^{**}. Πρίν προχωρήσουμε αξίζει να σχολιάσουμε την σχέση του X και του X^*. Έχουμε δει στην περίπτωση των χώρων Hilbert ότι ο X ταυτίζεται με τον X^* (δηλαδή κάθε χώρος Hilbert είναι αυτοσυζυγής). Αυτό είναι μια αξιοσημείωτη ιδιότητα των χώρων Hilbert, που όμως δεν περιγράφει την γενική εικόνα δυϊσμού μεταξύ χώρων Banach. Η λέξη *δυϊσμός*, χρησιμοποιείται για να περιγράφει ποικίλα φαινόμενα των μαθηματικών, της φυσικής αλλά και της φιλοσοφίας, (π.χ. αναφέρεται ο δυϊσμός της ψυχής και του σώματος ή ο δυϊσμός υλικής και κυματικής φύσης στα σωματίδια της κβαντομηχανικής). Η πλησιέστερη και περισσότερο κατανοητή λέξη για τον δυϊσμό είναι η *συμπληρωματικότητα*. Στην περίπτωση των χώρων Banach έχουμε την περίπτωση των χώρων Hilbert $X = H$ όπου $H \equiv H^*$ αλλά αν $X = \ell_1(\mathbb{N})$ θα δούμε ότι $X^* = \ell_\infty(\mathbb{N})$. Χωρίς να μπούμε σε λεπτομέρειες, η νόρμα του $\ell_1(\mathbb{N})$ είναι η ''μεγαλύτερη'' δυνατή και επιβάλλει η νόρμα του δυϊκού $X^* = \ell_\infty(\mathbb{N})$ να είναι η ''μικρότερη'' δυνατή. Γενικά δεν ελπίζουμε, πάντα με την εξαίρεση των χώρων Hilbert, ο X και ο X^* να έχουν παρόμοια δομή. Αν όμως θεωρήσουμε τον X^{**} δυϊκό του X^*, τότε ο δυϊσμός μας επαναφέρει σε δομές που προσομοιάζουν προς αυτή του X και αυτό το φαινόμενο θα μελετήσουμε.

Θα αρχίσουμε από μια γενική αρχή που ουσιαστικά αποτελεί την αλγεβρική βάση των αποτελεσμάτων που θα παρουσιάσουμε.

Ο δυϊσμός ενός συνόλου Γ και μιας κλάσης συναρτήσεων $\mathcal{F}(\Gamma)$.

Έστω Γ ένα σύνολο και $D \subset \mathcal{F}(\Gamma) = \{f : \Gamma \to \mathbb{R}\}$ μια οικογένεια πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το Γ. Τότε για κάθε $\gamma \in \Gamma$ αντιστοιχεί μια πραγματική συνάρτηση

$$\hat{\gamma} : D \to \mathbb{R}$$

που ορίζεται με τον κανόνα $\hat{\gamma}(f) = f(\gamma)$. Άρα υπάρχει μια απεικόνιση

$$\widehat{\ } : \Gamma \to \mathcal{F}(D).$$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι αν για κάθε $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ με $\gamma_1 \neq \gamma_2$ υπάρχει $f \in D$ με $f(\gamma_1) \neq f(\gamma_2)$ τότε η $\widehat{\ }$ είναι 1-1.

Ας δούμε δύο παραδείγματα που σχετίζονται με αυτή την αρχή.

Παραδειγμα (Τα μέτρα Dirac). Έστω $\Gamma = [0,1]$ και $D = C[0,1]$. Τότε για κάθε $t \in [0,1]$ ορίζουμε $\delta_t : C[0,1] \to \mathbb{R}$ με $\delta_t(f) = f(t)$.

Ιδιότητες των δ_t, $t \in [0,1]$.

1. Το δ_t είναι γραμμικό.

Πράγματι, $\delta_t(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(t) = f_1(t) + f_2(t) = \delta_t(f_1) + \delta_t(f_2)$. Παρόμοια διαπιστώνεται ότι $\delta_t(\lambda f) = \lambda \cdot \delta_t(f)$.

2. Το δ_t είναι φραγμένο και $\|\delta_t\| = 1$. Πράγματι, αν $f \in C[0,1]$ με $\|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\} \leq 1$, τότε $|\delta_t(f)| \leq 1$ και επίσης $\delta_t(\mathbf{1}) = 1$, άρα $\|\delta_t\| = 1$.

3. Αν $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, τότε $\|\delta_{t_1} - \delta_{t_2}\| = 2$. Πράγματι, από την τριγωνική ιδιότητα της νόρμας,

$$\|\delta_{t_1} - \delta_{t_2}\| \leq \|\delta_{t_1}\| + \|\delta_{t_2}\| \leq 2.$$

Επίσης, εύκολα μπορούμε να κατασκευάσουμε $f \in C[0,1]$ ώστε $\|f\| = 1$, $f(t_1) = 1$ και $f(t_2) = -1$. Τότε $(\delta_{t_1} - \delta_{t_2})(f) = f(t_1) - f(t_2) = 2$.

4. Ο δυϊκός του $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ είναι μη διαχωρίσιμος. Αυτό γιατί το σύνολο $\{\delta_t : t \in [0,1]\}$ είναι υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $(C[0,1])^*$ και από το προηγούμενο, για $t_1 < t_2$, $\|\delta_{t_1} - \delta_{t_2}\| = 2$, άρα ο $(C[0,1])^*$ δεν είναι διαχωρίσιμος.

Παρατηρηση. Το γεγονός ότι το δ_t είναι γραμμικό συναρτησοειδές, είναι αλγεβρική ιδιότητα και είναι ανεξάρτητο από το ποια νόρμα έχουμε επιλέξει στον $C[0,1]$. Αντίθετα το ότι είναι φραγμένο (συνεχές) εξαρτάται ουσιαστικά από την supremum νόρμα στον $C[0,1]$.

Γαι παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τον χώρο $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$, δηλαδή

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$$

τότε τα δ_t δεν είναι φραγμένα.

Η απόδειξη αυτού γίνεται ως εξής:

Έστω $t \in [0,1]$. Για να δείξουμε ότι το δ_t δεν είναι φραγμένο, αρκεί για κάθε $N \in \mathbb{N}$ να βρούμε $f \in C[0,1]$ με $\|f\|_1 \leq 1$ και $\delta_t(f) = f(t) \geq N$. Τότε

$$\delta_t(B((C[0,1], \|\cdot\|_1), 1))$$

δεν είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα το δ_t δεν είναι συνεχές.

Είναι εύκολο να κατασκευάσουμε $f \in C[0,1]$, $0 \leq f(s) \leq 1$ $\forall s \in [0,1]$, $f(t) = 1$ και $\int_0^1 f(s)ds \leq \frac{1}{N}$. Παρατηρούμε ότι $\delta_t(f) = 1$ και $\|Nf\|_1 \leq 1$, άρα $\delta_t(Nf) = N$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Με μικρές παραλλαγές στην απόδειξη, προκύπτει ότι τα δ_t δεν είναι συνεχή στον $(C[0,1], \|\cdot\|_p)$ με $1 \leq p < \infty$.

Παραδειγμα. Το δεύτερο παράδειγμα σχετίζεται με το θεώρημα που σκοπεύουμε να αποδείξουμε και προέρχεται από την γραμμική άλγεβρα.

Έστω X διανυσματικός χώρος. Θυμίζουμε ότι ο αλγεβρικός δυϊκός $X^\sharp$ είναι ο διανυσματικός χώρος των γραμμικών συναρτησοειδών με πεδίο ορισμού τον X. Για $x \in X$, ορίζουμε

$$\hat{x} : X^\sharp \to \mathbb{R} \quad \text{με } \hat{x}(f) = f(x).$$

Όπως στην περίπτωση του προηγούμενου παραδείγματος, αποδεικνύεται ότι κάθε $\hat{x}$ είναι γραμμικό, άρα $\hat{x} \in (X^\sharp)^\sharp = X^{\sharp\sharp}$. Περαιτέρω ισχύει ότι η $\widehat{\ }: X \to X^{\sharp\sharp}$ είναι γραμμική, 1-1. Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του θεωρήματος που θα δείξουμε και αφήνεται σαν άσκηση.

Το συμπέρασμα είναι ότι υπάρχει κανονική εμφύτευση του X στον $X^{\sharp\sharp}$.

Το θεώρημα της κανονικής εμφύτευσης του X στον X^{**} για χώρους με νόρμα είναι το ανάλογο του προηγούμενου παραδείγματος όπου όμως λαμβάνεται υπ΄ όψιν και η νόρμα του X.

Θεωρημα 5.11 (Κανονική εμφύτευση του X στον X^{**}.). *Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε υπάρχει γραμμικός τελεστής*

$$\widehat{\ }: X \to X^{**}$$

ώστε

(1) $\|x\|_X = \|\hat{x}\|_{X^{**}}$.
(2) *Για κάθε $x^* \in X^*$ ισχύει $x^*(x) = \hat{x}(x^*)$.*

Αποδειξη. Για $x \in X$ ορίζουμε $\hat{x} : X^* \to \mathbb{R}$ με τον κανόνα $\hat{x}(x^*) = x^*(x)$ και δείχνουμε ότι η $\hat{x}$ είναι γραμμική απεικόνιση. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\hat{x}(x^* + y^*) &= (x^* + y^*)(x) \\
&= x^*(x) + y^*(x) = \hat{x}(x^*) + \hat{x}(y^*) \\
\hat{x}(\lambda x^*) &= (\lambda x^*)(x) \\
&= \lambda \cdot x^*(x) = \lambda \cdot \hat{x}(x^*).
\end{aligned}$$

Για να δείξουμε ότι $\|x\|_X = \|\hat{x}\|_{X^{**}}$ θα χρησιμοποιήσουμε την εναλλακτική περιγραφή της $\|x\|_X$ που είναι συνέπεια του θεωρήματος Hahn - Banach δηλαδή ότι

$$\|x\| = \sup\{|x^*(x)| : \|x^*\| \leq 1\}.$$

Δεδομένου ότι $\hat{x}(x^*) = x^*(x)$ καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned}\|\hat{x}\|_{X^{**}} &= \sup\{\hat{x}(x^*) : \|x^*\| \leq 1\}\\ &= \sup\{x^*(x) : \|x^*\| \leq 1\}\\ &= \|x\|_X.\end{aligned}$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Το (2) του θεωρήματος είναι άμεση συνέπεια του ορισμού του $\hat{x}$. Το μόνο που μένει να ελέγξουμε είναι η γραμμικότητα του $\widehat{\ }$.

Πράγματι, για $x, y \in X$, θα δείξουμε ότι

$$\widehat{x+y} = \hat{x} + \hat{y}. \tag{1}$$

Δεδομένου ότι $\widehat{x+y}$, $\hat{x}+\hat{y}$ είναι συναρτησοειδή θα ελέγξουμε την παραπάνω ιδιότητα κατά σημείο. Δηλαδή, η (1) ισχύει αν και μόνον αν για κάθε $x^* \in X^*$,

$$\widehat{x+y}(x^*) = (\hat{x}+\hat{y})(x^*). \tag{2}$$

Όμως η (2) είναι άμεση συνέπεια της γραμμικότητας της x^*.

Με παρόμοιο επιχείρημα διαπιστώνουμε ότι

$$\widehat{\lambda x} = \lambda \cdot \hat{x}.$$

Άρα η $\widehat{\ }$ είναι γραμμική και η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Παρατηρηση. (1) Η γραμμικότητα της $\widehat{\ }$ και η ισότητα των νορμών σημαίνει ότι η κανονική εμφύτευση του X στο X^{**} είναι ισομετρική και όπως έχουμε αναφέρει στο κεφάλαιο 3, αυτό σημαίνει ότι διατηρείται η πλήρης γεωμετρία του X. Με άλλα λόγια, ο X μπορεί να θεωρηθεί σαν υπόχωρος του X^{**}.

(2) Μια ιδιότητα των αλγεβρικών δυϊκών απειροδιάστατων διανυσματικών χώρων, $X^\sharp$, $X^{\sharp\sharp}$, $X^{\sharp\sharp\sharp}$, ... είναι ότι έχουν γνησίως αύξουσα διάσταση. Για παράδειγμα αν ο X έχει αριθμήσιμη βάση Hamel τότε ο $X^\sharp$ έχει διάσταση ίση με την πληθικότητα του συνεχούς (δηλαδή την πληθικότητα του $\mathbb{R}$). Σε αντίθεση υπάρχουν απειροδιάστατοι χώροι Banach που η κανονική εμφύτευση του X στο X^{**} είναι επί. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι οι χώροι Hilbert. Οι χώροι X ώστε η $\widehat{\ } : X \to X^{**}$ είναι επί, ονομάζονται αυτοπαθείς (ή ανακλαστικοί) και αποτελούν μια κλάση χώρων με ενδιαφέρουσες ιδιότητες και εφαρμογές.

Μια σημαντική συνέπεια της κανονικής εμφύτευσης του X στον X^{**} είναι η πλήρωση ενός χώρου με νόρμα.

Θεωρημα 5.12. *Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε υπάρχει χώρος Banach $\tilde{X}$ και ισομετρική εμφύτευση $T : X \to \tilde{X}$ ώστε $T[X]$ να είναι πυκνός υπόχωρος του $\tilde{X}$.*

Αποδειξη. Θέτουμε $\tilde{X} = \overline{\widehat{\ }[X]} \subset X^{**}$. Επειδή ο X^{**} είναι πλήρης, έπεται ότι ο $\tilde{X}$ είναι επίσης πλήρης και ο $\widehat{\ }[X]$ είναι ισομετρικός προς τον X και πυκνός στον $\tilde{X}$. $\square$

Παρατηρηση. Όπως έχουμε αναφέρει στο κεφάλαιο 3, οι χώροι $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}) = X^*$ και $\mathcal{B}(\tilde{X}, \mathbb{R}) = (\tilde{X})^*$ είναι ισομετρικοί, άρα ο δυϊκός του X περιγράφει πλήρως τον δυϊκό της πλήρωσής του.

3. Οι δυϊκοί χώροι των $\ell_p(\mathbb{N})$

Συμβολίζουμε με X κάποιο $\ell_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$ ή τον χώρο $c_0(\mathbb{N})$. Ο χώρος X είναι χώρος ακολουθιών και τα στοιχεία του X είναι της μορφής $x = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ όπου η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ικανοποιεί τη σχέση $\left(\sum |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$, στην περίπτωση του $\ell_p(\mathbb{N})$ και τη σχέση $a_n \to 0$, στην περίπτωση του $c_0(\mathbb{N})$.

Στο κεφάλαιο 4 όπου μελετήσαμε τις σειρές σε χώρους Banach έχουμε δώσει μία εναλλακτική περιγραφή του X δηλαδή $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ όπου e_n συμβολίζει την ακολουθία που είναι παντού μηδέν εκτός της $n-$οστής θέσης όπου λαμβάνει την τιμή 1. Η σύγκλιση εδώ νοείται στη νόρμα του χώρου X.

Ας θυμηθούμε επίσης ότι τα στοιχεία της μορφής $x = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n e_n$ ορίζουν ένα πυκνό υπόχωρο του X. Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.13. *Έστω X να συμβολίζει κάποιο $\ell_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$ ή τον $c_0(\mathbb{N})$. Τότε κάθε $x^* \in X^*$ αναπαρίσταται με μια ακολουθία $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών ώστε για κάθε $x = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ να ισχύει*

$$x^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n a_n.$$

Απόδειξη. Έστω $x^* \in X^*$. Για $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $\beta_n = x^*(e_n)$ και ισχυριζόμαστε ότι η ακολουθία $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η ζητούμενη. Κατ΄ αρχάς παρατηρούμε ότι λόγω της γραμμικότητας του x^* για $x = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n e_n$

$$x^*(x) = \sum_{n=1}^{k} a_n x^*(e_n) = \sum_{n=1}^{k} a_n \beta_n.$$

Δεδομένου ότι $x = (a_1, a_2, \ldots, a_k, 0, 0, 0, \ldots)$ προκύπτει ότι σ΄ αυτή την περίπτωση

$$x^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta_n$$

όπως είναι το ζητούμενο.

Έστω τώρα $x = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ ένα οποιοδήποτε στοιχείο του X. Τότε

$$x = \lim_k \sum_{n=1}^{k} a_n e_n$$

και λόγω της συνέχειας και της γραμμικότητας του x^*

$$x^*(x) = \lim_k x^*(\sum_{n=1}^{k} a_n e_n) = \lim_k \sum_{n=1}^{k} a_n x^*(e_n) = \lim_k \sum_{n=1}^{k} \beta_n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n a_n$$

και η πρόταση αποδείχθηκε. □

Παρατηρηση. Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η αναπαράσταση που αποδείξαμε προηγουμένως δεν ισχύει όταν $X = \ell_\infty(\mathbb{N})$. Η αιτία είναι ότι τα $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στην περίπτωση του $\ell_\infty(\mathbb{N})$ δεν παράγουν πυκνό υπόχωρο του $\ell_\infty(\mathbb{N})$ άρα οι τιμές που λαμβάνει ένα συνεχές συναρτησοειδές στα $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν μπορούν να το προσδιορίσουν μοναδικά. Πρέπει επίσης να παρατηρήσουμε ότι ο κλειστός υπόχωρος που παράγουν τα $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $\ell_\infty(\mathbb{N})$ είναι ο $c_0(\mathbb{N})$. (Η απόδειξη αυτού αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη.)

Πρόταση 5.14. *Έστω X όπως στην προηγούμενη πρόταση και $x^*, y^* \in X^*$. Τότε*

(i) *Η ακολουθία $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που αναπαριστά το x^* είναι μοναδική.*

(ii) *Αν η ακολουθία $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αναπαριστά το x^* και η ακολουθία $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αναπαριστά το y^* τότε $(\beta_n+\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αναπαριστά το x^*+y^*.*

(iii) *Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και η $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αναπαριστά το x^* τότε $(\lambda\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αναπαριστά το λx^*.*

Η απόδειξη είναι εύκολη και αφήνεται στον αναγνώστη.

Το περιεχόμενο της προηγούμενης πρότασης είναι ότι το σύνολο των ακολουθιών που αναπαριστούν τα στοιχεία του X^* ορίζουν ένα διανυσματικό χώρο ακολουθιών. Το ερώτημα που φυσιολογικά τίθεται είναι αν υπάρχει πιο ακριβής περιγραφή του χώρου αυτού. Η απάντηση περιέχεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 5.15. *(α) Έστω $1 \le p < \infty$ και q το συζυγές του p. Δηλαδή $q=\infty$ αν $p=1$, ενώ για $1<p<\infty$ τα p,q ικανοποιούν τη σχέση $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Τότε για $X=\ell_p(\mathbb{N})$ και $x^*\in X^*$, αν $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η ακολουθία που αναπαριστά το x^* ισχύει $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell_q(\mathbb{N})$ και $\|x^*\|=\|(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_q$. Άρα ο X^* είναι ισομετρικός με τον $\ell_q(\mathbb{N})$.*
(β) Αν $X=c_0(\mathbb{N})$ τότε ο X^* είναι ισομετρικός με τον $\ell_1(\mathbb{N})$.

Παρατήρηση. (α) Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του σημαντικού αυτού θεωρήματος ας δούμε κάποιες συνέπειες. Κατ΄ αρχάς για $1<p<\infty$ προκύπτει ότι $\ell_p(\mathbb{N})^*=\ell_q(\mathbb{N})$ και $\ell_q(\mathbb{N})^*=\ell_p(\mathbb{N})$. Άρα $\ell_p(\mathbb{N})^{**}=\ell_p(\mathbb{N})$ δηλαδή οι χώροι $\ell_p(\mathbb{N})$, $1<p<\infty$ είναι αυτοπαθείς. Αντίθετα $c_0(\mathbb{N})^*=\ell_1(\mathbb{N})$ και $\ell_1(\mathbb{N})^*=\ell_\infty(\mathbb{N})$ άρα ο χώρος $c_0(\mathbb{N})$ δεν είναι αυτοπαθής ούτε ο χώρος $\ell_1(\mathbb{N})$ είναι αυτοπαθής. Το τελευταίο ισχύει διότι ο $\ell_\infty(\mathbb{N})$ είναι μη διαχωρίσιμος επομένως και ο $\ell_\infty(\mathbb{N})^*=\ell_1(\mathbb{N})^{**}$ είναι μη διαχωρίσιμος ενώ ο $\ell_1(\mathbb{N})$ είναι διαχωρίσιμος.
(β) Αξίζει να δούμε πως μεταβάλλεται το δυϊκό q του p όταν το p διατρέχει την ημιευθεία $[1,\infty)$. Ας παρατηρήσουμε ότι όταν $p\in(1,2]$ τότε $q\in[2,\infty)$ και αντίστροφα. Ειδικότερα δε για $p=2$ έπεται $q=2$ και το θεώρημα επιβεβαιώνει κάτι που γνωρίζουμε από τους χώρους Hilbert ότι δηλαδή $\ell_2(\mathbb{N})^*=\ell_2(\mathbb{N})$. Επίσης αν $p\to 1$ τότε $q\to\infty$ και αν $p\to 2$ τότε $q\to 2$. Συνοψίζοντας, οι $\ell_p(\mathbb{N})$, $1<p<\infty$ είναι αυτοπαθείς και οι $c_0(\mathbb{N}),\ell_1(\mathbb{N})$ δεν είναι αυτοπαθείς.

Απόδειξη του θεωρήματος. Θα αποδείξουμε το θεώρημα για $X=\ell_p(\mathbb{N})$, $1<p<\infty$. Οι περιπτώσεις $\ell_1(\mathbb{N})$ και $c_0(\mathbb{N})$ αποδεικνύονται με παρόμοια επιχειρήματα. Το βασικό εργαλείο για την απόδειξη είναι η ανισότητα Hölder που αναφέρει για δυο ακολουθίες πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,$(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $1<p<\infty$ ισχύει:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n\beta_n| \le \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p\cdot\|(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_q$$

όπου το q είναι το δυϊκό του p.

Έστω τώρα $x^*\in\ell_p(\mathbb{N})^*$ και $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία που το αναπαριστά. Θα δείξουμε ότι:

$$\begin{aligned}\|x^*\| &= \sup\{|x^*(x)| : \|x\|_{\le}1\}\\ &\overset{o\rho}{=} \sup\{|\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n a_n| : \big(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\big)^{\frac{1}{p}}\le 1\} = \big(\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|^q\big)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

Οι δύο πρώτες ισότητες είναι προφανείς. Για να δείξουμε την τελευταία αποδεικνύουμε τις δύο ανισότητες που την προσδιορίζουν. Πράγματι από Hölder προκύπτει

$$\begin{aligned}&\sup\{|\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n a_n| :\ \big(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\big)^{\frac{1}{p}}\leq 1\}\\ \leq&\sup\{\|(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_q\cdot\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p :\ \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p\leq 1\}\\ \leq&\|(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_q.\end{aligned}$$

Άρα $\|x^*\|\leq\|(\beta_n)\|_q$.

Η αντίστροφη ανισότητα βασίζεται στο επόμενο:

Ισχυρισμος. Αν $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell_q(\mathbb{N})$ τότε υπάρχει $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell_p(\mathbb{N})$ με $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p=1$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\beta_n=\|(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_q$.

Αποδειξη του ισχυρισμου. Αν $\beta_n=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ το αποτέλεσμα είναι προφανές. Σε διαφορετική περίπτωση θέτουμε $\lambda=\|(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_q>0$ και θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_n=\mathrm{sgn}(\beta_n)\big(\frac{|\beta_n|}{\lambda}\big)^{\frac{q}{p}}$ (όπου $\mathrm{sgn}(a)=1$ αν $a\geq 0$ και $\mathrm{sgn}(a)=-1$ διαφορετικά). Παρατηρήστε ότι $\mathrm{sgn}(a)\cdot a=|a|$ για κάθε $a\in\mathbb{R}$. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p^p=\frac{\|(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_q^q}{\lambda^q}=1$$

και άρα $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p=1$.

Επίσης

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\beta_n&=\frac{1}{\lambda^{\frac{q}{p}}}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{sgn}(\beta_n)|\beta_n|^{\frac{q}{p}}\beta_n=\frac{1}{\lambda^{\frac{q}{p}}}\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|^{\frac{q}{p}+1}=\frac{1}{\lambda^{\frac{q}{p}}}\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|^{\frac{p+q}{p}}\\&=\frac{1}{\lambda^{\frac{q}{p}}}\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|^{\frac{pq}{p}}=\frac{1}{\lambda^{\frac{q}{p}}}\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|^{q}=\frac{1}{\lambda^{\frac{q}{p}}}\lambda^q=\lambda^{q-\frac{q}{p}}=\lambda\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $p+q=pq$ που ισχύει για δυϊκά ζεύγη (p,q). □

Έχοντας αποδείξει τον ισχυρισμό έπεται άμεσα ότι

$$\sup\{|\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n a_n| :\ \big(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\big)^{\frac{1}{p}}\leq 1\}\geq\|(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_q$$

και άρα $\|x^*|\geq\|(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_q$.

Επομένως $\|x^*|=\|(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_q$. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Στις επόμενες ασκήσεις X είναι ένας χώρος με νόρμα.

1. Έστω Y υπόχωρος του X και $x_0\in X$.

(i) Δείξτε ότι

$$\begin{aligned}\rho(x_0,Y)&=\sup\{|x^*(x)| :\ x^*\in X^*,\ \|x^*\|=1,\ Y\subset\mathrm{Ker}\,x^*\}\\&=\max\{|x^*(x)| :\ x^*\in X^*,\ \|x^*\|=1,\ Y\subset\mathrm{Ker}\,x^*\}.\end{aligned}$$

(ii) Αν $x^*\in X^*$, με $\|x^*\|=1$ και $Y=\mathrm{Ker}\,x^*$, δείξτε ότι $\rho(x_0,\mathrm{Ker}\,x^*)=|x^*(x_0)|$.

2. Έστω Y υπόχωρος του X. Δείξτε ότι

(i) $\overline{Y}=\cap\{\mathrm{Ker}\,x^* :\ x^*\in X^*,\ Y\subset\mathrm{Ker}\,x^*\}$.

(ii) $\{0\}=\cap\{\mathrm{Ker}\,x^* :\ x^*\in X^*\}$.

3. Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι υπάρχει αριθμήσιμο υποσύνολο $\{x_n^* : n = 1, 2, \dots\}$ της μοναδιαίας σφαίρας του X^* ώστε $\{0\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ker} x_n^*$.
(Υπόδειξη: Αν $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ πυκνό υποσύνολο της μοναδιαίας σφαίρας του X θεωρήστε το σύνολο $\{x_n^* : n = 1, 2, \dots\}$ όπου για κάθε n, $x_n \in X^*$ με $\|x_n^*\| = 1$ και $x_n^*(x_n) = 1$.)

4. Έστω Y υπόχωρος του X με την ιδιότητα αν $x^* \in X^*$ και $x^*|Y = 0$ τότε $x^* = 0$. Δείξτε ότι ο Y είναι πυκνός στον X.

5. Έστω $\{x_1, \dots, x_n\}$ γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του X, και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε $x^*(x_i) = \lambda_i$ για κάθε $i = 1, \dots, n$.

6. Έστω Y υπόχωρος του X. Για $x^* \in X^*$ ορίζουμε $R(x^*) = x^*|Y$ (όπου $x^*|Y : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι ο περιορισμός του X στον Y). Δείξτε ότι $R : X^* \longrightarrow Y^*$ φραγμένος γραμμικός τελεστής και $R[B_{X^*}[0,1]] = B_Y^*[0,1]$.

7. Έστω $t_1, \dots, t_n \in [0,1]$ διαφορετικά ανά δύο, και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\|\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{t_i}\| = \sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i|$, όπου δ_t είναι το φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές που ανήκει στον $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)^*$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Γεωμετρική μορφή του Θεωρήματος Hahn – Banach

1. Το συναρτησοειδές Minkowski

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.1. Έστω X χώρος με νόρμα, K κυρτό υποσύνολο του X ώστε $0 \in K^o$. Το *συναρτησοειδές Minkowski* του K ορίζεται να είναι η συνάρτηση $\rho_K : X \to \mathbb{R}$, με

$$\rho_K(x) = \inf\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in K\} = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}\,.$$

Η υπόθεση $0 \in K^o$ χρειάζεται για να εξασφαλίσει ότι το συναρτησοειδές Minkowski, ρ_K, είναι καλά ορισμένη συνάρτηση. Πράγματι, αν $x \in X$ η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to X$ με $f(t) = tx$ είναι συνεχής και $f(0) = 0$. Άρα το $f^{-1}(K^o)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που περιέχει το 0 και συνεπώς υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset f^{-1}(K^o)$. Άρα $\frac{\varepsilon}{2}x \in K^o$ και συνεπώς $x \in \frac{2}{\varepsilon}K^o \subset \frac{2}{\varepsilon}K$, δηλαδή το σύνολο $\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}$ είναι μη κενό.

Επίσης παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in X$ και κάθε $s > \rho_K(x)$, έχουμε ότι $\dfrac{x}{s} \in K$. Πράγματι, από τον ορισμό του $\rho_K(x)$, υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $0 \leq \rho_K(x) \leq \lambda < s$ και $\dfrac{x}{\lambda} \in K$. Τότε $0 \leq \dfrac{\lambda}{s} < 1$ και αφού το K είναι κυρτό και $0 \in K$, έπεται ότι $\dfrac{x}{s} = (1-\dfrac{\lambda}{s})\cdot 0+\dfrac{\lambda}{s}\cdot\dfrac{x}{\lambda} \in K$. Τέλος αναφέρουμε ότι γενικά δεν είναι σωστό ότι $\rho_K(x) = \min\{\lambda > 0 : \ x \in \lambda K\}$. Σαν απλό παράδειγμα θεωρείστε $X = \mathbb{R}$, $K = (-1, 1)$ και $x = 1$. Τότε $\rho_K(1) = 1$ ενώ $1 \notin K$.

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι το ρ_K είναι θετικό υπογραμμικό συναρτησοειδές.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.2. *Έστω X χώρος με νόρμα, K κυρτό υποσύνολο του X με $0 \in K^o$. Τότε*

(1) $\rho_K(x) \geq 0$ *για κάθε* $x \in X$.
(2) $\rho_K(0) = 0$.
(3) $\rho_K(\lambda x) = \lambda\rho_K(x)$ *για κάθε* $\lambda \geq 0$ *και* $x \in X$.
(4) $\rho_K(x + y) \leq \rho_K(x) + \rho_K(y)$ *για κάθε* $x, y \in X$.
(5) $\{x \in X : \rho_K(x) < 1\} \subset K \subset \{x \in X : \rho_K(x) \leq 1\}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Τα (1), (2) και (3) προκύπτουν εύκολα από τον ορισμό του ρ_K.
(4) Έστω $s > \rho_K(y)$ και $t > \rho_K(x)$. Τότε $\frac{x}{s}$, $\frac{y}{t} \in K$ και επειδή το K είναι κυρτό

$$\frac{x + y}{s + t} = \frac{s}{s + t}\cdot\frac{x}{s} + \frac{t}{s + t}\cdot\frac{y}{t} \in K$$

δηλαδή $\rho_K(x + y) \leq s + t$. Επειδή αυτό συμβαίνει για κάθε $s > \rho_K(x)$, $t > \rho_K(y)$, έπεται ότι $\rho_K(x + y) \leq \rho_K(x) + \rho_K(y)$.

(5) Αν $x \in X$ και $\rho_K(x) < 1$ τότε για κάθε $s \in \mathbb{R}$ με $\rho_K(x) < s < 1$ έχουμε $x \in sK$ ή $\frac{x}{s} \in K$. Επειδή το K είναι κυρτό και $0 \in K$, έχουμε ότι

$$x = (1 - s)0 + s\frac{x}{s} \in K\,.$$

Επίσης προφανώς αν $x \in K = 1 \cdot K$, έχουμε ότι $\rho_K(x) \leq 1$. $\square$

Παρατηρηση. Δεν ισχύει πάντα ότι $\rho_K(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Π.χ. θεωρείστε ως $X = \mathbb{R}^2$ και ως K το επιγράφημα της $f(x) = x^2 - 1$, δηλαδή $K = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \text{ και } y \geq x^2 - 1\}$. Τότε για κάθε σημείο $(0, t)$, $t > 0$ έχουμε $\rho_K(0, t) = 0$, αφού για κάθε $\lambda > 0$, $(0, t) \in \lambda K$ (ελέγξτε το). Αποδεικνύεται όμως ότι αν το K είναι φραγμένο τότε $\rho_K(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Θα δείξουμε τώρα ότι το συναρτησοειδές Minkowski είναι συνεχής συνάρτηση. Η επόμενη πρόταση δίνει ισοδύναμες συνθήκες ώστε ένα θετικό υπογραμμικό συναρτησοειδές να είναι συνεχές. Οι συνθήκες αυτές είναι εντελώς ανάλογες με αυτές των γραμμικών απεικονίσεων μεταξύ δύο χώρων με νόρμα.

Προταση 6.3. *Έστω X χώρος με νόρμα και $\rho : X \to \mathbb{R}$ ένα θετικό υπογραμμικό συναρτησοειδές. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(1) *Η ρ είναι συνεχής.*
(2) *Η ρ είναι συνεχής στο $0 \in X$.*
(3) *Υπάρχει V ανοικτή περιοχή του $0 \in X$ ώστε $\rho(V)$ φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

Αποδειξη. Οι συνεπαγωγές $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ είναι προφανείς.

$(3) \Rightarrow (1)$. Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Πρέπει να βρούμε $\delta > 0$ ώστε $\rho(B(x, \delta)) \subseteq (\rho(x) - \varepsilon, \rho(x) + \varepsilon)$. Έχουμε ότι υπάρχει $\delta_0 > 0$ και $M > 0$ ώστε $\rho(B(0, \delta_0)) \subseteq (-M, M)$. Άρα $\rho(B(0, \frac{\varepsilon}{M}\delta_0)) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$. Τότε για $\delta = \frac{\varepsilon}{M}\delta_0$ έχουμε το ζητούμενο συμπέρασμα. Πράγματι, για κάθε $y \in B(x, \frac{\varepsilon}{M}\delta_0)$ έχουμε $\|y - x\| < \frac{\varepsilon}{M}\delta_0$, δηλαδή $y - x \in B(0, \frac{\varepsilon}{M}\delta_0)$. Άρα $\rho(y - x) \in (\varepsilon, \varepsilon)$ και συνεπώς

$$\rho(y) = \rho(y - x + x) \leq \rho(y - x) + \rho(x) \in (\rho(x) - \varepsilon, \rho(x) + \varepsilon) \ .$$

□

Πορισμα 6.4. *Αν το K κυρτό με $0 \in K^o$ τότε το συναρτησοειδές Minkowski του K είναι συνεχές.*

Αποδειξη. Για κάθε $x \in K^o$ έχουμε $\rho_K(x) \leq 1$, αφού $x \in K$. Άρα $\rho_K(K^o) \subseteq [0, 1]$ και από την συνθήκη (3) της προηγούμενης πρότασης το ρ είναι συνεχές. □

Προταση 6.5. *Έστω K κυρτό υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα X με $0 \in K^o$ και έστω ρ_K το συναρτησοειδές Minkowski του K. Τότε*

(1) $K^o = \{x \in X : \rho_K(x) < 1\}$.
(2) $\overline{K} = \{x \in X : \rho_K(x) \leq 1\}$.
(3) $\partial K = \{x \in X : \rho_K(x) = 1\}$.

Αποδειξη. (1) Από Πρόταση 6.2 έχουμε ότι

$$\{x \in X : \rho_K(x) < 1\} \subset K \,,$$

και επειδή το ρ_K είναι συνεχές το $\rho_K^{-1}((-\infty, 1))$ είναι ανοικτό σύνολο και άρα

$$\{x \in X : \rho_K(x) < 1\} \subset K^o \,.$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και $K^o \subset \{x \in X : \rho_K(x) < 1\}$. Πράγματι, έστω $x \in K^o$. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to X$ με $f(\lambda) = \lambda x$ είναι συνεχής και άρα $f^{-1}(K^o)$ ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που περιέχει το $\lambda = 1$. Άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \subseteq f^{-1}(K^o)$, οπότε $(1 + \frac{\varepsilon}{2})x \in K^o \subset K$. Συνεπώς $\rho_K(x) \leq \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{2}} < 1$.

(2) Από την Πρόταση 6.2 έχουμε

$$K \subseteq \{x \in X : \rho_K(x) \leq 1\} \,,$$

και από τη συνέχεια του ρ_K το $\{x \in X : \rho_K(x) \leq 1\} = \rho_K^{-1}([0,1])$ είναι κλειστό. Άρα $\overline{K} \subseteq \{x \in X : \rho_K(x) \leq 1\}$.

Για να δείξουμε ότι $\{x \in X : \rho_K(x) \leq 1\} \subseteq \overline{K}$ θεωρούμε ένα $x \notin \overline{K}$. Τότε υπάρχει V ανοικτή περιοχή του x ώστε $V \cap K = \emptyset$. Αν f είναι η απεικόνιση που ορίσαμε στο (1), τότε το $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που περιέχει το 1. Άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \subseteq f^{-1}(V)$, οπότε $(1-\frac{\varepsilon}{2})x \in V$. Άρα $(1-\frac{\varepsilon}{2})x \notin K \Leftrightarrow x \notin \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{2}}K$ και συνεπώς $\rho_K(x) \geq \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{2}} > 1$. Άρα αν $\rho_K(x) \leq 1$ τότε $x \in \overline{K}$, δηλαδή $\{x \in X : \rho_K(x) \leq 1\} \subseteq \overline{K}$.

(3) Επειδή $\partial K = \overline{K} \setminus K^o$, από (1) και (2) έχουμε ότι

$$\partial K = \{x \in X : \rho_K(x) = 1\}.$$

□

Πρόταση 6.6. *Έστω X χώρος με νόρμα, K κυρτό υποσύνολο του X, ώστε $0 \in K^o$. Τότε*

$$\rho_{K^o} = \rho_K = \rho_{\overline{K}} ,$$

όπου $\rho_{K^o}, \rho_K, \rho_{\overline{K}}$ τα συναρτησοειδή Minkowski των K^o, K και $\overline{K}$ αντίστοιχα.

Απόδειξη. Καταρχήν παρατηρούμε ότι τα ρ_{K^o}, $\rho_{\overline{K}}$ ορίζονται καλά, αφού $K^o, \overline{K}$ κυρτά και $0 \in K^o \subset (\overline{K})^o$. Δείχνουμε καταρχήν ότι $\rho_{K^o} = \rho_K$.

Επειδή $K^o \subset K \Rightarrow \rho_K(x) \leq \rho_{K^o}(x)$, $\forall x \in X$. Άρα μένει να δειχθεί ότι $\rho_{K^o}(x) \leq \rho_K(x)$, $\forall x \in X$. Αρκεί να δειχθεί ότι για κάθε $x \in X$ και $s \in \mathbb{R}$ αν $\rho_K(x) < s$ τότε $\rho_{K^o}(x) \leq s$. (Πράγματι τότε $\rho_{K^o}(x) \leq \rho_K(x)$, διότι διαφορετικά υπάρχει $s \in \mathbb{R}$ ώστε $\rho_K(x) < s < \rho_{K^o}(x)$, άτοπο). Έστω λοιπόν $x \in X$ και $s \in \mathbb{R}$ ώστε $0 \leq \rho_K(x) < s$. Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{s}\rho_K(x) = \rho_K(\frac{x}{s}) < 1 && (s > 0) \\
\Rightarrow\ & \frac{x}{s} \in K^o && (\text{από Πρόταση 6.5}) \\
\Rightarrow\ & \rho_{K^o}(\frac{x}{s}) \leq 1 && (\text{από τον ορισμό του } \rho_{K^o}) \\
\Rightarrow\ & \rho_{K^o}(x) \leq s\,.
\end{aligned}$$

Άρα $\rho_{K^o}(x) \leq \rho_K(x)$, $\forall x \in X$, οπότε $\rho_{K^o}(x) = \rho_K(x)$ $\forall x \in X$.

Δείχνουμε τώρα ότι $\rho_K = \rho_{\overline{K}}$.

Επειδή $K \subset \overline{K} \Rightarrow \rho_{\overline{K}}(x) \leq \rho_K(x)$ $\forall x \in X$, άρα πάλι αρκεί να δειχθεί ότι ισχύει η αντίστροφη ανισότητα. Χρησιμοποιούμε την ίδια με προηγουμένως μέθοδο. Έστω λοιπόν $x \in X$ και $s \in \mathbb{R}$ ώστε $0 \leq \rho_{\overline{K}}(x) < s$. Τότε

$$\begin{aligned}
& \rho_{\overline{K}}(\frac{x}{s}) < 1 \\
\Rightarrow\ & \frac{x}{s} \in (\overline{K})^o \subset \overline{K} \quad (\text{από Πρόταση 6.5}) \\
\Rightarrow\ & \rho_K(\frac{x}{s}) \leq 1 \quad (\text{από Πρόταση 6.5}) \\
\Rightarrow\ & \rho_K(x) \leq s\,.
\end{aligned}$$

Άρα $\rho_K(x) \leq \rho_{\overline{K}}(x)$ $\forall x \in X$ και συνεπώς $\rho_{\overline{K}}(x) = \rho_K(x)$ $\forall x \in X$. □

Πόρισμα 6.7. *Έστω K κυρτό υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα X με $K^o \neq \emptyset$. Τότε $\overline{K^o} = \overline{K}$ και $(\overline{K})^o = K^o$.*

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας (με μία μετάθεση αν χρειάζεται) υποθέτουμε ότι $0 \in K^o$. Από τις παραπάνω Προτάσεις έχουμε

$$\overline{K^o} = \{x \in X : \rho_{K^o}(x) \leq 1\} = \{x \in X : \rho_K(x) \leq 1\} = \overline{K}$$

και

$$(\overline{K})^o = \{x \in X : \rho_{\overline{K}}(x) < 1\} = \{x \in X : \rho_K(x) < 1\} = K^o .$$

□

Πόρισμα 6.8. *Έστω K κυρτό με $K^o \neq \emptyset$. Τότε για κάθε $V \subset K$ ανοικτό κυρτό και πυκνό στο K έχουμε ότι $V = K^o$.*

Απόδειξη. Από το παραπάνω πόρισμα, $(\overline{V})^o = V^o$ (θέτουμε όπου K το V). Επειδή το V είναι ανοικτό $V^o = V$ και άρα $(\overline{V})^o = V$. Όμως το V είναι πυκνό στο K. Άρα $\overline{V} = \overline{K}$ και συνεπώς πάλι από το προηγούμενο πόρισμα, $(\overline{V})^o = (\overline{K})^o = K^o$. Άρα $K^o = V$. □

2. Διαχωριστικά Θεωρήματα Hahn - Banach

Γνωρίζουμε ότι αν K_1, K_2 είναι ξένα κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ τότε υπάρχει επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ που τα διαχωρίζει, δηλαδή τα αφήνει εκατέρωθεν του. Το επίπεδο αυτό σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί και να είναι μοναδικό (π.χ. θεωρείστε ότι τα K_1, K_2 είναι δύο ανοικτές σφαίρες του $\mathbb{R}^3$ που εφάπτονται εξωτερικά).

Επειδή ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ (και γενικότερα ένα υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^n$) είναι η ισοσταθμική $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}$ μιας γραμμικής συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, το γεωμετρικό φαινόμενο του διαχωρισμού διατυπώνεται και αναλυτικά ως εξής (στον $\mathbb{R}^n$):

Αν K_1, K_2 κυρτά ξένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, τότε υπάρχει $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ γραμμική και $c \in \mathbb{R}$ ώστε

$$K_1 \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq c\} \text{ και } K_2 \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq c\}$$

$$\text{ή} \qquad \sup_{x \in K_1} f(x) \leq \inf_{x \in K_2} f(x) .$$

Στα επόμενα θα μελετήσουμε το πρόβλημα του διαχωρισμού δύο ξένων κυρτών γενικά σε ένα χώρο με νόρμα. Επειδή ουσιαστικά ενδιαφερόμαστε για απειροδιάστατους χώρους κάποιες επιπλέον συνθήκες θα χρειαστούν για τα κυρτά. (Δείτε και σημείωση στο τέλος της παραγράφου).

Θα ξεκινήσουμε με την απλή περίπτωση όπου το ένα από τα δύο κυρτά είναι μονοσύνολο. Οι γενικότερες περιπτώσεις προκύπτουν από αυτή την απλή μορφή. Για το λόγο αυτό το παρακάτω θεώρημα ονομάζεται και Θεμελιώδες Διαχωριστικό Θεώρημα.

Θεώρημα 6.9 (Θεμελιώδες Διαχωριστικό Θεώρημα). *Έστω X χώρος με νόρμα, K κυρτό υποσύνολο του X με $K^o \neq \emptyset$ και $x_0 \in X \setminus K^o$. Τότε υπάρχει $f \in X^*$, $f \neq 0$, ώστε $\sup_{x \in K} f(x) \leq f(x_0)$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε καταρχήν ότι αρκεί να δείξουμε το θεώρημα για την περίπτωση όπου $0 \in K^o$. (Πράγματι αν $0 \notin K^o$, τότε επιλέγουμε $y_0 \in K^o$ και θέτουμε $L = K - y_0$, και $z_0 = x_0 - y_0$. Τότε $0 \in L^o$ και $z_0 \notin L^o$. Συνεπώς αν $f \in X^*$ με $\sup_{x \in L} f(x) \leq f(z_0)$ τότε $\sup_{x \in L} f(x) = \sup_{x \in K - y_0} f(x) = \sup_{x \in K} f(x) - f(y_0)$, $f(z_0) = f(x_0) - f(y_0)$ και άρα $\sup_{x \in K} f(x) \leq f(x_0)$).

Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \in K^o$. Έστω ρ_K το συναρτησοειδές Minkowski για το K. Έστω επίσης $Y = \langle x_0 \rangle = \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}$ ο γραμμικός υπόχωρος διάστασης 1 του X που παράγεται από το x_0. Ορίζουμε την γραμμική συνάρτηση $f : Y \to \mathbb{R}$ με $f(y) = \lambda$, αν $y = \lambda x_0$. Τότε για κάθε $y \in Y$ έχουμε ότι $f(y) \leq \rho_K(y)$. Πράγματι, αν $y = \lambda x_0$ με $\lambda \leq 0$, τότε $f(y) = \lambda \leq 0 \leq \rho_K(y)$ ενώ αν $\lambda > 0$, έχουμε ότι

$$\rho_k(y) = \rho_K(\lambda x_0) = \lambda \rho_K(x_0) \geq \lambda = f(y)$$

διότι εφόσον $x_0 \notin K^o$, $\rho_K(x_0) \geq 1$. Συνεπώς από την αναλυτική μορφή του Θεωρήματος Hahn - Banach υπάρχει $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ γραμμική επέκταση της f ώστε $\tilde{f}(x) \leq \rho_K(x)$, $\forall x \in X$.

Επειδή το ρ_K είναι φραγμένο έχουμε ότι και η $\tilde{f}$ είναι φραγμένη και συνεπώς $\tilde{f} \in X^*$. Επίσης $\tilde{f} \neq 0$ αφού $\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = 1$. Τέλος, $\sup_{x\in K} \tilde{f}(x) \leq \sup_{x\in K} \rho_K(x) \leq 1$ και επειδή $\tilde{f}(x_0) = 1$, $\sup_{x\in K} \tilde{f}(x) \leq \tilde{f}(x_0)$. □

Σημειωση. Ας συνοψίσουμε εδώ τη μέθοδο που ακολουθήσαμε στο παραπάνω θεώρημα. Ο στόχος μας αρχικά ήταν να διαχωρίσουμε με ένα υπερεπίπεδο ένα κυρτό σύνολο K από ένα σημείο $x_0 \in X \setminus K^o$. Όπως έχουμε αναφέρει, αυτό ανάγεται στην εύρεση ενός φραγμένου γραμμικού συναρτησοειδούς $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\sup_{x\in K} f(x) \leq f(x_0)$. Για να βρούμε το συναρτησοειδές f ξεκινώντας από το K, ορίσαμε το θετικό υπογραμμικό συναρτησοειδές Minkowski ρ_K και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Hahn – Banach περάσαμε στη ζητούμενη γραμμική συνάρτηση f.

Παρατηρηση. Στην ειδική περίπτωση όπου $x_0 \in \partial K$ με K κυρτό με μη κενό εσωτερικό, το παραπάνω θεώρημα μας δείχνει ότι υπάρχει *υπερεπίπεδο στήριξης* του K στο x_0. Πράγματι, αν $H = \{x \in X : \ \tilde{f}(x) = 1\} = x_0 + \operatorname{Ker} \tilde{f}$ τότε $K \subset H^- = \{x \in X : \ \tilde{f}(x) \leq 1\}$.

Θεωρημα 6.10. *Έστω K_1, K_2 κυρτά μη κενά υποσύνολα ενός χώρου με νόρμα X, ώστε $K_1^o \neq \emptyset$ και $K_1^o \cap K_2 = \emptyset$.*

Τότε υπάρχει $f \in X^*$, $f \neq 0$, ώστε

$$\sup_{x\in K_1} f(x) \leq \sup_{x\in K_2} f(x) \ .$$

Αποδειξη. Έχουμε ότι το K_1^o είναι κυρτό. Άρα το $K_1^o - K_2 = \cup_{x\in K_2} K_1^o - x$ είναι ανοικτό (ως ένωση ανοικτών) και κυρτό (ως διαφορά κυρτών). Αφού $K_1^o \cap K_2 = \emptyset$, έχουμε ότι $0 \notin K_1^o - K_2$. Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $K = K_1 - K_2$ τότε $K^o = K^o - K_2$. Πράγματι από τις ιδιότητες του συναρτησοειδούς Minkowski, έχουμε ότι το K_1^o είναι πυκνό στο K_1 (θυμηθείτε ότι $\overline{K_1^o} = \overline{K_1}$) και άρα το $K_1^o - K_2$ είναι ανοικτό πυκνό και κυρτό υποσύνολο του $K_1 - K_2 = K$. Άρα από το Πόρισμα 6.8, $K^o = K_1^o - K_2$. Συνεπώς $0 \notin K^o$ και από το Θεμελιώδες Διαχωριστικό Θεώρημα έχουμε ότι υπάρχει $f \in X^*$, $f \neq 0$ ώστε

$$\sup_{x\in K} f(x) \leq f(0)$$

$$\text{ή} \qquad \sup_{x\in K_1 - K_2} f(x) \leq f(0) \ \text{ και συνεπώς } \sup_{x\in K_1} f(x) \leq \inf_{x\in K_2} f(x) \, .$$

□

Θεωρημα 6.11. *Έστω K_1, K_2 κυρτά μη κενά υποσύνολα ενός χώρου με νόρμα X, ώστε $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, K_1 συμπαγές και K_2 κλειστό. Τότε υπάρχει $f \in X^*$ ώστε*

$$\sup_{x\in K_1} f(x) < \inf_{x\in K_2} f(x) \ .$$

Αποδειξη. Θέτουμε $K = K_2 - K_1$. Τότε το K είναι κυρτό και $0 \notin K$. Επίσης το K είναι κλειστό. Πράγματι έστω $z_n \in K_2 - K_1$, $n = 1, 2, \ldots$ και $z \in X$ ώστε $z_n \to z$. Για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ θεωρούμε $x_n \in K_2$ και $y_n \in K_1$ με $z_n = x_n - y_n$. Επειδή το K_1 είναι συμπαγές υπάρχει υπακολουθία $(y_{k_n})_n$ της $(y_n)_n$ και $y_0 \in K_1$ ώστε $y_{k_n} \to y_0$. Τότε $z_{k_n} \to z$ και άρα $x_{k_n} = z_{k_n} + y_{k_n} \to z + y_0$. Επειδή το K_2 είναι κλειστό έπεται ότι $z + y_0 \in K_2$. Άρα $z = (z + y_0) - y_0 \in K_2 - K_1$.

Συνεπώς υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(0, \varepsilon) \cap K = \emptyset$, όπου $B(0, \varepsilon)$ η ανοικτή μπάλα κέντρου 0 και ακτίνας ε. Από Θεώρημα 6.10, υπάρχει $f \in X^*$, $f \neq 0$, ώστε

$$\begin{aligned}
&\sup_{x \in B(0,\varepsilon)} f(x) \leq \inf_{x \in K_2 - K_1} f(x) \\
\Rightarrow &0 < \varepsilon \|f\| \leq \inf_{x \in K_2} f(x) - \sup_{x \in K_1} f(x) \\
\Rightarrow &\sup_{x \in K_1} f(x) < \inf_{x \in K_2} f(x) \ .
\end{aligned}$$

□

Παρατηρηση. Παρατηρείστε ότι στο Θεώρημα 6.11, η f διαχωρίζει *γνήσια* τα K_1, K_2.

Σημειωση. Σε χώρους με νόρμα άπειρης διάστασης είναι δυνατόν να υπάρχουν K_1, K_2 ξένα κυρτά που είναι πυκνά στο χώρο. Για παράδειγμα, αν X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα και $f : X \to \mathbb{R}$ μια γραμμική μη συνεχής (πάντα υπάρχει όπως έχουμε ήδη δει μια τέτοια συνάρτηση) τότε ο πυρήνας $\mathrm{Ker}\, f$ της f είναι πυκνός στο χώρο. Θέτουμε $K_1 = \mathrm{Ker}\, f$ και $K_2 = x_0 + \mathrm{Ker}\, f$ με $x_0 \notin \mathrm{Ker}\, f$. Τότε $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, K_1, K_2 κυρτά και $\overline{K_1} = \overline{K_2}$. Δύο τέτοια κυρτά είναι αδύνατον να διαχωριστούν από μια $g \in X^*$, αφού $g(K_1) = g(K_2) = \mathbb{R}$ $\forall g \in X^*$. (Πράγματι, αφού K_1, K_2 πυκνά και κυρτά υποσύνολα του X, έχουμε $g(K_1)$, $g(K_2)$ πυκνά και κυρτά υποσύνολα του $g(X) = \mathbb{R}$ και άρα $g(K_1) = g(K_2) = \mathbb{R}$).

3. Το Θεώρημα Krein-Milman

Στο κεφάλαιο αυτό θα δείξουμε ότι κάθε συμπαγές κυρτό υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα είναι η κλειστή κυρτή θήκη των ακραίων σημείων του, δηλαδή των σημείων που δεν μπορούν να γραφτούν ως κυρτός συνδυασμός δύο άλλων διαφορετικών μεταξύ τους σημείων του κυρτού. Όπως θα δούμε υπάρχουν κλειστά φραγμένα κυρτά (που όμως δεν είναι συμπαγή) χωρίς ακραία σημεία. Συνεπώς η αναλυτική δομή του κυρτού (συμπάγεια) έχει σημαντικές συνέπειες στην αλγεβρική-γεωμετρική δομή του (ακραία σημεία).

Ορισμος 6.12. Έστω X διανυσματικός χώρος, K κυρτό υποσύνολο του X και $x \in K$. Το x λέγεται *ακραίο σημείο* του K, αν δεν υπάρχουν $y, z \in K$ με $y \neq z$ και $0 < \lambda < 1$ ώστε $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$. (Δηλαδή το x είναι ακραίο σημείο του K αν δεν είναι γνήσιος κυρτός συνδυασμός δύο άλλων σημείων του K.) Το σύνολο των ακραίων σημείων του K συμβολίζεται με $Ex(K)$.

Ορισμος 6.13. Έστω X χώρος με νόρμα, K ένα μη κενό κλειστό και κυρτό υποσύνολο του X. Ένα υποσύνολο A του K καλείται *ακραίο υποσύνολο* του K αν το A είναι κλειστό, κυρτό και ικανοποιεί την εξής ιδιότητα:
Για κάθε $x, y \in K$ και $0 < \lambda < 1$, αν $\lambda x + (1 - \lambda) y \in A$ τότε και $x, y \in A$.

Παραδειγμα. Αν $K = [0, 1] \times [0, 1]$ τότε ακραία υποσύνολα του K είναι το ίδιο το K, οι πλευρές του K και κάθε κορυφή του.

Παρατηρηση. Αν K κλειστό κυρτό υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα, τότε ένα σημείο x είναι ακραίο σημείο του K αν και μόνο αν το $\{x\}$ είναι ακραίο υποσύνολο του K.

Προταση 6.14. *Έστω X χώρος με νόρμα και K ένα μη κενό κυρτό και κλειστό υποσύνολο του X.*

(1) *Αν* $\{A_i : i \in I\}$ *είναι μια οικογένεια από ακραία υποσύνολα του* K *με* $\cap_{i\in I} A_i = A \neq \emptyset$, *τότε το* A *είναι ακραίο υποσύνολο του* K.

(2) *Αν* $A \subset B \subset K$ *ώστε το* B *είναι ακραίο υποσύνολο του* K *και το* A *ακραίο υποσύνολο του* B, *τότε το* A *είναι ακραίο υποσύνολο του* K.

Αποδειξη. (1) Το A είναι κλειστό και κυρτό υποσύνολο του K ως τομή κλειστών και κυρτών. Έστω $z \in A$ και $0 < \lambda < 1$, $x, y \in K$ ώστε $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. Τότε $z \in A_i$, $\forall i \in I$ και άρα $x, y \in A_i$ $\forall i \in I$. Συνεπώς $x, y \in \cap_{i\in I} A_i = A$ και άρα το A είναι ακραίο υποσύνολο του K.

(2) Έστω $0 < \lambda < 1$, $x, y \in K$ και $z \in A$ ώστε $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. Αφού $A \subset B$ έχουμε ότι $z \in B$ και επειδή το B είναι ακραίο υποσύνολο του K, έχουμε ότι $x, y \in B$. Επειδή το A είναι ακραίο υποσύνολο του B, έπεται ότι $x, y \in A$. Άρα το A είναι ακραίο υποσύνολο του K. $\square$

Παρατηρηση. Από το (2) της προηγούμενης πρότασης έχουμε άμεσα και το εξής: Αν $A \subset K$ ακραίο υποσύνολο του K, τότε $Ex(A) \subset Ex(K)$.

Θεωρημα 6.15. *(Krein-Milman) Έστω* X *χώρος με νόρμα και* K *ένα μη κενό συμπαγές κυρτό υποσύνολο του* X. *Τότε* $K = \overline{co}Ex(K)$.

Αποδειξη. Δείχνουμε καταρχήν ότι $Ex(K) \neq \emptyset$. Θέτουμε

$$\mathcal{A} = \{A \subset K : A \text{ ακραίο υποσύνολο του } K\}.$$

ΒΗΜΑ 1. . Η οικογένεια $\mathcal{A}$ περιέχει ένα ελαχιστικό στοιχείο ως προς την $\subset$, δηλαδή υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε για κάθε $B \in \mathcal{A}$ με $B \subset A$ έχουμε ότι $B = A$.

Αποδειξη. Ορίζουμε $A < B \Leftrightarrow B \subset A$, για κάθε $A, B \in \mathcal{A}$. Η $<$ είναι σχέση μερικής διάταξης στο $\mathcal{A}$. Πρέπει να δειχθεί ότι η $\mathcal{A}$ περιέχει ένα μεγιστικό (ως προς την $<$) στοιχείο. Θα εφαρμόσουμε το Λήμμα Zorn. Έστω $\mathcal{C} = \{A_i : i \in I\}$ μια αλυσίδα στην $\mathcal{A}$. Αρκεί να δειχθεί ότι η $\mathcal{C}$ έχει άνω φράγμα στην $\mathcal{A}$. Θέτουμε $A = \cap_{i\in I} A_i$. Τότε το A είναι μη κενό. Πράγματι η οικογένεια $\mathcal{C}$ (επειδή είναι αλυσίδα) έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, αποτελείται από κλειστά σύνολα και το K είναι συμπαγές. Άρα από γνωστή πρόταση της Πραγματικής Ανάλυσης $\cap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Επίσης από Πρόταση 6.14(1) έχουμε ότι $A \in \mathcal{A}$ και προφανώς $A > A_i$ $\forall i \in I$ αφού $A \subset A_i$, $\forall i \in I$. $\square$

ΒΗΜΑ 2. Κάθε ελαχιστικό στοιχείο της $\mathcal{A}$ είναι μονοσύνολο.

Αποδειξη. Υποθέτουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι υπάρχει A ελαχιστικό στοιχείο της $\mathcal{A}$ με τουλάχιστον δύο διαφορετικά σημεία $x, y \in A$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε $x^*(x) \neq x^*(y)$, και έστω $x^*(x) < x^*(y)$. Επειδή το A είναι συμπαγές (ως κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς K), έχουμε ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $\alpha = \sup_{z\in A} x^*(z)$ και επιπλέον το σύνολο $B = \{z \in A : x^*(z) = \alpha\}$ είναι μη κενό. Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς (άσκηση) ότι το B είναι ακραίο υποσύνολο του A και άρα από την Πρόταση 6.14(2) έχουμε ότι το B είναι ακραίο υποσύνολο του K, δηλαδή $B \in \mathcal{A}$. Επειδή $x \notin B$, έχουμε ότι $B \in \mathcal{A}$ και $B \subsetneq A$, άτοπο αφού το A είναι ελαχιστικό ακραίο υποσύνολο του K. $\square$

Από τα προηγούμενα βήματα έχουμε ότι $Ex(K) \neq \emptyset$, αφού αν $\{x\}$ είναι ακραίο υποσύνολο του K τότε προφανώς $x \in Ex(K)$.

Προχωρούμε τώρα να δείξουμε ότι $K = \overline{co}Ex(K)$.

ΒΗΜΑ 3. $K = \overline{co}Ex(K)$.

Αποδειξη. Θέτουμε $L = \overline{co}Ex(K)$. Τότε το L είναι κλειστό υποσύνολο του K και άρα συμπαγές, και κυρτό ως κλειστότητα του κυρτού συνόλου $coEx(K)$. Υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι $L \subsetneqq K$. Τότε υπάρχει $x \in K \setminus L$. Από το διαχωριστικό θεώρημα 6.11, υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε

$$\sup_{z\in L} x^*(z) < x^*(x) \ .$$

Έστω $\alpha = \sup\{x^*(y) : y \in K\}$ και $B = \{y \in K : x^*(y) = \alpha\}$. Όπως και στο Βήμα 2, το B είναι ακραίο υποσύνολο του K. Επειδή το B είναι συμπαγές κυρτό από τα δύο πρώτα βήματα έχουμε ότι $Ex(B) \neq \emptyset$. Επειδή όμως το B είναι ακραίο υποσύνολο του K, από από την παρατήρηση μετά την Πρόταση 6.14,

$$Ex(B) \subset Ex(K) \subset L \, .$$

Αυτό όμως είναι αδύνατο, αφού αν $y \in Ex(B)$ τότε $x^*(y) = \alpha$, ενώ αν $y \in L$, $x^*(y) < x^*(x) \leq \alpha$. Άρα $K = \overline{co}Ex(K)$. □

□

Παρατηρηση. Αν ο X είναι ένας πεπερασμένης διάστασης χώρος με νόρμα, τότε κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του είναι συμπαγές. Άρα κάθε κλειστό κυρτό φραγμένο υποσύνολο ενός πεπερασμένης διάστασης χώρου με νόρμα έχει ακραία σημεία. (Αυτό όπως θα δούμε στη συνέχεια δεν είναι σωστό σε απειροδιάστατους χώρους με νόρμα). Μάλιστα, όπως αποδεικνύεται, για κάθε κλειστό κυρτό και φραγμένο υποσύνολο K ενός πεπερασμένης διάστασης χώρου με νόρμα, ισχύει ότι $K = coEx(K)$ (χωρίς κλειστότητα). Αυτό είναι συνέπεια του επόμενου Θεωρήματος του Καραθεοδωρή.

Θεωρημα. *(Καραθεοδωρή) Έστω X χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης, $dimX = n$, και K κλειστό κυρτό φραγμένο υποσύνολο του. Τότε κάθε $x \in K$ είναι κυρτός συνδυασμός το πολύ $n+1$ ακραίων σημείων του K.*

Το επόμενο παράδειγμα μας βεβαιώνει ότι υπάρχουν ''συνηθισμένα'' κλειστά κυρτά φραγμένα υποσύνολα χώρων Banach που δεν έχουν ακραία σημεία.

Παραδειγμα. Έστω B_{c_0} η μοναδιαία μπάλα του c_0. Τότε $Ex(B_{c_0}) = \emptyset$.

Αποδειξη. Θυμίζουμε ότι ο χώρος c_0 αποτελείται από όλες τις ακολουθίες $(x_n)_n$ του $\mathbb{R}$ με $x_n \to 0$ και η νόρμα του δίνεται από τη σχέση $\|(x_n)_n\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Θα δείξουμε ότι κάθε $x \in B_{c_0}$ γράφεται ως $x = \frac{y_1+y_2}{2}$ με $y_1 \neq y_2$ και $y_1, y_2 \in B_{c_0}$.

Πράγματι, έστω $x = (x_n)_n$. Τότε $x_n \to 0$ και άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|x_{n_0}| < \frac{1}{4}$. Θέτουμε $y_1 = (y_n^1)_n$ όπου $y_n^1 = \begin{cases} x_n, & \text{αν}\, n \neq n_0 \\ x_{n_0} + \frac{1}{4}, & \text{αν}\, n = n_0 \end{cases}$ και $y_2 = (y_n^2)_n$ όπου $y_n^2 = \begin{cases} x_n, & \text{αν}\, n \neq n_0 \\ x_{n_0} - \frac{1}{4}, & \text{αν}\, n = n_0 \end{cases}$. Τότε είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι

(1) Τα y_1, y_2 ανήκουν στον c_0.
(2) Τα y_1, y_2 ανήκουν στην B_{c_0}, δηλαδή $\|y_1\| \leq 1$, $\|y_2\| \leq 1$.
(3) $x = \frac{y_1+y_2}{2}$ και $y_1, y_2 \neq x$.

Άρα $Ex(B_{c_0}) = \emptyset$. □

Παρατηρηση. Τονίζουμε εδώ ότι ο σκοπός μας στο προηγούμενο παράδειγμα ήταν να βρούμε y_1, y_2 *στην μπάλα του* c_0 ώστε $y_1 \neq y_2$ και $x = \frac{y_1+y_2}{2}$. (Κάθε στοιχείο x ενός διανυσματικού χώρου μπορεί να γραφεί ως $x = \frac{y_1+y_2}{2}$ με $y_1 \neq y_2$, εμείς όμως θέλουμε τα y_1, y_2 να είναι και αυτά στην μπάλα του c_0.) Για το λόγο αυτό το παραπάνω ''τρικ'' δεν μπορεί να εφαρμοσθεί σε άλλους χώρους π.χ. στον ℓ_1, διότι τότε η νόρμα ενός τουλάχιστον εκ των y_1, y_2 θα γινόταν μεγαλύτερη του 1.

Σε αντίθεση με την μοναδιαία μπάλα του c_0, οι μοναδιαίες μπάλες του ℓ_1 και του ℓ_2 ικανοποιούν το Θεώρημα Krein- Milman όπως δείχνουν τα επόμενα παραδείγματα. Υπενθυμίζεται ότι οι μοναδιαίες μπάλες απειροδιάστατων χώρων με νόρμα δεν είναι συμπαγείς και άρα δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Krein-Milman στην μορφή που δίνεται στης σημειώσεις αυτές. Ας αναφέρουμε εδώ ότι το Θεώρημα Krein- Milman επεκτείνεται και για σύνολα που δεν είναι συμπαγή στη norm τοπολογία, όπως π.χ. για μπάλες δυϊκών χώρων.

Παραδειγμα. Έστω B_{ℓ_2} η μοναδιαία μπάλα του ℓ_2. Τότε

$$Ex(B_{\ell_2}) = S_{\ell_2} = \{x \in \ell_2 : \|x\| = 1\}$$

και άρα $B_{\ell_2} = coEx(B_{\ell_2})$.

Αποδειξη. Ξεκινάμε με την εξής απλή παρατήρηση:
Αν $x, y \in S_{\ell_2}$ και $\langle x, y\rangle = 1$ τότε $x = y$, όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ το εσωτερικό γινόμενο στον ℓ_2.
Πράγματι, αρκεί να δείξουμε ότι $x - y = 0$ ή $\langle x - y, x - y\rangle = 0$. Έχουμε

$$\langle x - y, x - y\rangle = \langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = 1 - 2 + 1 = 0\,.$$

Άρα $x = y$.

Με βάση την παρατήρηση αυτή δείχνουμε ότι κάθε σημείο της S_{ℓ_2} είναι ακραίο σημείο της B_{ℓ_2}, δηλαδή

$$S_{\ell_2} \subset Ex(B_{\ell_2}) \qquad (1).$$

Έστω $x \in S_{\ell_2}$ και ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $y_1, y_2 \in B_{\ell_2}$ και $\lambda \in (0, 1)$ ώστε $x = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2$. Θα πρέπει $y_1, y_2 \in S_{\ell_2}$ διότι διαφορετικά, αν κάποιο από αυτά είχε νόρμα μικρότερη του 1, έστω το y_2, τότε

$$\|x\| \leq \lambda\|y_1\| + (1 - \lambda)\|y_2\| < \lambda + (1 - \lambda) = 1, \text{ άτοπο.}$$

Ομοίως θα πρέπει $\langle x, y_1\rangle = 1$ και $\langle x, y_2\rangle = 1$. Πράγματι από την ανισότητα Cauchy-Schwarz,

$$|\langle x, y_1\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y_1\| = 1$$

και όμοια $|\langle x, y_2\rangle| \leq 1$. Όμως

$$1 = \|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2, x\rangle = \lambda\langle y_1, x\rangle + (1 - \lambda)\langle y_2, x\rangle\,,$$

άρα αν κάποιο από τα $\langle y_1, x\rangle$, $\langle y_2, x\rangle$ ήταν μικρότερο του 1, τότε $1 > \lambda + (1 - \lambda) = 1$, άτοπο. Συνεπώς $x, y_1, y_2 \in S_{\ell_2}$ και $\langle y_1, x\rangle = \langle y_2, x\rangle = 1$. Από την αρχική παρατήρηση, $x = y_1 = y_2$.

Δείχνουμε τώρα ότι $Ex(B_{\ell_2}) \subset S_{\ell_2}$.
Πράγματι, αν $x \in Ex(B_{\ell_2})$ και $\|x\| < 1$ τότε
(α) Αν $x = 0$, επιλέγουμε $y \in S_{\ell_2}$ (έστω $y = e_1$) και τότε $0 = \frac{y+(-y)}{2}$.
(β) Αν $x \neq 0$, θέτουμε $y_1 = \frac{x}{\|x\|} \in S_{\ell_2}$ και $y_2 = 0$. Τότε για $\lambda = \|x\| \in (0, 1)$ έχουμε $x = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2$.
Συνεπώς

$$Ex(B_{\ell_2}) \subset S_{\ell_2} \qquad (2).$$

Από τις (1) και (2) έχουμε το ζητούμενο. Επίσης είναι εύκολο να δειχθεί ότι $B_{\ell_2} = coS_{\ell_2}$ και άρα $B_{\ell_2} = co(ExB_{\ell_2})$. $\square$

Παρατηρηση. Μπορεί να δειχθεί γενικά ότι αν X χώρος με νόρμα, B_X η μοναδιαία μπάλα του και S_X η μοναδιαία σφαίρα του, τότε $Ex(B_X) \subset S_X$ και $B_X = coS_X$. (Η απόδειξη αφήνεται ως Άσκηση.)

Παραδειγμα. Έστω B_{ℓ_1} η μοναδιαία μπάλα του ℓ_1. Τότε

$$Ex(B_{\ell_1}) = \{\pm e_n : n = 1, 2, \ldots\} \text{ και } B_{\ell_1} = \overline{co}Ex(B_{\ell_1}).$$

Αποδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\pm e_n \in Ex(B_{\ell_1})$.

Παρατηρούμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι το e_n, $n \in \mathbb{N}$ είναι ακραίο. (Πράγματι αν $e_n \in Ex(B_{\ell_1})$ τότε και $-e_n \in Ex(B_{\ell_1})$, διότι διαφορετικά $-e_n = \lambda x + (1-\lambda)y$, με $x, y \in B_{\ell_1}$, $x \neq y$ και άρα $e_n = \lambda(-x) + (1-\lambda)(-y)$, οπότε και το e_n δεν θα ήταν ακραίο).

Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$, $x, y \in B_{\ell_1}$ και $\lambda \in [0,1]$ ώστε $e_{n_0} = \lambda x + (1-\lambda)y$. Αν $x = (x_n)_n$, $y = (y_n)_n$ τότε

$$\lambda x_n + (1-\lambda)y_n = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \neq n_0 \\ 1, & \text{αν } n = n_0 \end{cases}$$

Αφού $\|x\| = \sum_n |x_n| \leq 1$, $\|y\| = \sum_n |y_n| \leq 1$, έχουμε ότι $|x_{n_0}|$, $|y_{n_0}| \leq 1$. Επειδή όμως $\lambda x_{n_0} + (1-\lambda)y_{n_0} = 1$, έπεται ότι $x_{n_0} = y_{n_0} = 1$. Αφού

$$\sum_n |x_n| \leq 1 \Rightarrow x_n = 0 \quad \forall n \neq n_0$$

και όμοια $y_n = 0$ $\forall n \neq n_0$. Άρα $x = y = e_{n_0}$. Συνεπώς

$$\{\pm e_n : n \in \ N\} \subset Ex(B_{\ell_1}). \qquad (1)$$

Δείχνουμε τώρα ότι $Ex(B_{\ell_1}) \subseteq \{\pm e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $x \in Ex(B_{\ell_1})$ με $x \notin \{\pm e_n : \ n \in \mathbb{N}\}$. Επειδή $x \in Ex(B_{\ell_1})$ θα πρέπει $\|x\| = 1$ (δείτε και προηγούμενη παρατήρηση). Έστω $x = (x_n)_n$ και έστω $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_{n_0} \neq 0$ και $x_n = 0$ $\forall n < n_0$ (δηλαδή x_{n_0} είναι η πρώτη μη μηδενική συντεταγμένη του x). Επειδή $x \neq \pm e_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, έχουμε $0 < |x_{n_0}| < 1$. Θέτουμε $\lambda = |x_{n_0}|$ και $y = (y_n)_n$, όπου $y_n = \begin{cases} 0 & \text{αν } n \leq n_0 \\ x_n & \text{αν } n > n_0 \end{cases}$. Τότε

$$\|\frac{y}{1-\lambda}\| = \frac{\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n|}{1-\lambda} = \frac{1-\lambda}{1-\lambda} = 1.$$

Θέτουμε $y_1 = e_{n_0}$ αν $x_{n_0} > 0$ ή $y_1 = -e_{n_0}$ αν $x_{n_0} < 0$ και $y_2 = \frac{y}{1-\lambda}$. Τότε $x = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$ και άρα $x \notin Ex(B_{\ell_1})$. Συνεπώς

$$Ex(B_{\ell_1}) \subset \{\pm e_n : n = 1, 2, \ldots\}. \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έπεται ότι $Ex(B_{\ell_1}) = \{\pm e_n : n = 1, 2, \ldots\}$.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι $B_{\ell_1} = \overline{co}Ex(B_{\ell_1})$.

Αρκεί να δειχθεί ότι για κάθε $x \in B_{\ell_1}$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $y \in coEx(B_{\ell_1})$ ώστε $\|x - y\| < \varepsilon$.

Δείχνουμε καταρχήν ότι αυτό ισχύει για κάθε $x \in B_{\ell_1}$ με $\|x\| = 1$. Έστω λοιπόν $x = (x_n)_n \in B_{\ell_1}$ με $\sum_n |x_n| = 1$ και $0 < \varepsilon < 1$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (3).$$

Θέτουμε $y' = (y'_n)_n$ με

$$y'_n = \begin{cases} x_n, & \text{αν } n \le n_0 \\ 0, & \text{αν } n > n_0 \ . \end{cases}$$

Τότε $\|y'\| = \sum\limits_{n=1}^{n_0} |x_n| = \|x\| - \sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n| > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Θέτουμε

$$y = \frac{y'}{\|y'\|} \ .$$

Τότε

$$y = \frac{1}{\|y'\|} \sum_{n=1}^{\infty} y'_n e_n = \frac{1}{\|y'\|} \sum_{n=1}^{n_0} x_n e_n = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{|x_n|}{\|y'\|} (\pm e_n),$$

(όπου θέτουμε $+e_n$ αν $x_n > 0$ και $-e_n$ αν $x_n < 0$). Επειδή

$$\sum_{n=1}^{n_0} \frac{|x_n|}{\|y'\|} = \frac{1}{\|y'\|} \sum_{n=1}^{n_0} |x_n| = 1\,.$$

έχουμε ότι $y \in coEx(B_{\ell_1})$ ως κυρτός συνδυασμός των $\pm$, $n = 1, \ldots, n_0$. Επιπλέον

$$\|y' - y\| = \|y' - \frac{y'}{\|y'\|}\| = |1 - \frac{1}{\|y'\|}| \cdot \|y'\| = 1 - \|y'\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| - \sum_{n=1}^{n_0} |x_n| = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

και ακόμη $\|x - y'\| = \sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Άρα τελικά έχουμε

$$\|x - y\| \le \|x - y'\| + \|y' - y\| < \varepsilon \ .$$

Συνεπώς δείξαμε ότι το $coEx(B_{\ell_1})$ είναι πυκνό στην σφαίρα $S_{\ell_1} = \{x \in B_{\ell_1} : \|x\| = 1\}$. Τώρα αν $x \in B_{\ell_1} \setminus S_{\ell_1}$, υπάρχουν $x_1, x_2 \in S_{\ell_1}$ και $\lambda \in (0,1)$ ώστε $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Για δεδομένο $\varepsilon > 0$, υπάρχουν $y_1, y_2 \in coEx(B_{\ell_1})$ ώστε $\|x_1 - y_1\| < \varepsilon$ και $\|x_2 - y_2\| < \varepsilon$. Άρα

$$\|x - (\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)\| \le \lambda \|x_1 - y_1\| + (1-\lambda)\|x_2 - y_2\| < \varepsilon$$

και $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in coEx(B_{\ell_1})$. Συνεπώς $B_{\ell_1} = \overline{co}Ex(B_{\ell_1})$. □

Παρατηρηση. Ισχύει ότι $coEx(B_{\ell_1}) \subsetneqq S_{\ell_1}$. Πράγματι, αν $x = (x_n)_n \in S_{\ell_1}$ με $x_n \neq 0$ για άπειρα $n \in \mathbb{N}$, τότε $x \notin coEx(B_{\ell_1})$, αφού κάθε $y = (y_n)_n \in coEx(B_{\ell_1})$ είναι πεπερασμένος κυρτός συνδυασμός των $\pm e_n$ και άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $y_n = 0 \ \forall n \ge n_0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Στις επόμενες ασκήσεις X είναι ένας χώρος με νόρμα.

1. Έστω K_1, K_2 κυρτά υποσύνολα του X με $0 \in K_1^o \cap K_2^o$. Δείξτε ότι $\rho_{K_1 \cap K_2} = \max\{\rho_{K_1}, \rho_{K_2}\}$.

2. Έστω K κυρτό υποσύνολο του X με $0 \in K^o$. Δείξτε ότι $\cap\{\lambda K : \lambda > 1\} = \overline{K}$.

3. Έστω K κυρτό υποσύνολο του X με $0 \in K^o$. Δείξτε ότι το K είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε ευθεία ℓ που διέρχεται από το 0, το $K \cap \ell$ είναι κλειστό.

4. Έστω K κυρτό υποσύνολο του X με $0 \in K^o$. Αν g θετικό υπογραμμικό συναρτησοειδές ώστε

$$\{x \in X : g(x) < 1\} \subset K \subset \{x \in X : g(x) \leq 1\}$$

τότε δείξτε ότι $g = \rho_K$.

5. (i) Έστω A, B κυρτά υποσύνολα του X. Δείξτε ότι

$$\mathrm{co}(A \cup B) = \{\lambda x + (1-\lambda)y : x \in A, \ y \in B, \ \lambda \in [0,1]\}.$$

(ii) Έστω A, B κυρτά συμπαγή υποσύνολα του X. Δείξτε ότι

$$\mathrm{co}(A \cup B) = \overline{\mathrm{co}}(A \cup B).$$

6. Αν $A \subset X$ ανοικτό δείξτε ότι το $\mathrm{co}\, A$ είναι ανοικτό. Είναι η κυρτή θήκη ενός κλειστού συνόλου, κλειστό σύνολο; (Υπόδειξη: Θεωρήστε στον $\mathbb{R}^2$ ένα σύνολο που αποτελείται από μια ευθεία και ένα σημείο εκτός αυτής.)

7. Έστω K συμπαγές κυρτό υποσύνολο του X και $x^* \in X^*$. Θέτουμε

$$A = \{x \in K : x^*(x) = \sup\{x^*(z) : z \in K\}\}.$$

(i) Δείξτε ότι το A είναι μη κενό ακραίο υποσύνολο του X.

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in Ex(K)$ ώστε $x^*(x_0) = \sup\{x^*(z) : z \in K\}$.

8. (i) Έστω $\emptyset \neq A \subset X$, $x^* \in X^*$ και $a \in \mathbb{R}$. Αν $\sup\{x^*(x) : x \in A\} \leq a$ δείξτε ότι $\sup\{x^*(x) : x \in \overline{\mathrm{co}}A\} \leq a$.

(ii) Έστω K κυρτό κλειστό φραγμένο υποσύνολο του X ώστε $K = \overline{\mathrm{co}}Ex(K)$, και $x^* \in X^*$. Δείξτε ότι

$$\sup\{x^*(x) : x \in Ex(K)\} = \sup\{x^*(x) : x \in K\}.$$

9. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty(\mathbb{N})$. Δείξτε ότι

(i) $\sup\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\beta_n : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\beta_n| \leq 1\} = \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$.

(ii) Υπάρχει $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\beta_n| \leq 1$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\beta_n = \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$ αν και μόνο αν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\} = |a_{n_0}|$.

10. Έστω K κυρτό φραγμένο υποσύνολο του X και $x_0 \in X$ ώστε για κάθε $x^* \in X^*$, $x^*(x_0) \leq \sup\{x^*(x) : x \in K\}$. Δείξτε ότι $x_0 \in \overline{K}$.

11. Έστω K κυρτό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι $ExK \subset \partial K$.

12. Αποδείξτε ότι τα μοναδικά ακραία σημεία της μοναδιαίας μπάλας του $C[0,1]$ είναι οι συναρτήσεις $f_1, f_2 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_1(t) = 1$ και $f_2(t) = -1$, $\forall t \in [0,1]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Εφαρμογές του Θεωρήματος Baire στους χώρους Banach

Στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνονται και αποδεικνύονται δυο από τα πλέον θεμελιώδη θεωρήματα της Συναρτησιακής Ανάλυσης, η Αρχή του Ομοιομόρφου Φράγματος και το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης. Και τα δύο αφορούν ιδιότητες τελεστών μεταξύ χώρων Banach. Κεντρικό ρόλο στις αποδείξεις τους έχει το Θεώρημα του Baire. Έχουμε ήδη αναφέρει συνέπειες αυτού σε προηγούμενα κεφάλαια, αλλά η χρήση του στα θεωρήματα αυτού του κεφαλαίου είναι από τις σημαντικότερες εφαρμογές του. Τόσο η Αρχή του Ομοιομόρφου Φράγματος όσο και το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης έχουν σημαντικές συνέπειες ορισμένες από τις οποίες παρατίθενται (π.χ. Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος). Επίσης ορίζονται και μελετούνται οι χώροι πηλίκα και οι διασπάσεις απειροδιάστατων χώρων Banach.

1. Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος

Θεωρημα 7.1 (Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος). *Έστω X ένας χώρος Banach, Y ένας χώρος με νόρμα και $(T_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον X στον Y. Αν η οικογένεια $(T_i)_{i\in I}$ είναι κατά σημείο φραγμένη (δηλαδή για κάθε $x \in X$ ισχύει $\sup\{\|T_i(x)\| : \ i \in I\} < +\infty$) τότε είναι ομοιόμορφα φραγμένη (δηλαδή $\sup\{\|T_i\| : \ i \in I\} < +\infty$).*

Αποδειξη. Για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ θέτουμε

$$A_n = \{x \in X : \ \|T_i(x)\| \leq n, \ \text{για κάθε } i \in I\}.$$

Εφόσον $A_n = \bigcap\limits_{i\in I} T_i^{-1}(B_Y[0,n])$ και επειδή λόγω της συνέχειας κάθε T_i το $T_i^{-1}(B_Y[0,n])$ είναι κλειστό υποσύνολο του X το A_n θα είναι κλειστό υποσύνολο του X για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ως τομή κλειστών συνόλων. Επίσης, από την υπόθεσή μας ότι η οικογένεια T είναι κατά σημείο φραγμένη, έπεται ότι $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Πράγματι αν $x \in X$, θεωρώντας $n > \sup\{\|T_i(x)\| : \ i \in I\}$ έχουμε ότι $x \in A_n$.

Ο X είναι πλήρης χώρος (υποθέσαμε ότι ο X είναι χώρος Banach) άρα από το Θεώρημα Baire υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathrm{int}(A_{n_0}) \neq \emptyset$ συνεπώς υπάρχουν $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $B_X[x_0, \varepsilon] \subset A_{n_0}$. Έτσι για κάθε $x \in X$ με $\|x - x_0\| \leq \varepsilon$ θα ισχύει $\|T_i(x)\| \leq n_0$ για κάθε $i \in I$.

Έστω τώρα τυχαίο $i \in I$. Για κάθε $x \in X$ με $\|x\| \leq 1$ θα ισχύει

$$\begin{aligned} \|T_i(x)\| &= \frac{1}{\varepsilon}\|T_i(\varepsilon x)\| = \frac{1}{\varepsilon}\|T_i(x_0 + \varepsilon x) - T_i(x_0)\| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon}(\|T_i(x_0 + \varepsilon x)\| + \|T_i(x_0)\|) \leq \frac{1}{\varepsilon}(n_0 + n_0) = \frac{2n_0}{\varepsilon} \end{aligned}$$

επομένως $\|T_i\| \leq \frac{2n_0}{\varepsilon}$. Εφόσον αυτό ισχύει για κάθε $i \in I$ συμπεραίνουμε ότι $\sup\{\|T_i\| : \ i \in I\} \leq \frac{2n_0}{\varepsilon}$. □

Πορισμα 7.2 (Θεώρημα Banach-Steinhaus). *Έστω X ένας χώρος Banach, Y ένας χώρος με νόρμα και $T_n : X \longrightarrow Y$, $n = 1, 2, \ldots$ μια ακολουθία φραγμένων γραμμικών τελεστών ώστε για κάθε $x \in X$ να υπάρχει το όριο $\lim_n T_n(x)$. Τότε θέτοντας $T : X \longrightarrow Y$ με $T(x) = \lim_n T_n(x)$, ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.*

Αποδειξη. Αν $x, y \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τότε

$$T(\lambda x + \mu y) = \lim_n T_n(\lambda x + \mu y) = \lambda \lim_n T_n(x) + \mu \lim_n T_n(y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$$

και άρα ο T είναι γραμμικός. Παρατηρούμε ότι η οικογένεια τελεστών $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι κατά σημείο φραγμένη. Πράγματι, για κάθε $x \in X$, η ακολουθία $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και άρα φραγμένη. Από την Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος (Θεώρημα 7.1) έπεται ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|T_n\| \leq M$ για κάθε $n \in N$. Αν θεωρήσουμε $x \in X$ με $\|x\| \leq 1$ τότε $\|T_n(x)\| \leq M$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ και άρα εφόσον $T(x) = \lim_n T_n(x)$ θα έχουμε $\|T(x)\| \leq M$. Επομένως ο τελεστής T είναι φραγμένος. $\square$

Πορισμα 7.3. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα και $K \subset X$ ώστε για κάθε $x^* \in X^*$ να ισχύει $\sup\{|x^*(x)| : x \in K\} < +\infty$. Τότε το σύνολο K είναι φραγμένο.*

Αποδειξη. Για κάθε $x \in K$ θεωρούμε το συναρτησοειδές $\hat{x} \in X^{**}$ (υπενθυμίζουμε ότι $\widehat{\ } : X \to X^{**}$ είναι η κανονική εμφύτευση του X στον X^{**}). Η οικογένεια τελεστών $(\hat{x})_{x\in K}$ είναι μια κατά σημείο φραγμένη οικογένεια τελεστών από τον X^* στον $\mathbb{R}$, εφόσον για κάθε $x^* \in X^*$ έχουμε $\sup\{|\hat{x}(x^*)| : x \in K\} = \sup\{|x^*(x)| : x \in K\} < +\infty$. Εφόσον ο X^* είναι χώρος Banach από την Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος έπεται ότι $\sup\{\|\hat{x}\| : x \in K\} < +\infty$ άρα $\sup\{\|x\| : x \in K\} < +\infty$ δηλαδή το K είναι φραγμένο. $\square$

Παραδειγμα. Θεωρούμε τον χώρο $X = (c_{00}(\mathbb{N}), \|\ \|_\infty)$. Για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ θεωρούμε τον τελεστή $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ για κάθε $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_{00}(\mathbb{N})$. Κάθε f_n είναι γραμμικός ενώ $\|f_n\| \leq n$ αφού για κάθε $x \in X$ έχουμε $|f_n(x)| = |\sum_{i=1}^{n} x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n\|x\|_\infty$. Θεωρώντας το $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_{00}(\mathbb{N})$ με $x_i = 1$ για $i \leq n$ και $x_i = 0$ για $i \geq n+1$, έχουμε ότι $\|x\|_\infty = 1$ και άρα $\|f_n\| \geq f_n(x) = n$. Συνεπώς $\|f_n\| = n$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ και άρα $\sup\{\|f_n\| : n = 1, 2 \ldots\} = +\infty$ δηλαδή η οικογένεια τελεστών $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Η οικογένεια τελεστών $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι όμως κατά σημείο φραγμένη. Πράγματι, αν $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_{00}(\mathbb{N})$ τότε για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ έχουμε $|f_n(x)| = |\sum_{i=1}^{n} x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \|x\|_1$. Με το παράδειγμα αυτό γίνεται φανερό ότι η υπόθεση της πληρότητας του χώρου X στην Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος δεν μπορεί να παραλειφθεί.

2. Θεωρήματα Ανοικτής Απεικόνισης, Κλειστού Γραφήματος

Λημμα 7.4. *Έστω X ένας χώρος Banach, Y ένας χώρος με νόρμα και $T : X \longrightarrow Y$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αν για κάποια $r > \varepsilon > 0$ ισχύει $B_Y(0, r) \subset T[B_X(0, 1)] + B_Y(0, \varepsilon)$ τότε $B_Y(0, r) \subset T[B_X(0, \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{r}})]$.*

Ειδικότερα αν $B_Y(0, r) \subset \overline{T[B_X(0, 1)]}$ τότε $B_Y(0, r) \subset T[B_X(0, 1)]$.

Αποδειξη. Κατ΄ αρχήν παρατηρούμε ότι από την υπόθεση μας λόγω της γραμμικότητας του T έπεται ότι για κάθε $\theta > 0$ ισχύει

$$B_Y(0,\theta) \subset T[B_X(0,\frac{\theta}{r})] + B_Y(0,\frac{\varepsilon\theta}{r}). \quad (1)$$

Έστω τώρα $y \in B_Y(0,r)$. Θα κατασκευάσουμε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X ώστε $\|x_n\| < (\frac{\varepsilon}{r})^{n-1}$ και $\|y - \sum_{i=1}^{n} Tx_i\| < \frac{\varepsilon^n}{r^{n-1}}$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$ (και άρα $\lim_n \|y - \sum_{i=1}^{n} Tx_i\| = 0$). Η κατασκευή γίνεται επαγωγικά. Από την υπόθεσή μας υπάρχει $x_1 \in X$ με $\|x_1\| < 1$ ώστε $\|y - Tx_1\| < \varepsilon$. Έστω τώρα ότι έχουν κατασκευαστεί $x_1, \dots, x_n$ ώστε $\|x_k\| < (\frac{\varepsilon}{r})^{k-1}$ και $\|y - \sum_{i=1}^{k} Tx_i\| < \frac{\varepsilon^k}{r^{k-1}}$ για κάθε $k = 1, \dots, n$. Έχουμε $y - \sum_{i=1}^{n} Tx_i \in B_Y(0, \frac{\varepsilon^n}{r^{n-1}})$ άρα, εφόσον από την (1) για $\theta = \frac{\varepsilon^n}{r^{n-1}}$ προκύπτει ότι $B_Y(0, \frac{\varepsilon^n}{r^{n-1}}) \subset T[B_X(0, \frac{\varepsilon^n}{r^n}))] + B_Y(0, \frac{\varepsilon^{n+1}}{r^n})$, θα υπάρχει $x_{n+1} \in X$ με $\|x_{n+1}\| < (\frac{\varepsilon}{r})^n$ ώστε $\|(y - \sum_{i=1}^{n} Tx_i) - Tx_{n+1}\| < \frac{\varepsilon^{n+1}}{r^n}$ δηλαδή $\|y - \sum_{i=1}^{n+1} Tx_i\| < \frac{\varepsilon^{n+1}}{r^n}$. Η επαγωγική κατασκευή έχει ολοκληρωθεί.

Εφόσον $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\varepsilon}{r})^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{r}}$ και ο X είναι χώρος Banach η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ θα συγκλίνει σε ένα $x \in X$. Επιπλέον θα ισχύει $\|x\| < \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{r}}$. Επίσης από τη συνέχεια του T και της νόρμας θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|y - Tx\| &= \|y - T(\sum_{n=1}^{\infty} x_n)\| = \|y - T(\lim_n \sum_{i=1}^{n} x_i)\| \\ &= \|y - \lim_n T(\sum_{i=1}^{n} x_i)\| = \lim_n \|y - \sum_{i=1}^{n} Tx_i\| = 0 \end{aligned}$$

και άρα $y = Tx$. Επομένως $y \in T[B_X(0, \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{r}})]$.

Υποθέτοντας τώρα ότι $B_Y(0,r) \subset \overline{T[B(0_X,1)]}$ έπεται ότι $B_Y(0,r) \subset T[B_X(0,1)] + B_Y(0,\varepsilon)$ για κάθε $\varepsilon > 0$ και άρα $B_Y(0,r) \subset T[B_X(0, \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{r}})]$ για κάθε $0 < \varepsilon < r$ συνεπώς $B_Y(0,r) \subset T[B_X(0,M)]$ για κάθε $M > 1$. Θεωρούμε τώρα $y \in B_Y(0,r)$ και επιπλέγουμε $\|y\| < \theta < r$. Τότε $y \in B_Y(0,\theta) = \frac{\theta}{r} B_Y(0,r) \subset \frac{\theta}{r} T[B_X(0, \frac{r}{\theta})] = T[B_X(0,1)]$. Επομένως $B_Y(0,r) \subset T[B_X(0,1)]$. □

Θεωρημα 7.5 (Ανοικτής Απεικόνισης). *Έστω X, Y δυο χώροι Banach και $T : X \longrightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής που είναι επί. Τότε ο T είναι ανοικτή απεικόνιση, δηλαδή για κάθε G ανοικτό υποσύνολο του X το $T[G]$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y.*

Αποδειξη. Εφόσον ο T είναι επί $Y = T[X] = T[\bigcup_{n=1}^{\infty} B_X(0,n)] = \bigcup_{n=1}^{\infty} T[B_X(0,n)]$ και άρα $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T[B_X(0,n)]}$. Εφόσον ο Y είναι πλήρης (υποθέσαμε ότι ο Y είναι χώρος Banach) από το Θεώρημα Baire έπεται ότι υπάρχει $n_0 \in N$ ώστε $\mathrm{int}(\overline{T[B_X(0,n)]}) \neq \emptyset$. Όμως $\mathrm{int}(\overline{T[B_X(0,n)]}) = \mathrm{int}(\overline{nT[B_X(0,1)]}) = \mathrm{int}(n\overline{T[B_X(0,1)]}) = n\,\mathrm{int}(\overline{T[B_X(0,1)]})$ και άρα θα έχουμε $\mathrm{int}(\overline{T[B_X(0,1)]}) \neq \emptyset$ συνεπώς θα υπάρχει $y_0 \in Y$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $B_Y(y_0,\varepsilon) \subset \overline{T[B_X(0,1)]}$.

Το σύνολο $\overline{T[B_X(0,1)]}$ είναι συμμετρικό και κυρτό. Λόγω της συμμετρίας του $\overline{T[B_X(0,1)]}$ έπεται ότι $-B_Y(y_0,\varepsilon) \subset \overline{T[B_X(0,1)]}$ δηλαδή ότι $B_Y(-y_0,\varepsilon) \subset \overline{T[B_X(0,1)]}$. Έστω τώρα $y \in B_Y(0,\varepsilon)$. Θα έχουμε ότι $y_0 + y \in B_Y(y_0,\varepsilon) \subset \overline{T[B_X(0,1)]}$ και $-y_0 + y \in B_Y(-y_0,\varepsilon) \subset \overline{T[B_X(0,1)]}$. Από το γεγονός ότι το $\overline{T[B_X(0,1)]}$ είναι κυρτό έπεται ότι $y = \frac{1}{2}(y_0 + y) +$

$\frac{1}{2}(-y_0 + y) \in \overline{T[B_X(0,1)]}$. Συνεπώς $B_Y(0,\varepsilon) \subset \overline{T[B_X(0,1)]}$. Από το Λήμμα 7.4 (εδώ χρησιμοποιείται το γεγονός ότι ο X είναι πλήρης) έπεται ότι $B_Y(0,\varepsilon) \subset T[B_X(0,1)]$.

Έστω τώρα G ένα μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X. Θα δείξουμε ότι το $T[G]$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y. Έστω $y \in T[G]$. Επιλέγουμε $x \in G$ ώστε $Tx = y$. Εφόσον το G είναι ανοικτό υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B_X(x,\delta) \subset G$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} B_Y(y,\delta\varepsilon) &= y + B_Y(0,\delta\varepsilon) = Tx + \delta B_Y(0,\varepsilon) \subset Tx + \delta T[B_X(0,1)] \\ &= T[B_X(x,\delta)] \subset T[G]. \end{aligned}$$

Επομένως το $T[G]$ είναι ανοικτό. □

Πορισμα 7.6. *Έστω X, Y δυο χώροι Banach. Αν $T : X \longrightarrow Y$ είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής και ο T είναι 1–1 και επί τότε ο T είναι ισομορφισμός.*

Αποδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης ο τελεστής T θα είναι ανοικτή απεικόνιση δηλαδή για κάθε ανοικτό υποσύνολο G του X το $T[G]$ θα είναι ανοικτό υποσύνολο του Y. Εφόσον ο T είναι 1–1 και επί ορίζεται ο $T^{-1} : Y \longrightarrow X$, ενώ είναι συνεχής (φραγμένος) αφού για κάθε ανοικτό υποσύνολο G του X το $(T^{-1})^{-1}(G) = T[G]$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y. Επομένως ο T είναι ισομορφισμός. □

Πορισμα 7.7. *Αν X είναι ένας γραμμικός χώρος, $\| \, \|$, $\| \, \|'$ είναι δυο νόρμες στον X ώστε οι $(X, \| \, \|)$, $(X, \| \, \|')$ να είναι χώροι Banach και υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x\| \leq M\|x\|'$ για κάθε $x \in X$ τότε οι νόρμες $\| \, \|$ και $\| \, \|'$ είναι ισοδύναμες (δηλαδή θα υπάρχει και $m > 0$ ώστε $m\|x\|' \leq \|x\|$ για κάθε $x \in X$).*

Αποδειξη. Προκύπτει άμεσα από το προηγούμενο πόρισμα αφού ο ταυτοτικός τελεστής $I : (X, \| \, \|') \longrightarrow (X, \| \, \|)$ είναι 1–1 επί και φραγμένος και άρα είναι ισομορφισμός. □

Με τη βοήθεια του Λήμματος 7.4 αποδεικνύεται και η επόμενη πρόταση.

Προταση 7.8. *Για κάθε διαχωρίσιμο χώρο Banach Y υπάρχει ένας επί φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : \ell_1(\mathbb{N}) \longrightarrow Y$.*

Αποδειξη. Εφόσον ο Y είναι διαχωρίσιμος η $B_Y(0,1)$ είναι διαχωρίσιμη. Έστω $D = \{y_n : \, n \in \mathbb{N}\}$ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολό της $B_Y(0,1)$.

Ορίζουμε $T : \ell_1(\mathbb{N}) \longrightarrow Y$ με $T\big((\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n y_n$. Παρατηρούμε κατ΄ αρχήν ότι ο T είναι καλά ορισμένος. Πράγματι, για κάθε $x = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1(\mathbb{N})$ έχουμε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\lambda_n y_n\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \|y_n\| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| = \|x\|_1 < +\infty$ και άρα, αφού ο Y είναι χώρος Banach η απολύτως συγκλίνουσα σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n y_n$ συγκλίνει στον Y. Έτσι ο T είναι καλά ορισμένος ενώ είναι προφανές ότι είναι γραμμικός. Επίσης για το τυχαίο $x = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1(\mathbb{N})$ ισχύει

$$\|Tx\| = \|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n y_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| = \|x\|_1$$

συνεπώς ο T είναι φραγμένος τελεστής με $\|T\| \leq 1$.

Απομένει να δειχθεί ότι ο T είναι επί. Θεωρώντας τυχαίο $y \in B_Y(0,1)$, εφόσον το D είναι πυκνό στην $B_Y(0,1)$ και η $B_Y(0,1)$ δεν έχει μεμονωμένα σημεία υπάρχει μια υπακολουθία $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $\|y_{k_n} - y\| \to 0$. Θέτοντας $x_n = (1 - \frac{1}{n})e_{k_n} \in \ell_1(\mathbb{N})$ έχουμε ότι $x_n \in B_{\ell_1(\mathbb{N})}(0,1)$ και $\|Tx_n - y\| \to 0$ συνεπώς $y \in \overline{T[B_{\ell_1(\mathbb{N})}(0,1)]}$. Δείξαμε λοιπόν ότι

$B_Y(0,1) \subset \overline{T[B_{\ell_1(\mathbb{N})}(0,1)]}$. Από το Λήμμα 7.4 έπεται ότι $B_Y(0,1) \subset T[B_{\ell_1(\mathbb{N})}(0,1)]$ από όπου έπεται άμεσα ότι ο T είναι επί. $\square$

Αν (X,ρ), (Y,d) είναι δυο μετρικοί χώροι και $f : X \longrightarrow Y$ μια συνεχής συνάρτηση τότε το γράφημα της f δηλαδή το σύνολο $G_f = \{(x,y) \in X \times Y : \ f(x) = y\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$. (Πράγματι, αν $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο G_f και $(x,y) \in X \times Y$ ώστε $(x_n, y_n) \to (x,y)$ τότε $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και $y_n \xrightarrow{d} y$. Εφόσον $(x_n, y_n) \in G_f$ θα έχουμε $f(x_n) = y_n$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ και άρα $f(x_n) \xrightarrow{d} y$. Λόγω της συνέχειας της f έπεται ότι $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x)$ και από τη μοναδικότητα του ορίου θα έχουμε $f(x) = y$ δηλαδή $(x,y) \in G_f$.)

Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει γενικά, δηλαδή υπάρχουν μη συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων που έχουν κλειστό γράφημα. Για παράδειγμα η $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$ για $x \neq 0$ και $f(0) = 0$ έχει κλειστό γράφημα χωρίς να είναι συνεχής (θεωρούμε τον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική). Μάλιστα σε αυτό το παράδειγμα ο $(\mathbb{R}, \rho_{|\,|})$ είναι πλήρης μετρικός χώρος και η συνήθης μετρική είναι η μετρική που επάγεται από τον $(\mathbb{R}, |\ |)$ που είναι χώρος Banach.

Το Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος μας λέει ότι στην περίπτωση γραμμικών τελεστών μεταξύ χώρων Banach το αντίστροφο ισχύει. Σημειώνουμε ότι αν $(X, \|\ \|_X)$, $(Y, \|\ \|_Y)$ είναι δυο χώροι με νόρμα τότε στον $X \times Y$ θεωρούμε τη νόρμα $\|(x,y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$. Σημειώνουμε ότι αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι δυο ακολουθίες στους X, Y αντίστοιχα και $x \in X$, $y \in Y$ τότε $(x_n, y_n) \xrightarrow{\|\ \|} (x,y)$ αν και μόνο αν $x_n \xrightarrow{\|\ \|_X} x$ και $y_n \xrightarrow{\|\ \|_Y} y$. Επίσης αν Z είναι ένας οποιοσδήποτε χώρος Banach και $T : Z \longrightarrow X \times Y$ τότε ο T είναι συνεχής αν και μόνο αν οι $\pi_1 \circ T$, $\pi_2 \circ T$ είναι συνεχείς όπου $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$ και $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ είναι οι προβολές στους X και Y αντίστοιχα (οι π_1, π_2 είναι προφανώς συνεχείς). Τέλος ο $X \times Y$ είναι χώρος Banach αν και μόνο αν οι X και Y είναι χώροι Banach.

Θεωρημα 7.9 (Κλειστού Γραφήματος). *Έστω X, Y δυο χώροι Banach και $T : X \longrightarrow Y$ ένας γραμμικός τελεστής. Αν το γράφημα του T είναι κλειστό τότε ο τελεστής T είναι φραγμένος.*

Αποδειξη. Το γράφημα G_T του τελεστή T είναι προφανώς υπόχωρος του $X \times Y$ λόγω της γραμμικότητας του T. Έτσι εφόσον το G_T είναι κλειστό στον $X \times Y$ ο G_T με τον περιορισμό της νόρμας του $X \times Y$ είναι χώρος Banach. Ο περιορισμός της προβολής π_1 στον υπόχωρο G_T, δηλαδή ο $S = \pi_1|_{G_T} : G_T \longrightarrow X$ είναι φραγμένος γραμμικός ενώ εφόσον είναι προφανώς 1–1 και επί και οι G_T, X είναι χώροι Banach από το Πόρισμα 7.6 θα είναι ισομορφισμός. Έτσι ο $S = (\pi_1|_{G_T})^{-1} : X \longrightarrow G_T$ με $S(x) = (x, Tx)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. Επομένως, εφόφον $T = \pi_2 \circ S : X \longrightarrow Y$, ο T θα είναι φραγμένος ως σύνθεση δύο φραγμένων γραμμικών τελεστών. $\square$

Με τα επόμενα παραδείγματα καταδεικνύεται ότι οι υποθέσεις πληρότητας στα Θεωρήματα Ανοικτής Απεικόνισης και Κλειστού Γραφήματος δεν μπορούν να παραλειφθούν.

Παραδειγματα. 1. Παρατηρούμε καταρχήν ότι ο $\ell_1(\mathbb{N}) \subsetneq \ell_2(\mathbb{N})$. Πράγματι, αν $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1(\mathbb{N})$ τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|x_n| \leq 1$ για κάθε $n > n_0$ και άρα $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \sum\limits_{n=1}^{n_0} |x_n|^2 + \sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n|^2 \leq \sum\limits_{n=1}^{n_0} |x_n|^2 + \sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n| \leq \sum\limits_{n=1}^{n_0} |x_n|^2 + \|x\|_1 < +\infty$ συνεπώς $x \in \ell_2(\mathbb{N})$. Έτσι $\ell_1(\mathbb{N}) \subset \ell_2(\mathbb{N})$ ενώ $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N}) \setminus \ell_1(\mathbb{N})$.

Παρατηρούμε τώρα ότι ο $(\ell_1(\mathbb{N}), \| \|_2)$ δεν είναι χώρος Banach. Εφόσον ο $c_{00}(\mathbb{N})$ είναι πυκνός υπόχωρος του $(\ell_2(\mathbb{N}), \| \|_2)$ και $c_{00}(\mathbb{N}) \subset \ell_1(\mathbb{N})$ ο $\ell_1(\mathbb{N})$ θα είναι επίσης πυκνός υπόχωρος του $(\ell_2(\mathbb{N}), \| \|_2)$. Έτσι αφού $\ell_1(\mathbb{N}) \subsetneq \ell_2(\mathbb{N})$ ο $\ell_1(\mathbb{N})$ δεν είναι κλειστός υπόχωρος του $(\ell_2(\mathbb{N}), \| \|_2)$ συνεπώς ο $(\ell_1(\mathbb{N}), \| \|_2)$ δεν είναι χώρος Banach.

Θέτουμε $X = (\ell_1(\mathbb{N}), \| \|_1)$, $Y = (\ell_1(\mathbb{N}), \| \|_2)$ και θεωρούμε τον ταυτοτικό τελεστή $I : X \longrightarrow Y$. Ο I είναι γραμμικός 1–1 και επί και είναι φραγμένος τελεστής. Πράγματι, αν $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1(\mathbb{N})$ με $\|x\|_1 \leq 1$ τότε $|x_n| \leq 1$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ συνεπώς $\|x\|_2 = \big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\big)^{1/2} \leq \big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|\big)^{1/2} \leq 1$ και έτσι έχουμε δείξει ότι $\|I\| \leq 1$. Όμως ο I δεν είναι ανοικτή απεικόνιση. Πράγματι, αν ο I ήταν ανοικτή απεικόνιση (δηλαδή αν ο I^{-1} ήταν φραγμένος) τότε ο I θα ήταν ισομορφισμός και άρα ο $Y = (\ell_1(\mathbb{N}), \| \|_2)$ ως ισόμορφος με τον $X = (\ell_1(\mathbb{N}), \| \|_1)$ θα ήταν χώρος Banach, άτοπο. Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι η υπόθεση ότι ο δεύτερος χώρος είναι πλήρης στο Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης δεν μπορεί να παραλειφθεί.

2. Λόγω της συνέχειας του I στο προηγούμενο παράδειγμα το γράφημα G_I του I είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$. Η απεικόνιση $F : X \times Y \longrightarrow Y \times X$ που ορίζεται από τον τύπο $F(x, y) = (y, x)$ είναι προφανώς ομοιομορφισμός. Έτσι το $F(G_I) = G_{I^{-1}}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $Y \times X$. Ο τελεστής $I^{-1} : Y \to X$ όμως, όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, δεν είναι φραγμένος. Με το παράδειγμα αυτό δείξαμε ότι δεν μπορεί να παραλειφθεί η υπόθεση ότι ο πρώτος χώρος είναι πλήρης στο Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος.

3. Αν I είναι ένα άπειρο σύνολο συμβολίζουμε με $c_{00}(I)$ το σύνολο

$$c_{00}(I) = \big\{x : I \longrightarrow R : \ \{i \in I : \ x(i) \neq 0\} \text{ πεπερασμένο } \big\}.$$

Το $c_{00}(I)$ είναι διανυσματικός χώρος με πράξεις κατά σημείο. Είναι άμεσο να ελεγθεί ότι ο τύπος $\|x\|_1 = \sum\limits_{i\in I} |x(i)|$ ορίζει μια νόρμα στον $c_{00}(I)$. (Σημειώνουμε ότι το άθροισμα στον ορισμό της νόρμας είναι πεπερασμένο διότι μόνο για πεπερασμένα το πλήθος $i \in I$ είναι $x(i) \neq 0$.) Ο $(c_{00}(I), \| \|_1)$ δεν είναι χώρος Banach. Για να το διαπιστώσουμε αυτό θεωρούμε μια ακολουθία $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από διαφορετικά ανά δύο στοιχεία του I και για κάθε n θεωρούμε το διάνυσμα $x_n \in c_{00}(I)$ που ορίζεται από τη σχέση

$$x_n(i) = \begin{cases} \frac{1}{2^k}, & \text{αν } \ i = i_k, \ k \leq n \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι για $n < m$ έχουμε $\|x_m - x_n\|_1 = \sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^n}$ και άρα η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $(c_{00}(I), \| \|_1)$. Δείχνουμε ότι δεν είναι συγκλίνουσα. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x \in c_{00}(I)$ ώστε $\|x_n - x\|_1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Εφόσον για κάθε $i \in I$ έχουμε $|x_n(i) - x(i)| \leq \|x_n - x\|_1$, θα ισχύει $\lim\limits_n x_n(i) = x(i)$ για κάθε $i \in I$. Άρα για κάθε $k = 1, 2, \ldots$ θα ισχύει $x(i_k) = \frac{1}{2^k}$, άτοπο αφού $x \in c_{00}(I)$. Επομένως ο $(c_{00}(I), \| \|_1)$ δεν είναι χώρος Banach.

Θεωρούμε τώρα έναν τυχαίο απειροδιάστατο χώρο Banach Y και επιλέγουμε μια Hamel βάση του $(y_i)_{i\in I}$ με $\|y_i\| = 1$ για κάθε $i \in I$. Θεωρούμε τον $X = (c_{00}(I), \| \|_1)$ και τον $T : X \longrightarrow Y$ με $T(x) = \sum\limits_{i\in I} x(i)y_i$ και παρατηρούμε ότι ο T είναι γραμμικός 1–1 και επί. Ο T είναι επίσης φραγμένος αφού για κάθε $x \in c_{00}(I)$ έχουμε $\|T(x)\| = \|\sum\limits_{i\in I} x(i)y_i\| \leq \sum\limits_{i\in I} |x(i)|\|y_i\| = \sum\limits_{i\in I} |x(i)| = \|x\|_1$. Ο T δεν είναι ανοικτή απεικόνιση, διότι αν ήταν τότε θα ήταν ισομορφισμός και άρα ο $X = (c_{00}(I), \| \|_1)$ ως ισόμορφος του Y θα ήταν χώρος Banach, άτοπο. Με το παράδειγμα αυτό δείχθηκε ότι η υπόθεση ότι ο πρώτος χώρος είναι πλήρης στο Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης δεν μπορεί να παραλειφθεί.

4. Όπως ακριβώς και στο δεύτερο παράδειγμα το γράφημα $G_{T^{-1}}$ του τελεστή $T^{-1} : Y \longrightarrow X$ είναι κλειστό στον $Y \times X$, ενώ ο τελεστής T^{-1} δεν είναι φραγμένος όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα (αφού ο T δεν είναι ανοικτή απεικόνιση). Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι στο Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος δεν μπορεί να παραλειφθεί η υπόθεση ότι ο δεύτερος χώρος είναι πλήρης.

3. Χώροι πηλίκα

Έστω X ένας γραμμικός χώρος και Y ένας γραμμικός υπόχωρός του. Για $x_1, x_2 \in X$ ορίζεται η σχέση

$$x_1 \sim x_2 \Longleftrightarrow x_1 - x_2 \in Y$$

και είναι άμεσο ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στον X. Επίσης $x_1 \sim x_2 \Longleftrightarrow x_1 - x_2 \in Y \Longleftrightarrow x_1 \in x_2 + Y$ και άρα η κλάση ισοδυναμίας ενός $x \in X$ είναι το σύνολο $\{z \in X : z \sim x\} = x + Y$. Ο χώρος όλων των κλάσεων ισοδυναμίας συμβολίζεται με X/Y και ονομάζεται χώρος πηλίκο του X ως προς τον Y. Έτσι $X/Y = \{x + Y : x \in X\}$. Ο X/Y εφοδιάζεται κατά φυσιολογικό τρόπο με πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού από τις σχέσεις

$$(x_1 + Y) + (x_2 + Y) = (x_1 + x_2) + Y$$

$$\lambda(x + Y) = \lambda x + Y.$$

Είναι άμεσο ότι οι πράξεις είναι καλά ορισμένες (δηλαδή αν $x_1 + Y = x_1' + Y$ και $x_2 + Y = x_2' + Y$ τότε $(x_1 + x_2) + Y = (x_1' + x_2') + Y$ και $\lambda x_1 + Y = \lambda x_1' + Y$) και καθιστούν τον X/Y διανυσματικό χώρο με μηδενικό στοιχείο το $0 + Y = Y$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $(X, \| \|)$ είναι χώρος με νόρμα και Y γραμμικός υπόχωρός του. Η φυσιολογική υποψήφια νόρμα για τον χώρο X/Y είναι αυτή που ορίζεται από τη σχέση

$$\|x + Y\| = \inf\{\|x + y\| : y \in Y\} = \inf\{\|x - y\| : y \in Y\} = \rho(x, Y). \qquad (1)$$

Από την Πρόταση 2.8 έπεται ότι $\|\lambda(x+Y)\| = |\lambda| \|x+Y\|$ για κάθε $\lambda \in R$ και $x+Y \in X/Y$. Για να δούμε την τριγωνική ιδιότητα θεωρούμε $x_1, x_2 \in X$ και παρατηρούμε ότι για κάθε $y_1, y_2 \in Y$ ισχύει

$$\rho(x_1 + x_2, Y) \leq \|x_1 + x_2 - (y_1 + y_2)\| \leq \|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\|.$$

Συνεπώς $\|(x_1 + x_2) + Y\| \leq \inf\{\|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\| : y_1, y_2 \in Y\} = \inf\{\|x_1 - y_1\| : y_1 \in Y_1\} + \inf\{\|x_2 - y_2\| : y_2 \in Y_2\} = \|x_1 + Y\| + \|x_2 + Y\|$. Επομένως $\|(x_1 + Y) + (x_2 + Y)\| \leq \|x_1 + Y\| + \|x_2 + Y\|$ και η τριγωνική ανισότητα έχει δειχθεί. Επίσης $\|x+Y\| \geq 0$ για κάθε $x+Y \in X/Y$. Για να είναι η $\| \|$ που ορίστηκε στην (1) νόρμα πρέπει να ισχύει $\|x + Y\| = 0$ αν και μόνο αν $x + Y = Y$ δηλαδή αν και μόνο αν $x \in Y$. Όμως $\|x + Y\| = 0 \Longleftrightarrow \rho(x, Y) = 0 \Longleftrightarrow x \in \overline{Y}$. Έτσι η $\| \|$ είναι νόρμα στον X/Y αν και μόνο αν $\overline{Y} = Y$, δηλαδή αν και μόνο αν ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X.

Πρόταση 7.10. *Έστω $(X, \| \|)$ ένας χώρος με νόρμα και Y ένας κλειστός υπόχωρος του X. Τότε ο X/Y με τη*

$$\|x + Y\| = \rho(x, Y) = \inf\{\|x + y\| : y \in Y\}$$

είναι χώρος με νόρμα και ο $\pi : X \longrightarrow X/Y$ με $\pi(x) = x + Y$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. (Ο $(X/Y, \| \ \|)$ λέγεται χώρος πηλίκο του X και ο $\pi : X \longrightarrow X/Y$ τελεστής πηλίκο).

Αν ο X είναι χώρος Banach τότε και ο $(X/Y, \| \ \|)$ είναι χώρος Banach.

Απόδειξη. Το ότι ο $(X/Y, \| \ \|)$ είναι χώρος με νόρμα έχει δειχθεί προηγουμένως. Ο π είναι προφανώς γραμμικός ενώ εφόσον $\|\pi(x)\| = \rho(x, Y) \leq \|x\|$ για κάθε $x \in X$ ο τελεστής π είναι φραγμένος.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο είναι χώρος Banach και δείχνουμε ότι και ο χώρος πηλίκο ο $(X/Y, \| \ \|)$ είναι χώρος Banach. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.6 αρκεί να δείξουμε ότι κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρα στον $(X/Y, \| \ \|)$ είναι συγκλίνουσα. Έστω $(x_n + Y)_{n=1}^{\infty}$ στον X/Y ώστε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n + Y\| < +\infty$. Για κάθε $n = 1, 2, \dots$ επιλέγουμε $z_n \in x_n + Y$ ώστε $\|z_n\| < \frac{1}{2^n} + \|x_n + Y\|$. Τότε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|z_n\| < \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2^n} + \|x_n + Y\|) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n + Y\| < +\infty$ και άρα, αφού ο X είναι χώρος Banach, η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει σε ένα $z \in X$. Δείχνουμε ότι $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n + Y) = z + Y$. Για κάθε $n = 1, 2, \dots$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|\sum_{i=1}^{n} (x_i + Y) - (z + Y)\| &= \|\sum_{i=1}^{n} (z_i + Y) - (z + Y)\| = \|(\sum_{i=1}^{n} z_i - z) + Y\| \\ &\leq \|\sum_{i=1}^{n} z_i - z\| \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

και άρα $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n + Y) = z + Y$. Επομένως ο $(X/Y, \| \ \|)$ είναι χώρος Banach. □

Πρόταση 7.11. *Έστω X, Z χώροι Banach και $T : X \longrightarrow Z$ φραγμένος γραμμικός τελεστής επί. Τότε ο χώρος πηλίκο $X/\operatorname{Ker} T$ είναι ισόμορφος του Z.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $F : X/\operatorname{Ker} T \longrightarrow Z$ με $F(x + \operatorname{Ker} T) = T(x)$. Παρατηρούμε καταρχήν ότι ο F είναι καλά ορισμένος. Πράγματι, αν $x + \operatorname{Ker} T = x' + \operatorname{Ker} T$ τότε $x - x' \in \operatorname{Ker} T$ άρα $T(x - x') = 0$ συνεπώς $T(x) = T(x')$. Επίσης ο F είναι γραμμικός αφού

$$\begin{aligned} F(\lambda(x + \operatorname{Ker} T) + \mu(y + \operatorname{Ker} T)) &= F((\lambda x + \mu y) + \operatorname{Ker} T) = T(\lambda x + \mu y) \\ &= \lambda T(x) + \mu T(y) = \lambda F(x + \operatorname{Ker} T) + \mu F(y + \operatorname{Ker} T) \end{aligned}$$

για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $x + \operatorname{Ker} T, y + \operatorname{Ker} T \in X/\operatorname{Ker} T$. Επίσης ο F είναι 1–1 αφού αν $F(x + \operatorname{Ker} T) = F(x' + \operatorname{Ker} T)$ τότε $T(x) = T(x')$ άρα $T(x - x') = 0$ δηλαδή $x - x' \in \operatorname{Ker} T$ συνεπώς $x + \operatorname{Ker} T = x' + \operatorname{Ker} T$. Ο F είναι και επί. Πράγματι αν $z \in Z$ τότε, εφόσον ο T είναι επί, υπάρχει $x \in X$ ώστε $T(x) = z$ και άρα $F(x + \operatorname{Ker} T) = z$.

Δείχνουμε ότι ο τελεστής $F : X/\operatorname{Ker} T \longrightarrow Z$ είναι φραγμένος με $\|F\| \leq \|T\|$. Έστω $x + \operatorname{Ker} T \in X/\operatorname{Ker} T$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $y \in x + \operatorname{Ker} T$ με $\|y\| < \|x + \operatorname{Ker} T\| + \varepsilon$ και άρα

$$\|F(x + \operatorname{Ker} T)\| = \|F(y + \operatorname{Ker} T)\| = \|T(y)\| \leq \|T\|\|y\| < \|T\|(\|x + \operatorname{Ker} T\| + \varepsilon).$$

Εφόσον αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ έπεται ότι $\|F(x + \operatorname{Ker} T)\| \leq \|T\| \cdot \|x + \operatorname{Ker} T\|$. Έτσι ο F είναι ένας 1–1 και επί φραγμένος γραμμικός τελεστής μεταξύ των χώρων Banach $X/\operatorname{Ker} T$ και Z και άρα σύμφωνα με το Πόρισμα 7.6 ο F είναι ισομορφισμός. Επομένως ο χώρος πηλίκο $X/\operatorname{Ker} T$ είναι ισόμορφος του Z. □

Πορισμα 7.12. *Για κάθε διαχωρίσιμο χώρο Banach X υπάρχει ένας κλειστός υπόχωρος Y του $\ell_1(\mathbb{N})$ ώστε ο χώρος πηλίκο $\ell_1(\mathbb{N})/Y$ να είναι ισόμορφος με τον X.*

Αποδειξη. Από την Πρόταση 7.8 υπάρχει ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : \ell_1(\mathbb{N}) \longrightarrow X$ που είναι επί. Θέτοντας $Y = \mathrm{Ker}(T)$ από την Πρόταση 7.11 συμπεραίνουμε ότι ο $\ell_1(\mathbb{N})/Y$ είναι ισόμορφος με τον X. $\square$

4. Διασπάσεις χώρων Banach

Ένας γραμμικός χώρος X είναι το ευθύ άθροισμα δυο υποχώρων του Y, Z αν κάθε $x \in X$ μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $x = y + z$ με $y \in Y$ και $z \in Z$. Σε αυτή την περίπτωση συμβολίζουμε $X = Y \oplus Z$. Παρατηρούμε ότι $X = Y \oplus Z$ αν και μόνο αν $X = Y + Z$ και $Y \cap Z = \{0\}$. Αν ο X γράφεται ως ευθύ άθροισμα $X = Y \oplus Z$ τότε ορίζεται η απεικόνιση $P : X \longrightarrow X$ από τον τύπο $P(y+z) = y$ και η P είναι ταυτοδύναμος γραμμικός τελεστής, δηλαδή $P^2 = P$, ενώ $P(x) = x$ αν και μόνο αν $x \in Y$ και $P(x) = 0$ αν και μόνο αν $x \in Z$. Η απεικόνιση αυτή είναι η προβολή επί του Y κατά μήκος του Z. Αντιστρόφως αν $P : X \longrightarrow X$ είναι γραμμικός τελεστής ώστε $P^2 = P$ τότε, θέτοντας $Y = P[X]$ και $Z = \mathrm{Ker}(P)$, έχουμε $X = Y \oplus Z$ και ο τελεστής P είναι προβολή του X επί του Y. (Πράγματι, έστω $w \in Y \cap Z$. Τότε $w \in Y = P[X]$ και άρα υπάρχει $x \in X$ ώστε $w = P(x)$. Εφόσον $P^2 = P$ θα έχουμε $P(x) = P(P(x)) = P(w)$ και άρα $w = P(w)$. Αφού $w \in Z = \mathrm{Ker}(P)$ έπεται ότι $P(w) = 0$ και άρα $w = 0$ επομένως $Y \cap Z = \{0\}$. Αν τώρα $x \in X$ τότε $x = P(x) + (I - P)(x)$ με $P(x) \in Y$ και $(I - P)(x) \in \mathrm{Ker}(P) = Z$ εφόσον $P((I - P)(x)) = (P - P^2)(x) = 0$.) Αν X είναι γραμμικός χώρος και Y ένας υπόχωρος του X κάθε υπόχωρος Z του X ώστε $X = Y \oplus Z$ λέγεται αλγεβρικό συμπλήρωμα του Y.

Αν ο X είναι χώρος με νόρμα μας ενδιαφέρουν οι προβολές που είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Παρατηρούμε ότι αν $P \in \mathcal{B}(X)$ είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής με $P^2 = P$ τότε ο $Y = P[X]$ είναι κλειστός υπόχωρος του X. Πράγματι, έστω $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στον $Y = P[X]$ και $x \in X$ ώστε $y_n \to x$. Για κάθε n επιλέγοντας $x_n \in X$ ώστε $P(x_n) = y_n$ έχουμε ότι $P(y_n) = P(P(x_n)) = P^2(x_n) = P(x_n) = y_n$. Λόγω της συνέχειας της P έπεται ότι $P(y_n) \to P(x)$ δηλαδή $y_n \to P(x)$. Συνεπώς $x = P(x) \in P[X]$ και άρα ο $P[X]$ είναι κλειστός.

Ένας κλειστός υπόχωρος Y του X λέγεται συμπληρωματικός υπόχωρος αν υπάρχει φραγμένη (συνεχής) προβολή του X επί του Y.

Προταση 7.13. *Έστω X ένας χώρος Banach και Y ένας κλειστός υπόχωρος του X. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *O Y είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X.*
(ii) *Υπάρχει ένας κλειστός υπόχωρος Z του X ώστε $X = Y \oplus Z$. (Σε αυτή την περίπτωση ο Z λέγεται τοπολογικό συμπλήρωμα του Y και λέμε ότι ο X είναι το τοπολογικό ευθύ άθροισμα των Y και Z.)*

Αποδειξη. (i)⇒(ii) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $P : X \longrightarrow X$ φραγμένος γραμμικός τελεστής ώστε $P^2 = P$ και $P[X] = Y$. Θέτοντας $Z = \mathrm{Ker}(P)$ έχουμε, όπως είδαμε προηγουμένως, ότι $X = Y \oplus Z$ ενώ λόγω της συνέχειας του P, ο υπόχωρος $Z = \mathrm{Ker}(P) = P^{-1}(\{0\})$ είναι κλειστός.

(ii)⇒(i) Έστω Y, Z κλειστοί υπόχωροι του X ώστε $X = Y \oplus Z$. Δείχνουμε ότι ο γραμμικός τελεστής $P : X \longrightarrow X$ με $P(y + z) = y$ είναι φραγμένος. (Είναι προφανές ότι προφανές ότι $P[X] = Y$ και $\mathrm{Ker}(P) = Z$.) Αυτό θα προκύψει ως συνέπεια του θεωρήματος

Κλειστού Γραφήματος. Εφόσον ο X είναι χώρος Banach αρκεί να δείξουμε ότι το γράφημα G_P του τελεστή P είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times X$.

Θεωρούμε $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο G_P και $(x,y) \in X \times X$ ώστε $(x_n, y_n) \to (x,y)$ και θα δείξουμε ότι $(x,y) \in G_P$. Με την υπόθεση δηλαδή ότι $x_n \to x$, $y_n \to y$ και $y_n = P(x_n)$ για κάθε n θα δείξουμε ότι $P(x) = y$.

Καταρχήν αφού ο Y είναι κλειστός και $y_n = P(x_n) \in P[X] = Y$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ από το γεγονός ότι $y_n \to y$ έπεται ότι $y \in Y$ και άρα $P(y) = y$. Για κάθε n, εφόσον $P(x_n) = y_n$ και $y_n \in Y$ έπεται ότι $P(x_n - y_n) = P(x_n) - P(y_n) = P(x_n) - y_n = 0$ συνεπώς $x_n - y_n \in \mathrm{Ker}(P) = Z$. Έτσι, αφού ο Z είναι κλειστός και $x_n - y_n \to x - y$ έπεται ότι $x - y \in Z$ και άρα $P(x - y) = 0$. Επομένως $P(x) = P(y)$, άρα $P(x) = y$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Πορισμα 7.14. *Έστω X ένας χώρος Banach και Y ένας κλειστός υπόχωρος του X με πεπερασμένη συνδιάσταση. Τότε κάθε αλγεβρικό συμπλήρωμα του Y είναι και τοπολογικό. Ειδικότερα ο Y είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X.*

Αποδειξη. Έστω Z ένα αλγεβρικό συμπλήρωμα του Y. Ο Z είναι πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X άρα είναι κλειστός. Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση ο Z είναι τοπολογικό συμπλήρωμα του Y. □

Προταση 7.15. *Έστω X ένας χώρος Banach και Y ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X. Τότε ο Y είναι συμπληρωματικός υπόχωρος.*

Αποδειξη. Καταρχήν αφού ο Y είναι πεπερασμένης διάστασης είναι κλειστός. Έστω $\dim Y = n$ και $\{y_1, \ldots, y_n\}$ μια Hamel βάση του Y. Θεωρούμε για κάθε $i = 1, \ldots, n$ τη γραμμική απεικόνιση $f_i : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_i(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j) = \lambda_i$. Η f_i είναι γραμμικό συναρτησοειδές του Y, άρα από το θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $F_i \in X^*$ ώστε $F_{i|Y} = f_i$. Θέτουμε $Z = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(F_i)$.

Ο Z είναι κλειστός υπόχωρος του X. Δείχνουμε ότι $X = Y \oplus Z$. Καταρχήν παρατηρούμε ότι $Y \cap Z = \{0\}$. Έστω $w \in Y \cap Z$. Τότε εφόσον $w \in Y$ είναι $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$ ενώ αφού $w \in Z$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$ έχουμε $0 = F_k(w) = f_k(w) = \lambda_k$ και άρα $w = 0$. Έστω τώρα $x \in X$. Θέτουμε $y = \sum_{i=1}^{n} F_i(x) y_i \in Y$. Παρατηρούμε ότι $x - y \in Z$. Πράγματι για κάθε $k = 1, \ldots, n$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} F_k(x-y) &= F_k(x) - F_k(y) = F_k(x) - \sum_{i=1}^{n} F_i(x) F_k(y_i) \\ &= F_k(x) - \sum_{i=1}^{n} F_i(x) f_k(y_i) = F_k(x) - F_k(x) = 0 \end{aligned}$$

και άρα $x - y \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(F_i) = Z$. Έτσι $X = Y \oplus Z$ με τους Y, Z να είναι κλειστοί και άρα ο Y είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X. □

Προταση 7.16. *Έστω X ένας χώρος Banach και Y, Z δυο κλειστοί υπόχωροι του X με $Y \cap Z = \{0\}$. Τότε ο υπόχωρος $Y + Z$ είναι κλειστός αν και μόνο αν $\rho(S_Y(0,1), S_Z(0,1)) > 0$.*

Αποδειξη. Υποθέτουμε ότι ο $Y + Z$ είναι κλειστός υπόχωρος του X. Τότε ο $Y + Z$ είναι χώρος Banach και άρα από την Πρόταση 7.13 ο $Y \oplus Z$ είναι το τοπολογικό ευθύ άθροισμα των κλειστών υποχώρων Y, Z. Έτσι η προβολή $P : Y \oplus Z \longrightarrow Y$ με $P(y+z) = y$ για κάθε $y \in Y$ και $z \in Z$ είναι φραγμένος τελεστής. Για κάθε $y \in S_Y(0,1)$, $z \in S_Z(0,1)$ θα έχουμε

$$1 = \|y\| = \|P(y-z)\| \leq \|P\| \cdot \|y-z\|$$

άρα $\|y-z\| \geq \frac{1}{\|P\|}$. Επομένως

$$\rho(S_Y(0,1), S_Z(0,1)) = \inf\{\|y-z\| : \ y \in S_Y(0,1), \ z \in S_Z(0,1)\} > 0.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι ο $Y + Z$ δεν είναι κλειστός υπόχωρος του X. Τότε η προβολή $P : Y \oplus Z \longrightarrow Y$ με $P(y+z) = y$ για κάθε $y \in Y$ και $z \in Z$ δεν είναι φραγμένος τελεστής. (Πράγματι, υποθέτοντας ότι ο P είναι φραγμένος, τότε και ο $Q : Y \oplus Z \longrightarrow Z$ με $Q(y+z) = z$ για κάθε $y \in Y$ και $z \in Z$ θα ήταν φραγμένος αφού $Q = I_{Y \oplus Z} - P$. Άρα ο τελεστής $T : Y \oplus Z \longrightarrow Y \times Z$ με $T(y+z) = (y,z)$ για κάθε $y \in Y$ και $z \in Z$ θα είναι συνεχής. Όμως και ο $T^{-1} : Y \times Z \longrightarrow Y \oplus Z$ είναι και αυτός συνεχής αφού είναι ο περιορισμός της πρόσθεσης $+ : X \times X \longrightarrow X$ στον $Y \times Z$. Συνεπώς ο $Y \oplus Z$ θα ήταν ομοιομορφικός με τον $Y \times Z$ που είναι χώρος Banach ως γινόμενο των Y, Z που είναι χώροι Banach ως κλειστοί υπόχωροι του χώρου Banach X. Επομένως ο $Y + Z$ θα ήταν χώρος Banach συνεπώς κλειστός υπόχωρος του X, άτοπο.)

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $u \in Y$ και $v \in Z$ ώστε $\|P(u-v)\| > \frac{2}{\varepsilon}\|u-v\|$ δηλαδή $\|u\| > \frac{2}{\varepsilon}\|u+v\|$ και άρα $\|\frac{1}{\|u\|}u - \frac{1}{\|u\|}v\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Θέτουμε $y = \frac{1}{\|u\|}u$ και $w = \frac{1}{\|u\|}v$. Τότε $y \in S_Y(0,1)$ και $\|y-w\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Έπεται ότι $|\|w\|-1| = |\|w\|-\|y\|| \leq \|w-y\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Θέτουμε $z = \frac{1}{\|w\|}w \in S_Z(0,1)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \rho(S_Y(0,1), S_Z(0,1)) &\leq \|y-z\| \leq \|y-w\| + \|w-z\| < \frac{\varepsilon}{2} + \|w - \frac{1}{\|w\|}w\| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + |\|w\|-1| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ έπεται ότι $\rho(S_Y(0,1), S_Z(0,1)) = 0$. $\square$

Παρατηρησεις. Στους κλασσικούς χώρους ($\ell_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p \leq \infty$, $C[0,1]$) οι συμπληρωματικοί υπόχωροι αυτών έχουν δομή παρόμοια με τη δομή ολόκληρου του χώρου. Συγκεκριμένα, αν $1 \leq p \leq \infty$ κάθε απειροδιάστατος συμπληρωματικός υπόχωρος του $\ell_p(\mathbb{N})$ είναι ισομορφικός με τον $\ell_p(\mathbb{N})$. Ειδικότερα στον $\ell_\infty(\mathbb{N})$ δεν υπάρχει κανένας διαχωρίσιμος συμπληρωματικός υπόχωρος. Επίσης για $1 < p < \infty$ κάθε απειροδιάστατος κλειστός υπόχωρος του $\ell_p(\mathbb{N})$ έχει έναν περαιτέρω υπόχωρο που είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του $\ell_p(\mathbb{N})$. Στον $C[0,1]$ κάθε συμπληρωματικός υπόχωρος του που έχει μη διαχωρίσιμο δυϊκό είναι ισομορφικός με τον $C[0,1]$. Παραμένει ανοικτό πρόβλημα αν κάθε απειροδιάστατος συμπληρωματικός υπόχωρος του $C[0,1]$ που έχει διαχωρίσιμο δυϊκό είναι ισομορφικός με τον $C(K)$ για κάποιο αριθμήσιμο συμπαγές σύνολο K (ασφαλώς ένας τέτοιος χώρος δεν μπορεί να είναι ισομορφικός με τον $C[0,1]$ αφού ο $C[0,1]^*$ είναι μη διαχωρίσιμος).

Τα αποτελέσματα αυτά έχουν δειχθεί τη δεκαετία του 1960 από τους A. Pelczynski και H.P. Rosenthal μεταγενέστερα δηλαδή από τη θεμελίωση και τα αρχικά βασικά αποτελέσματα της θεωρίας χώρων Banach στις αρχές του εικοστού αιώνα και αποτελούν κομβικό σημείο της θεωρίας.

Οι κλασσικοί χώροι $\ell_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p \leq \infty$ και $C[0,1]$ είναι πλούσιοι σε συμπληρωματικούς υποχώρους και έτσι καθένας από αυτούς μπορεί να γραφεί με πολλούς τρόπους ως τοπολογικό ευθύ άθροισμα $Y \oplus Z$ δύο απειροδιάστατων κλειστών υποχώρων του. Παρόλα αυτά υπάρχουν χώροι Banach οι οποίοι δεν είναι διασπάσιμοι δηλαδή δεν μπορούν να γραφούν ως τοπολογικό ευθύ άθροισμα $Y \oplus Z$ με τους Y, Z να είναι και οι δύο απειροδιάστατοι. (Φυσικά αν ο Y είναι πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος ενός χώρου Banach X όπως είδαμε στην Πρόταση 7.15 πάντα υπάρχει κλειστός υπόχωρος Z του X ώστε ο X να γράφεται ως τοπολογικό ευθύ άθροισμα $X = Y \oplus Z$.) Το 1992 κατασκευάστηκε από τους W.T. Gowers και B. Maurey ένας χώρος Banach κανένας κλειστός υπόχωρος του οποίου δεν μπορεί να γραφεί ως τοπολογικό ευθύ άθροισμα δύο απειροδιάστατων υποχώρων του. Οι χώροι που έχουν αυτή την ιδιότητα ονομάστηκαν Καθολικά Αδιάσπαστοι και αποδείχθηκαν πολλές γενικές ιδιότητες αυτών, μεταξύ των οποίων ότι κανένας υπόχωρος ενός Καθολικά Αδιάσπαστου χώρου δεν είναι ισομορφικός με ολόκληρο τον χώρο. Αυτό δείχνει ότι υπάρχουν χώροι Banach που έχουν τελείως διαφορετική δομή από τους κλασσικούς χώρους. Τα τελευταία χρόνια οι Καθολικά Αδιάσπαστοι χώροι έχουν μελετηθεί εκτενώς, έχει κατασκευαστεί μια ολόκληρη γενιά από τέτοιους χώρους και κατέχουν πλέον ένα κεντρικό κομμάτι της θεωρίας χώρων Banach. Επιπλέον αποτελούν ένα ανοικτό πεδίο έρευνας και υπάρχουν πολλά ανοικτά ερωτήματα που σχετίζονται με τους Καθολικά Αδιάσπαστους χώρους.