ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
**ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ**

Διδάσκων: Κ. Παρασκευαΐδης　　　　Διάρκεια 2 ½ ώρες　　　　19/2/2010

**1)** Θεωρούμε ένα σύστημα που αποτελείται από ένα σωματίδιο με σπιν ½ και με μαγνητική ροπή $2\mu_0$ (σύστημα $A$), και από ένα δεύτερο σύστημα, (σύστημα $A'$), που αποτελείται από τρία σωματίδια με σπιν ½ και με μαγνητική ροπή $\mu_0$ το καθένα. Τα δύο συστήματα τοποθετούνται σε μαγνητικό πεδίο **B**. (α) Να απαριθμήσετε όλες τις προσιτές καταστάσεις του συστήματος $A^* = A + A'$. Για κάθε μία από αυτές να βρείτε την ολική μαγνήτιση και την ολική ενέργεια. (β) Τα συστήματα $A$ και $A'$ αρχικά δεν βρίσκονται σε επαφή. Η μαγνητική ροπή του $A$ είναι $M = -2\mu_0$, ενώ η μαγνητική ροπή του $A'$ είναι $M' = 3\mu_0$. Τα συστήματα έρχονται κατόπιν σε επαφή, ώστε να μπορούν να ανταλλάσσουν ενέργεια ελεύθερα, είναι απομονωμένα από το περιβάλλον και φθάνουν στην κατάσταση ισορροπίας. Να υπολογίσετε (i) τις πιθανότητες $P(M)$ και $P(M')$ για να πάρουν οι ολικές μαγνητικές ροπές των $A$ και $A'$ μία από τις δυνατές τους τιμές $M$ και $M'$ αντιστοίχως, και (ii) τις μέσες τιμές $\langle M \rangle$ και $\langle M' \rangle$.

**2)** Ένα σύστημα έχει τρεις ενεργειακές στάθμες με ενέργειες $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = 2\varepsilon$, $\varepsilon_3 = 4\varepsilon$, ($\varepsilon>0$), και αντίστοιχους εκφυλισμούς $g_1 = 1$, $g_2 = 3$, $g_3 = 5$. Το σύστημα αυτό βρίσκεται σε θερμική επαφή με δεξαμενή θερμότητας σε θερμοκρασία $T$ και αποτελείται από $N$ σωματίδια τα οποία δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. (α) Να γράψετε τη συνάρτηση επιμερισμού $Z$ του συστήματος των $N$ σωματιδίων ως συνάρτηση των $\varepsilon$ και $T$. (β) Να βρείτε τη μέση ενέργεια του συστήματος. (γ) Να βρείτε τη μέση ενέργεια του συστήματος όταν (i) $T \to 0$, (ii) $T = \varepsilon/(k_B \ln 3)$ και (iii) $T \to \infty$. (δ) Με ποιον τρόπο κατανέμονται 5310 σωματίδια στις τρεις ενεργειακές στάθμες για τις τρεις περιπτώσεις του ερωτήματος (γ); Η θερμοκρασία $T = \varepsilon/(k_B \ln 3)$ είναι υψηλή ή χαμηλή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**3)** Τοποθετούμε σε ένα θερμομονωτικό δοχείο Dewar 400 g πάγου σε θερμοκρασία -40 °C και 100 g υδρατμών σε θερμοκρασία 100 °C και απομονώνουμε. Το δοχείο, επειδή είναι Dewar, δεν αλληλεπιδρά με τα υλικά που περιέχονται σ'αυτό. (α) Να περιγράψετε την τελική κατάσταση του συστήματος και να βρείτε την τελική του θερμοκρασία. (β) Να υπολογίσετε την ολική μεταβολή στην εντροπία που θα επέλθει στο σύστημα.

Η ειδική θερμότητα του πάγου είναι 2,13 J/(g K). Η ειδική θερμότητα του νερού είναι 4,18 J/(g K). Για να υγροποιηθεί ένα γραμμάριο υδρατμών απαιτούνται 2259 Joules. Για να λυώσει ένα γραμμάριο πάγου απαιτούνται 333 Joules.

**4)** Θεωρήστε ένα σύστημα που ακολουθεί στατιστική Bose – Einstein και αποτελείται από δύο σωματίδια. Το σύστημα έχει δύο ενεργειακές στάθμες με ενέργειες $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = 2\varepsilon$, ($\varepsilon>0$), και αντίστοιχους εκφυλισμούς $g_1 = 1$, $g_2 = 3$. Το σύστημα αυτό βρίσκεται σε θερμική επαφή με δεξαμενή θερμότητας σε θερμοκρασία $T$.

(α) Να απαριθμήσετε όλες τις καταστάσεις του συστήματος και να βρείτε τη συνάρτηση επιμερισμού $Z$.

(β) Να υπολογίσετε τη μέση ενέργεια του συστήματος, καθώς και τις τιμές της για $T \to 0$, $T = \varepsilon/(k_B \ln 2)$ και $T \to \infty$.

(γ) Να βρείτε την πιθανότητα κατάληψης της βασικής κατάστασης του συστήματος για τις τρεις τιμές της θερμοκρασίας του ερωτήματος (β).

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ
**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**1)** Θεωρούμε ένα σύστημα που αποτελείται από ένα σωματίδιο με σπιν ½ και με μαγνητική ροπή $2\mu_0$ (σύστημα $A$), και από ένα δεύτερο σύστημα, (σύστημα $A'$), που αποτελείται από τρία σωματίδια με σπιν ½ και με μαγνητική ροπή $\mu_0$ το καθένα. Τα δύο συστήματα τοποθετούνται σε μαγνητικό πεδίο **B.** (α) Να απαριθμήσετε όλες τις προσιτές καταστάσεις του συστήματος $A^* = A + A'$. Για κάθε μία από αυτές να βρείτε την ολική μαγνήτιση και την ολική ενέργεια. (β) Τα συστήματα $A$ και $A'$ αρχικά δεν βρίσκονται σε επαφή. Η μαγνητική ροπή του $A$ είναι $M = -2\mu_0$, ενώ η μαγνητική ροπή του $A'$ είναι $M' = 3\mu_0$. Τα συστήματα έρχονται κατόπιν σε επαφή, ώστε να μπορούν να ανταλλάσσουν ενέργεια ελεύθερα, είναι απομονωμένα από το περιβάλλον και φθάνουν στην κατάσταση ισορροπίας. Να υπολογίσετε (i) τις πιθανότητες $P(M)$ και $P(M')$ για να πάρουν οι ολικές μαγνητικές ροπές των $A$ και $A'$ μία από τις δυνατές τους τιμές $M$ και $M'$ αντιστοίχως, και (ii) τις μέσες τιμές $\langle M \rangle$ και $\langle M' \rangle$.

(α) Έχουμε, για το σύστημα $A^*$, συνολικά $2^N = 2^4 = 16$ καταστάσεις.

| | $A$ | $A'$ | | | $M$ | $M'$ | $M^*$ | $E$ | $E'$ | $E^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | + | + | + | + | $2\mu_o$ | $3\mu_o$ | $\mathbf{5\mu_o}$ | $-2\mu_oB$ | $-3\mu_oB$ | $\mathbf{-5\mu_oB}$ |
| 2 | + | + | + | - | $2\mu_o$ | $\mu_o$ | $\mathbf{3\mu_o}$ | $-2\mu_oB$ | $-\mu_oB$ | $\mathbf{-3\mu_oB}$ |
| 3 | + | + | - | + | $2\mu_o$ | $\mu_o$ | $\mathbf{3\mu_o}$ | $-2\mu_oB$ | $-\mu_oB$ | $\mathbf{-3\mu_oB}$ |
| 4 | + | - | + | + | $2\mu_o$ | $\mu_o$ | $\mathbf{3\mu_o}$ | $-2\mu_oB$ | $-\mu_oB$ | $\mathbf{-3\mu_oB}$ |
| 5 | + | + | - | - | $2\mu_o$ | $-\mu_o$ | $\mathbf{\mu_o}$ | $-2\mu_oB$ | $\mu_oB$ | $\mathbf{-\mu_oB}$ |
| 6 | + | - | + | - | $2\mu_o$ | $-\mu_o$ | $\mathbf{\mu_o}$ | $-2\mu_oB$ | $\mu_oB$ | $\mathbf{-\mu_oB}$ |
| 7 | + | - | - | + | $2\mu_o$ | $-\mu_o$ | $\mathbf{\mu_o}$ | $-2\mu_oB$ | $\mu_oB$ | $\mathbf{-\mu_oB}$ |
| 8 | + | - | - | - | $2\mu_o$ | $-3\mu_o$ | $\mathbf{-\mu_o}$ | $-2\mu_oB$ | $3\mu_oB$ | $\mathbf{\mu_oB}$ |
| 9 | - | + | + | + | $-2\mu_o$ | $3\mu_o$ | $\mathbf{\mu_o}$ | $2\mu_oB$ | $-3\mu_oB$ | $\mathbf{-\mu_oB}$ |
| 10 | - | + | + | - | $-2\mu_o$ | $\mu_o$ | $\mathbf{-\mu_o}$ | $2\mu_oB$ | $-\mu_oB$ | $\mathbf{\mu_oB}$ |
| 11 | - | + | - | + | $-2\mu_o$ | $\mu_o$ | $\mathbf{-\mu_o}$ | $2\mu_oB$ | $-\mu_oB$ | $\mathbf{\mu_oB}$ |
| 12 | - | - | + | + | $-2\mu_o$ | $\mu_o$ | $\mathbf{-\mu_o}$ | $2\mu_oB$ | $-\mu_oB$ | $\mathbf{\mu_oB}$ |
| 13 | - | + | - | - | $-2\mu_o$ | $-\mu_o$ | $\mathbf{-3\mu_o}$ | $2\mu_oB$ | $\mu_oB$ | $\mathbf{3\mu_oB}$ |
| 14 | - | - | + | - | $-2\mu_o$ | $-\mu_o$ | $\mathbf{-3\mu_o}$ | $2\mu_oB$ | $\mu_oB$ | $\mathbf{3\mu_oB}$ |
| 15 | - | - | - | + | $-2\mu_o$ | $-\mu_o$ | $\mathbf{-3\mu_o}$ | $2\mu_oB$ | $\mu_oB$ | $\mathbf{3\mu_oB}$ |
| 16 | - | - | - | - | $-2\mu_o$ | $-3\mu_o$ | $\mathbf{-5\mu_o}$ | $2\mu_oB$ | $3\mu_oB$ | $\mathbf{5\mu_oB}$ |

το + ισοδυναμεί με σπιν ↑,δηλ. μαγνητική ροπή παράλληλη με το **B**
το - ισοδυναμεί με σπιν↓, δηλ. μαγνητική ροπή παράλληλη με το **-B**

(β) Το σύστημα αρχικά βρίσκεται στην κατάσταση # 9 με ολική μαγνητική ροπή $M^* = \mathbf{\mu_o}$ (και συνεπώς με ολική ενέργεια $E^* = -\mu_oB$)

| | $A$ | $A'$ | | | $M$ | $M'$ | $M^*$ | $E$ | $E'$ | $E^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | - | + | + | + | $-2\mu_o$ | $3\mu_o$ | $\mathbf{\mu_o}$ | $2\mu_oB$ | $-3\mu_oB$ | $\mathbf{-\mu_oB}$ |

Αφού έρθουν σε επαφή τα δύο συστήματα, το ολικό σύστημα μπορεί να βρίσκεται σε όλες τις καταστάσεις που έχουν ολική μαγνητική ροπή $M^* = \mathbf{\mu_o}$ (και συνεπώς ολική ενέργεια $E^* = -\mu_oB$) Οι καταστάσεις αυτές (τέσσερις τον αριθμό) είναι οι # 5, 6, 7 και 9, όπως δείχνει ο παρακάτω πίνακας

| | $A$ | $A'$ | | | $M$ | $M'$ | $M^*$ | $E$ | $E'$ | $E^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | + | + | - | - | $2\mu_o$ | $-\mu_o$ | $\mathbf{\mu_o}$ | $-2\mu_oB$ | $\mu_oB$ | $\mathbf{-\mu_oB}$ |
| 6 | + | - | + | - | $2\mu_o$ | $-\mu_o$ | $\mathbf{\mu_o}$ | $-2\mu_oB$ | $\mu_oB$ | $\mathbf{-\mu_oB}$ |
| 7 | + | - | - | + | $2\mu_o$ | $-\mu_o$ | $\mathbf{\mu_o}$ | $-2\mu_oB$ | $\mu_oB$ | $\mathbf{-\mu_oB}$ |
| 9 | - | + | + | + | $-2\mu_o$ | $3\mu_o$ | $\mathbf{\mu_o}$ | $2\mu_oB$ | $-3\mu_oB$ | $\mathbf{-\mu_oB}$ |

(β i, β ii) Παρατηρούμε ότι η μαγνητική ροπή, $M$, του $A$ και η μαγνητική ροπή, $M'$, του $A'$ παίρνουν τις τιμές

$M = 2\mu_o$ και $M' = -\mu_o$ τρεις φορές (#5, 6, 7)

και $M = -2\mu_o$ και $M' = 3\mu_o$ μία φορά (# 9)

Άρα,

$P(M=2\mu_o) = 3/4$, $P(M=-2\mu_o) = 1/4$

και $\langle M \rangle = (2\mu_o)P(M=2\mu_o) + (-2\mu_o)P(M=-2\mu_o) = (2\mu_o)(3/4) + (-2\mu_o)(1/4) = \mu_o$

Αντιστοίχως,

$P(M'=-\mu_o) = 3/4$, $\qquad P(M'=3\mu_o) = 1/4$

και $< M' > = (-\mu_o\ )P(M'{=}{-\mu_o}) + (3\mu_o)P(M'{=}\ 3\mu_o) = (-\mu_o)(3/4)\ + (3\mu_o)(1/4) = 0$
Συνεπώς, $< M > = \mu_o$ και $< M' > = (3/7)\mu_o$ και βέβαια, $<M^*> = < M > + < M' > = \mu_o + 0\ = \mu_o$.

**2)** Ένα σύστημα έχει τρεις ενεργειακές στάθμες με ενέργειες $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = 2\varepsilon$, $\varepsilon_3 = 4\varepsilon$, ($\varepsilon>0$), και αντίστοιχους εκφυλισμούς $g_1 = 1$, $g_2 = 3$, $g_3 = 5$. Το σύστημα αυτό βρίσκεται σε θερμική επαφή με δεξαμενή θερμότητας σε θερμοκρασία $T$ και αποτελείται από $N$ σωματίδια τα οποία δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. (α) Να γράψετε τη συνάρτηση επιμερισμού $Z$ του συστήματος των $N$ σωματιδίων ως συνάρτηση των $\varepsilon$ και $T$. (β) Να βρείτε τη μέση ενέργεια του συστήματος. (γ) Να βρείτε τη μέση ενέργεια του συστήματος όταν (i) $T \to 0$, (ii) $T = \varepsilon/(k_B \ln 3)$ και (iii) $T \to \infty$. (δ) Με ποιον τρόπο κατανέμονται 5310 σωματίδια στις τρεις ενεργειακές στάθμες για τις τρεις περιπτώσεις του ερωτήματος (γ); Η θερμοκρασία $T = \varepsilon/(k_B \ln 3)$ είναι υψηλή ή χαμηλή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Η συνάρτηση επιμερισμού για ένα σωματίδιο είναι: $f = \sum_{i=1}^{3} g_i e^{-\beta\epsilon_i} = e^{-\beta\epsilon} + 3e^{-2\beta\epsilon} + 5e^{-4\beta\epsilon}$

Μέση ενέργεια ανά σωματίδιο:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum_{i=1}^{3} \epsilon_i g_i e^{-\beta\epsilon_i}}{f} = \left(\frac{e^{-\beta\epsilon} + 6e^{-2\beta\epsilon} + 20e^{-4\beta\epsilon}}{e^{-\beta\epsilon} + 3e^{-2\beta\epsilon} + 5e^{-4\beta\epsilon}}\right)\epsilon .$$

(Αλλιώς: $\bar{\epsilon} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln f$)

a) $Z = f^N = \left(e^{-\beta\epsilon} + 3e^{-2\beta\epsilon} + 5e^{-4\beta\epsilon}\right)^N$ (τα σωματίδια δεν αλληλεπιδρούν).

b) $$\bar{E}(T) = N\bar{\epsilon}(T) = \left(\frac{e^{-\beta\epsilon} + 6e^{-2\beta\epsilon} + 20e^{-4\beta\epsilon}}{e^{-\beta\epsilon} + 3e^{-2\beta\epsilon} + 5e^{-4\beta\epsilon}}\right)N\epsilon = \left(\frac{1 + 6e^{-\beta\epsilon} + 20e^{-3\beta\epsilon}}{1 + 3e^{-\beta\epsilon} + 5e^{-3\beta\epsilon}}\right)N\epsilon .$$

γ) i) $T \to 0K$. $e^{-n\beta\epsilon} \to 0$ $\quad \bar{E}(T\to 0K) = N\epsilon$.

ii) $T = (\epsilon/k_B\ln 3) \Rightarrow \beta\epsilon = \ln 3 \Rightarrow e^{-\beta\epsilon} = \frac{1}{3}$.

$$f(T = \epsilon/k_B\ln 3 = 0{,}91\,\epsilon/k_B) = \frac{1}{3} + \frac{3}{9} + \frac{5}{81} = \frac{59}{81}$$

$$\bar{E}(T = \epsilon/k_B\ln 3) = \frac{81}{59}\left(\frac{1}{3} + \frac{6}{9} + \frac{20}{81}\right)N\epsilon = \frac{81}{59}\,\frac{101}{81}\,N\epsilon = \frac{101}{59}N\epsilon$$

$= 1{,}71\,N\epsilon$

iii) $T \to \infty \quad e^{\pm n\beta\epsilon} \to 1$

$$E(T\to\infty) = \left(\frac{1+6+20}{1+3+5}\right)N\epsilon = \left(\frac{27}{9}\right)N\epsilon = 3N\epsilon .$$

δ) $N_i = N P_i = N g_i \dfrac{e^{-\beta\epsilon_i}}{f}$.

$$N_1 = \frac{N e^{-\beta\epsilon}}{f}, \quad N_2 = N\cdot 3 \cdot \frac{e^{-2\beta\epsilon}}{f}, \quad N_3 = N\cdot 5\cdot \frac{e^{-4\beta\epsilon}}{f}.$$

i) $T \to 0\,K \quad P_1 = 1, \; P_2 = P_3 = 0 \Rightarrow N_1 = N = 5310, \; N_2 = N_3 = 0$

ii) $T = \epsilon/k_B\ln 3 \; (= 0{,}91\,\epsilon/k_B) \qquad f(T = \epsilon/k_B \ln 3) = \dfrac{59}{81}$.

$$N_1 = N\left(\frac{1}{3}\right)\frac{81}{59} = \frac{27}{59}5310 = 2430.$$

$$N_2 = N\cdot 3\,\frac{1}{9}\,\frac{81}{59} = 3\cdot 2430\left(\frac{9}{59}\right) = 3\cdot 810 = 2430.$$

$$N_3 = N\cdot 5\cdot \frac{1}{81}\,\frac{81}{59} = 5\cdot\frac{2430}{59} = 5\cdot 90 = 450$$

iii) $T\to\infty \quad e^{\pm n\beta\epsilon} = 1, \; f = 9$

$$N_1 = N\cdot\frac{1}{9} = \frac{5310}{9} = 590, \quad N_2 = 3N\cdot\frac{1}{9} = 3\cdot 590 = 1770$$

$$N_3 = 5N\frac{1}{9} = 5\cdot\frac{5310}{9} = 5\cdot 590 = 2950$$

| | | |
|---|---|---|
| 0 0 0 0 0 | 90 90 90 90 90 | 590 590 590 590 590 |
| 0 0 0 | 810 810 810 | 590 590 590 |
| 5310 | 2430 | 590 |

| | | |
|---|---|---|
| $T \to 0\,K$ | $T = \epsilon/k_B\ln 3 = 0{,}91\,\dfrac{\epsilon}{k_B}$ | $T\to\infty$ |
| $E(0) = N\epsilon$ | $E(\epsilon/k_B\ln 3) = 1{,}71N\epsilon$ | $E(T\to\infty) = 3\epsilon$ |

Αυτή η θερμοκρασία
είναι χαμηλή!

**3)** Τοποθετούμε σε ένα θερμομονωτικό δοχείο Dewar 400 g πάγου σε θερμοκρασία -40 $^oC$ και 100 g υδρατμών σε θερμοκρασία 100 $^oC$ και απομονώνουμε. Το δοχείο, επειδή είναι Dewar, δεν αλληλεπιδρά με τα υλικά που περιέχονται σ'αυτό. (α) Να περιγράψετε την τελική κατάσταση του συστήματος και να βρείτε την τελική του θερμοκρασία. (β) Να υπολογίσετε την ολική μεταβολή στην εντροπία που θα επέλθει στο σύστημα.

Η ειδική θερμότητα του πάγου είναι 2,13 J/(g K). Η ειδική θερμότητα του νερού είναι 4,18 J/(g K). Για να υγροποιηθεί ένα γραμμάριο υδρατμών απαιτούνται 2259 Joules. Για να λυώσει ένα γραμμάριο πάγου απαιτούνται 333 Joules.

Για να υγροποιηθούν οι υδρατμοί θα εκλύσουν ποσό θερμότητας $Q_{υδρ \to νερ} = (2259)(100) = 225900$ J

Για να ανέβει η θερμοκρασία του πάγου από τους $-40^oC$ στους $0^oC$, θα απορροφήσει ποσό θερμότητας:

$Q_π = m_π c_π \Delta T = (400)(2,13)40 = 34080$ J

Για να λιώσει ο πάγος, θα απορροφήσει ποσό θερμότητας

$Q_{π \to ν} = (400)(333) = 133200$ J

Άρα, για να λιώσει όλος ο πάγος, θα απορροφηθεί ποσό θερμότητας $Q_1 = Q_π + Q_{π \to ν} = 34080 + 133200 = 167280$ J.

Αυτό το ποσό θερμότητας έχει υγροποιήσει

$\frac{167280}{2259} = 74,05$ g υδρατμών.

Έχουμε τώρα 400 g νερό στους $0^oC$,
74,05 g νερό στους $100^oC$
και 25,95 g υδρατμών στους $100^oC$.

Το ποσό θερμότητας που θα εκλυθεί κατά την υγροποίηση των 25,95 g των υδρατμών είναι $225900 - 167280 = 58620$ J.

Αυτό το ποσό θερμότητας θα ανεβάσει τη θερμοκρασία των 400 g του νερού από $T = 0^oC$ στους $T_1$ $^oC$.

$$58620 = (400 g)(4,18 J/g K)(T_1 - 0^oC)$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{58620}{1672} = 35,06^oC.$$

Έχουμε τώρα 400 g νερού στους 35,06 °C
και 100 g νερού στους 100 °C.

$$(400)(4,18)(T_f - 35,06) + (100)(4,18)(T_f - 100) = 0$$

$$(500)\cancel{(4,18)}\, T_f = \cancel{(4,18)}(35,06 \times 400 + 10000)$$

$$T_f = \frac{24024}{500} = 48,05\ ^\circ C$$

$\boxed{500 \text{ g νερού στους } 48,05\ ^\circ C : \text{ ΤΕΛΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ}}$

β) $T_f = 48,05 + 273 = 321,05\,K$ ,

$$\Delta S_{\pi} = m_{\pi} c_{\pi} \int_{233}^{273} \frac{dT}{T} = (400)(2,13) \ln\left(\frac{273}{233}\right) = 134,99 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{\pi \to \nu} = \frac{(333)(400)}{273} = 487,91 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{\nu_1} = (400)(4,18) \int_{273}^{321,05} \frac{dT}{T} = 1672 \ln\left(\frac{321,05}{273}\right) = 271,07 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{\upsilon\delta\rho \to \nu} = \frac{-(2259)(100)}{373} = -605,63 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{\nu_2} = (100)(4,18) \int_{373}^{321,05} \frac{dT}{T} = 418 \ln\left(\frac{321,05}{373}\right) = -62,69 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{o\lambda} = \Delta S_{\pi} + \Delta S_{\pi \to \nu} + \Delta S_{\nu_1} + \Delta S_{\upsilon\delta\rho \to \nu} + \Delta S_{\nu_2} = 225,65 \text{ J/K}.$$

$$\boxed{\Delta S_{o\lambda} = 225,65 \text{ J/K}}$$

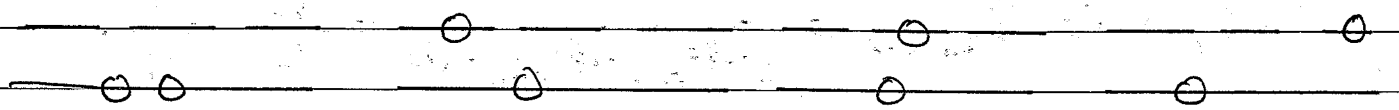
**4)** Θεωρήστε ένα σύστημα που ακολουθεί στατιστική Bose – Einstein και αποτελείται από δύο σωματίδια. Το σύστημα έχει δύο ενεργειακές στάθμες με ενέργειες $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = 2\varepsilon$, ($\varepsilon>0$), και αντίστοιχους εκφυλισμούς $g_1 = 1$, $g_2 = 3$. Το σύστημα αυτό βρίσκεται σε θερμική επαφή με δεξαμενή θερμότητας σε θερμοκρασία $T$.

(α) Να απαριθμήσετε όλες τις καταστάσεις του συστήματος και να βρείτε τη συνάρτηση επιμερισμού $Z$.

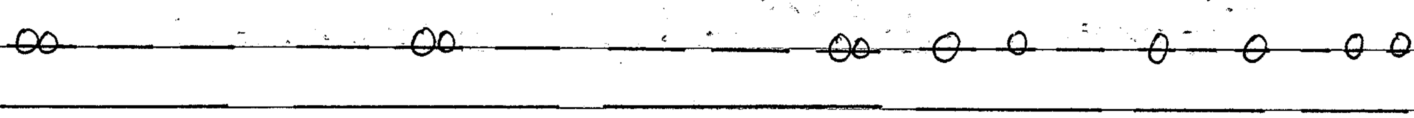
(β) Να υπολογίσετε τη μέση ενέργεια του συστήματος, καθώς και τις τιμές της για $T \to 0$, $T = \varepsilon/(k_B \ln 2)$ και $T \to \infty$.

(γ) Να βρείτε την πιθανότητα κατάληψης της βασικής κατάστασης του συστήματος για τις τρεις τιμές της θερμοκρασίας του ερωτήματος (β).

a)



$E_1 = 2\epsilon$ $\quad E_2 = 3\epsilon$ $\quad E_3 = 3\epsilon$ $\quad E_4 = 3\epsilon$



$E_5 = 4\epsilon$ $\quad E_6 = 4\epsilon$ $\quad E_7 = 4\epsilon$ $\quad E_8 = 4\epsilon$ $\quad E_9 = 4\epsilon$ $\quad E_{10} = 4\epsilon$

$$Z = e^{-2\beta\epsilon} + 3e^{-3\beta\epsilon} + 6e^{-4\beta\epsilon}$$

b)

$$\bar{E}(T) = \frac{2\epsilon\, e^{-2\beta\epsilon} + 3\epsilon \cdot 3e^{-3\beta\epsilon} + 4\epsilon \cdot 6e^{-4\beta\epsilon}}{e^{-2\beta\epsilon} + 3e^{-3\beta\epsilon} + 6e^{-4\beta\epsilon}}$$

$$= \left(\frac{2e^{-2\beta\epsilon} + 9e^{-3\beta\epsilon} + 24e^{-4\beta\epsilon}}{e^{-2\beta\epsilon} + 3e^{-3\beta\epsilon} + 6e^{-4\beta\epsilon}}\right)\epsilon$$

$T \to 0$ K. $\quad (e^{-4\beta\epsilon} \to 0)$

$$E(T \to 0\,\mathrm{K}) = \left(\frac{2 + 9e^{-\beta\epsilon} + 24e^{-2\beta\epsilon}}{1 + 3e^{-\beta\epsilon} + 6e^{-2\beta\epsilon}}\right)\epsilon \xrightarrow[T\to 0]{} 2\epsilon.$$

$$T = \epsilon/k_B \ln 2 \Rightarrow e^{-\beta\epsilon} = \frac{1}{2}.$$

$$Z(\epsilon/k_B \ln 2) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{6}{16} = 1.$$

$$E(T = \epsilon/k_B \ln 2) = \left(\frac{2}{4} + \frac{9}{8} + \frac{24}{16}\right)\epsilon = \frac{50}{16}\epsilon = 3{,}125\,\epsilon.$$

$$T \to \infty \qquad e^{\pm 4\beta\epsilon} = 1.$$

$$\bar{E}(T \to \infty) = \frac{2 + 9 + 24}{1 + 3 + 6} = \frac{35}{10}\epsilon = 3{,}5\,\epsilon.$$

$$P_1 = \frac{e^{-\beta E_1}}{Z}$$

$T = 0\,K. \quad P_1 = 1.$

$T = (\epsilon / k_B \ln 2)$

$$P_1\,(T = \epsilon / k_B \ln 2) = \frac{e^{-2\beta\epsilon}}{e^{-2\beta\epsilon} + 3e^{-3\beta\epsilon} + 6e^{-4\beta\epsilon}} = \frac{1/4}{1} = \frac{1}{4}.$$

$T \to \infty. \quad e^{\pm n\beta\epsilon} = 1. \quad Z(T \to \infty) = 10$

$$P_1 = \frac{1}{10}.$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $T$ | $0$ | $\epsilon / k_B \ln 2$ | $\to \infty$ |
| $P_1$ | $1$ | $1/4$ | $1/10$ |
| $\bar{E}$ | $2\epsilon$ | $3,125\epsilon$ | $3,5\epsilon$ |