Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ
30/8/2008

Θέμα 1

(α) Έχουμε

$$\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\frac{A}{x^2+a^2}+\frac{B}{x^2+b^2}$$

$$1=A(x^2+b^2)+B(x^2+a^2)$$

Για $x=ib$, $t\in\mathbb{C}$

$$1=B(a^2-b^2)\Leftrightarrow B=\frac{1}{a^2-b^2}$$

Για $x=ia$, $t\in\mathbb{C}$

$$1=A(b^2-a^2)\Leftrightarrow A=\frac{1}{b^2-a^2}=-B$$

Επομενως

$$\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{1}{x^2+b^2}-\frac{1}{x^2+a^2}\right)$$

Θεωρουμε την συναρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ που ορίζεται με

$$f(x)=\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

και ενια ολοκληρωσιμη στο διαστημα $[0,t]$ για καθε $t>0$.

Επομενως

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}f(x)dx&=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t f(x)dx\\&=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{dx}{x^2+b^2}-\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{dx}{x^2+a^2}\right)\\&=\frac{1}{a^2-b^2}\,t\to+\infty\left(\frac{1}{b}Arctan\frac{t}{b}-\frac{1}{a}Arctan\frac{t}{a}\right)\\&=\frac{\pi}{2ab(a+b)}\end{aligned}$$

(β) Ενια

$$div\left(\vec{r}(\vec{a}\cdot\vec{r})\right)=\frac{\partial(a_1x^2+a_2yx+a_3xz)}{\partial x}+\frac{\partial(a_1xy+a_2y^2+a_3yz)}{\partial y}+\frac{\partial(a_1xz+a_2yz+a_3z^2)}{\partial z}$$

$$=4a_1x+4a_2y+4a_3z=4(\vec{a}\cdot\vec{r})$$

Επομενως

$$div\left(\vec{r}(\vec{a}\cdot\vec{r})\right)-4(\vec{a}\cdot\vec{r})=0$$

Θέμα 2

(α) Ενια

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

Επομενως

$$f(1,1)=\sqrt{2},\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Το πολυωνυμο Taylor βαθμου ενα της συναρτησης f στο σημειο $(1,1)$ ενναι

$$T_1f((1,1),(x,y))=f(1,1)+\left[\frac{\partial}{\partial x}(1,1)(x-1)+(y-1)\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$$

Το πολυωνυμο Taylor βαθμου δυο της συναρτησης f στο σημειο $(1,1)$ ενναι

$$\begin{aligned}T_2f((1,1),(x,y))&=f(1,1)+\left[\frac{\partial}{\partial x}(1,1)(x-1)+(y-1)\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\right]\\&+\frac{1}{2!}\left[(x-1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)+2(x-1)(y-1)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)+(y-1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)\right]\\&=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{8}(x+y-2)^2\end{aligned}$$

(β) Αν $(x,y)\neq(0,0)$, τοτε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

Αν $(x,y)=(0,0)$, τοτε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$$

και ομοιως

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

Επομενως για $(x,y)\neq(0,0)$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}f=&\left[y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right]\vec{i}\\&+\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right]\vec{j}\end{aligned}$$

και για $(x,y)=(0,0)$

$$\vec{\nabla}f=\vec{0}$$

Θέμα 3

(α) Ενναι

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$$

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$$

Η συναρτηση f ενναι διαφορισιμη στο σημειο $P_0(0,0)$ αν αληθευει:

$$f(P)-f(P_0)=\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}(x-0)+\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}(y-0)+M(P,P_0)\|PP_0\|$$

οπου

$$\lim_{P\to P_0}M(P,P_0)=0$$

και

$$\|PP_0\|=d(P,P_0)=\sqrt{x^2+y^2}$$

Ετσι εχουμε

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\ M(P,P_0)\Leftrightarrow$$

$$M(P,P_0)=\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

Θετουμε $x=r\cos\theta$ και $y=r\sin\theta$, οπου $r>0$ και $\theta\in[0,2\pi)$

Τοτε

$$\lim_{P\to P_0}M(P,P_0)=\lim_{r\to 0}\frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{(r\cos^2\theta+\sin^2\theta)^3}=\lim_{r\to 0}r\cos^2\theta\sin^2\theta=0$$

Επομενως η f ενναι διαφορισιμη στο $P_0(0,0)$.

Η παραγωγος κατα κατευθυνση της f στο σημειο $P_1(1,1)$ προς την κατευθυνση $\vec{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ενναι

$$D_{\vec{u}}f(P_1)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}t,1+\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)-f(1,1)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)^2-1}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sqrt{2}+t}{4}$$

Αρα $D_{\vec{u}}f(P_1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Αλλος τροπος:

$$D_{\vec{u}}f(P_1)=\vec{\nabla}f(P_1)\cdot\vec{u}=\left(\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(β) Το κρισιμα σημεια της f υπολογιζονται απο τη λυση του συστηματος

$$(S)\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\\frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$$

Ομως

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy\ \text{και}\ \frac{\partial f}{\partial y}=x^2-1$$

Επομενως το συστημα γραφεται

$$(S)\begin{cases}2xy=0\\x^2-1=0\end{cases}$$

και εχει τις λυσεις $(1,0)$ και $(-1,0)$

Επομενως τα κρισιμα σημεια της f ενναι το σημειο $P(1,0)$ και το $Q(-1,0)$

Παρατηρουμε οτι τα σημεια αυτα ενναι συμμετρικα γιατι η f δεν διαθετει σταθερο προσημο σε μια περιοχη τους:

$\forall x>1, y<0\ \ f(x,y)<f(1,0)$ και $\forall x>1, y>0\ \ f(x,y)>f(1,0)$

οπως επισης $\forall x<-1, y>0\ \ f(x,y)>f(-1,0)$ και $\forall x<-1, y<0\ \ f(x,y)<f(-1,0)$

Θέμα 4

(α) Ενναι

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{P})&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\vec{k}\\&=\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\vec{k}\end{aligned}$$

και

$$\vec{\nabla}^2\ \vec{P}=\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\vec{k}$$

Επομενως

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}^2\ \vec{P}-\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{P})=&\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial z}\right)\vec{i}\\&+\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial z}\right)\vec{j}\\&+\left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial y}\right)\vec{k}\end{aligned}$$

Επισης

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{P})=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)&\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)&\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}=&\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial z}\right)\vec{i}\\&+\left(-\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial z}\right)\vec{j}\\&+\left(-\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial z}\right)\vec{k}\end{aligned}$$

Αρα

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{P})+\vec{\nabla}^2\ \vec{P}-\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{P})=0$$

(αφου ισχυει το θεωρημα Clairaut).

(β) Θετουμε $F(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-2=0$

Το σημειο $P(1,0,1)$ ανηκει στην επιφανεια S αφου

$$F(P)=0$$

Το εφαπτομενο επιπεδο της S στο σημειο $P(1,0,1)$ ενναι καθετο στο διανυσμα

$$\vec{\nabla}F(P)=\frac{\partial F(P)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial F(P)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial F(P)}{\partial z}\vec{k}=2\vec{i}+2\vec{k}$$

Η εξισωση του εφαπτομενου επιπεδου S στο σημειο $P(1,0,1)$ ενναι

$$2(x-1)+2(z-1)=0\Leftrightarrow x+y=2$$

Ενα διανυσμα που ενναι καθετο στην επιφανεια S στο σημειο $P(1,0,1)$ ενναι το $\vec{\nabla}F(P)=2\vec{i}+2\vec{k}$

Οι παραμετρικες εξισωσεις της καθετης ευθειας στην επιφανεια S στο σημειο $P(1,0,1)$ ενναι

$$x=1+2t$$

$$y=0$$

$$z=1+2t,\ t\in\mathbb{R}$$