



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
«ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ»
3 Φεβρουαρίου 2011

ΘΕΜΑ 1°

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : x-1 = y-2 = z-3$ και $\varepsilon_2 : x-2 = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$.

- (α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται και να προσδιορίσετε το σημείο τομής τους, M . *Μονάδες 1*
- (β) Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου Π_1 που ορίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2 . *Μονάδες 0,5*
- (γ) Να βρείτε την ορθή προβολή του σημείου M πάνω στο επίπεδο Π_2 που περιέχει το σημείο $N(4, -3, 2)$ και είναι παράλληλο προς το επίπεδο Π_1 . *Μονάδες 1*

ΘΕΜΑ 2°

(α) Έστω V ένας γραμμικός χώρος πάνω από ένα σώμα K .

- (i) Να δοθεί ο ορισμός των εννοιών: «γραμμική ανεξαρτησία» και «γραμμική εξάρτηση» στοιχείων του χώρου V και να δώσετε για κάθε μια έννοια ένα παράδειγμα. *Μονάδες 0,5*
- (ii) Έστω v_1, v_2, \dots, v_k γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του V . Ναδειχθεί ότι, αν το στοιχείο $v \in V$ δεν ανήκει στην γραμμική θήκη των v_1, v_2, \dots, v_k , τότε τα v_1, v_2, \dots, v_k, v είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. *Μονάδες 0,5*

(β) Δίνονται οι υπόχωροι του \mathbb{R}^3 :

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 5x + 2y - 7z = 0\} \text{ και } V_2 = [(1, 3, -5), (2, 3, -1), (5, 9, -7)].$$

- (i) Να βρείτε μια βάση και τη διάσταση για τον καθέναν από τους V_1 και V_2 και να επεκτείνετε την βάση του V_2 σε μία βάση του \mathbb{R}^3 . *Μονάδες 1*
- (ii) Να βρείτε μια βάση και τη διάσταση του υπόχωρου $V_1 \cap V_2$. *Μονάδες 0,7*
- (iii) Να βρείτε τη διάσταση του $V_1 + V_2$. *Μονάδες 0,3*

ΘΕΜΑ 3°

Ο επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος (Σ) είναι ο:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ \alpha & \alpha & 4 & 4 \\ 0 & \alpha & 2 & \beta \end{array} \right)$$

Να εξετάσετε για ποιές τιμές των παραμέτρων α, β το (Σ) :

- (i) Έχει μοναδική λύση.
(ii) Έχει μονοπαραμετρική απειρία λύσεων.
(iii) Έχει διπαραμετρική απειρία λύσεων.
(iv) Δεν έχει λύση.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 4^ο

- (α) Έστω X, Y διανυσματικοί χώροι πάνω στο σώμα $K = \mathbb{R}$ ή \mathbb{C} , $T: X \rightarrow Y$ μία 1-1 και επί γραμμική απεικόνιση (ισομορφισμός) και $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ μία βάση του X .
Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\{T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)\}$ είναι βάση του Y .

Μονάδες 1

- (β) Έστω $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ γραμμική απεικόνιση με τύπο

$$T(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y, 3x + 4y - z).$$

- (i) Βρείτε τον πίνακα της T ως προς την κανονική βάση του \mathbb{R}^3 . *Μονάδες 0,5*
(ii) Βρείτε μία βάση του πυρήνα της T . *Μονάδες 1*

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες.

Καλή επιτυχία.