ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΦΥΣΙΚΗΣ Ι - ΣΕΜΦΕ

Φεβρουάριος 2012

Διάρκεια εξέτασης: 2.5 ώρες

Η εξέταση γίνεται με κλειστά βιβλία, σημειώσεις και κινητά τηλέφωνα.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

Θέμα 1ο Θεωρούμε δίσκο με επιφανειακή πυκνότητα μάζας $\sigma(r) = \sigma_0 \frac{r(R-r)}{R^2}$, όπου σ_0 θετική σταθερά και R η ακτίνα του δίσκου.

(α) Να υπολογιστεί η μάζα M του δίσκου.

(β) Να δείξετε ότι η ροπή αδράνειας ως προς κάθετο άξονα που περνάει από το κέντρο O του δίσκου είναι: $I_O = \frac{2}{5}MR^2$.

(γ) Να υπολογιστεί η κυκλική συχνότητα ω των μικρών ταλαντώσεων περί άξονα A κάθετο στο επίπεδο του δίσκου που περνάει από το σημείο A της περιφέρειάς του.

Θέμα 2ο Αβαρής ράβδος μήκους D έχει τα δύο της άκρα στα σημεία $(0,0)$ και $(D,0)$. Στο άκρο της στο σημείο $(0,0)$ υπάρχει σημειακή μάζα m στερεωμένη στη ράβδο. Μια άλλη μάζα $2m$ κινείται ελεύθερη στην κατεύθυνση $+y$ με ταχύτητα V. Τη χρονική στιγμή $t=0$ φτάνει στο σημείο $(D,0)$ και προσκολλάται στο ελεύθερο άκρο της ράβδου. Οι δύο μάζες και η ράβδος κινούνται μετά ως ενιαίο σύνολο, στο επίπεδο xy, το οποίο είναι οριζόντια και λεία επιφάνεια. Στο σύστημα δεν ασκείται καμμιά εξωτερική δύναμη.

(α) Βρείτε τη θέση του κέντρου μάζας του συστήματος τη χρονική στιγμή $t=0$, την ολική ορμή του συστήματος, καθώς και την ταχύτητα $\dot{\vec{R}}_{KM}$ και τη θέση $\vec{R}_{KM}$ του κέντρου μάζας του ως προς το σημείο $(0,0)$ για $t>0$.

(β) Βρείτε τις στροφορμές του συστήματος (1) ως προς την αρχή των αξόνων, $\vec{L}_O$, και (2) ως προς το κέντρο μάζας του, $\vec{L}_{KM}$. Εξηγήστε γιατί οι τιμές αυτές παραμένουν σταθερές.

(γ) Από τη στροφορμή του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας του, $\vec{L}_{KM}$, και εξετάζοντας το σύστημα όπως το βλέπει ένας παρατηρητής που βρίσκεται στο κέντρο μάζας του και κινείται με αυτό χωρίς να περιστρέφεται, υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ράβδου γύρω από το κέντρο μάζας του συστήματος.

(δ) Περιγράψτε την κίνηση που εκτελεί το σύστημα μαζών και ράβδου. Επαληθεύστε ότι ισχύει η σχέση:

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{KM} + M_{o\lambda}\vec{R}_{KM} \times \dot{\vec{R}}_{KM},$$

όπου $M_{o\lambda} = 3m$ είναι η ολική μάζα του συστήματος.

Θέμα 3ο Θεωρούμε σωματίδιο μάζας m σε πεδίο δυνάμεων. Η τροχιά του είναι της μορφής:

$$x = a\cos(\omega t), \quad y = b\sin(\omega t), \quad z = 0,$$

όπου τα a, b και ω είναι (θετικές, έστω) σταθερές.

(α) Δείξτε ότι το σωματίδιο εκτελεί ελλειπτική τροχιά.

(β) Να δείξετε ότι οι συνιστώσες της δύναμης που απαιτείται για να διαγράφεται μια τέτοια τροχιά δίνεται από τις σχέσεις:

$$F_x = -m\omega^2 x, \; F_y = -m\omega^2 y, \; F_z = 0.$$

(γ) Να εξετάσετε αν αυτό το πεδίο δυνάμεων είναι αστρόβιλο.

(δ) Αν το πεδίο είναι αστρόβιλο, υπολογίστε την αντίστοιχη δυναμική ενέργεια $U(x,y,z)$, χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα και υποθέτοντας ότι $U(0,0,0)=0$.

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα $\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$

Θέμα 4ο Ένα υδροπλάνο μάζας M_0 χρησιμοποιείται για την κατάσβεση πυρκαϊάς και εκτελεί χαμηλή πτήση, παράλληλη προς την επιφάνεια της θάλασσας, με σταθερή ταχύτητα v_0. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ προσθαλασσώνεται και ανοίγει την καταπακτή του, που γεμίζει νερό με σταθερό ρυθμό $\frac{dM}{dt} = \lambda$. Ταυτόχρονα ασκείται στο υδροπλάνο από το νερό της θάλασσας τριβή $F_{\tau\rho} = -\kappa v$, όπου κ θετική σταθερά και v η ταχύτητα του υδροπλάνου. Βρείτε τη χρονική εξέλιξη της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του υδροπλάνου για το χρονικό διάστημα που διαρκεί η φόρτωση με θαλασσινό νερό.

Τυπολόγιο:

$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$, $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$

Νόμος Νεύτωνα: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. Δυναμική ενέργεια: $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$, $U(A) - U(B) = -\int_B^A \vec{F} \cdot \vec{dr}$

Πολικές συντεταγμένες: $\vec{r} = r\hat{r}$, $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$, $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$

Συνθήκη για διατηρητική δύναμη: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$. Ισχύς: $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

Στροφορμή, ροπή: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$, $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$, $\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Ροπή αδράνειας ως προς άξονα: $I = \sum_i m_i r_i^2 = \int r^2 dm$

Κέντρο μάζας: $\vec{R}_{KM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm}$, $\vec{V}_{KM} = \dot{\vec{R}}_{KM} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\int \vec{v}\, dm}{\int dm}$

Αρμονικός ταλαντωτής: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$, $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, $x = x_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$, $U = \frac{1}{2}kx^2$.

Αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2\tau}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$,

με λύση την: $x = x_0 e^{-\frac{t}{4\tau}} \sin(\omega t + \phi)$, όπου $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{16\tau^2}}$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!