

## ΣΕΜΦΕ, Κβαντομηχανική ΙΙ

Επαναληπτική εξέταση Οκτωβρίου 2011.

Διδάσκων Κ. Φαράκος

**Θέμα Ι.** Φορτισμένο σωματίο μάζας  $m$  και φορτίου  $q$  το οποίο δέχεται δύναμη

$F = -kx$  βρίσκεται μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης  $E_0$ . Η δυναμική ενέργεια του σωματιδίου για  $x=0$  είναι  $V_0$ . Βρείτε (α) τις ενεργειακές στάθμες του σωματίου, (β) την κυματοσυνάρτηση στη θεμελιώδη στάθμη και (γ) τη μέση τιμή της θέσης για τυχαία κατάσταση  $\Psi_n$ .

Σημείωση, για τον μονοδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή δίνονται οι σχέσεις:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right), \quad a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}}, \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

$$a\Psi_n = \sqrt{n}\Psi_{n-1}, \quad a^\dagger\Psi_n = \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}$$

**Θέμα ΙΙ.** Υπολογίστε την σχετικιστική διόρθωση πρώτης τάξης για την ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης του ατόμου του Υδρογόνου,  $H = p^2/2m - e^2/4\pi\epsilon_0 r$ .

Η διόρθωση δίνεται κλασσικά από την σχέση

$$\Delta E = \sqrt{c^4 m^2 + c^2 p^2} - mc^2 - \frac{p^2}{2m}$$

Θεωρώντας ότι η ορμή είναι πολύ μικρότερη της «μάζας», σύμφωνα με τη σχέση  $p \ll mc$ , αναπτύσσουμε κατά Taylor και κρατάμε τον πρώτο μη μηδενικό όρο.

$$(1 + \epsilon)^n = 1 + n\epsilon + \frac{1}{2}n(n-1)\epsilon^2 + \dots$$

$$\alpha_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}, \quad \psi_{100} = \sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}, \quad E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

**Θέμα ΙΙΙ.** Δύο σωματίδια με μάζες  $m_1, m_2$  και spin  $s_1=1, s_2=1/2$  αντίστοιχα,

αλληλεπιδρούν με δυναμική ενέργεια  $V(r) = g \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{r}$ , όπου  $r$  η σχετική τους

απόσταση. (α) Για ποιές τιμές του συνολικού spin των δύο σωματιδίων δημιουργούνται δέσμιες καταστάσεις, πόση ενέργεια έχουν και τι εκφυλισμό.

Θεωρήστε θετική και αρνητική σταθερά αλληλεπίδρασης  $g$ . (β) Στην χαμηλότερη ενεργειακά στάθμη τα δύο σωματίδια έχουν σχετική τροχιακή στροφορμή  $l$  ίση με

μηδέν και το ακτινικό μέρος της κυματοσυνάρτησής τους είναι  $R(r) = Ne^{-\frac{r}{a}}$ .

Να προσδιορίσετε τη σταθερά  $a$  και τη σταθερά κανονικοποίησης  $N$ .

Η ανηγμένη μάζα του συστήματος είναι  $\mu = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$ .

**Θέμα ΙV.** Δύο σωματίδια με spin  $S_1=1/2, S_2=1/2$  αλληλεπιδρούν τοπικά και η

Χαμιλτονιανή που περιγράφει την αλληλεπίδραση είναι:  $H = g_1 S_1 S_2 + g_2 S_z$

όπου  $g_1, g_2$  σταθερές με τις κατάλληλες μονάδες.

(α) Υπολογίστε τις δυνατές τιμές της ολικής στροφορμής  $S$  των δύο σωματιδίων και τον εκφυλισμό σε κάθε περίπτωση.

(β) Υπολογίστε τις ενεργειακές ιδιοτιμές του συστήματος και γράψτε τις αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις.

(γ) Εάν το σύστημα τη χρονική στιγμή  $t=0$  είναι στην κατάσταση  $|\chi_+^{(1)}, \chi_-^{(2)}\rangle$ , ποια είναι η πιθανότητα να βρεθεί στην κατάσταση  $|\chi_-^{(1)}, \chi_+^{(2)}\rangle$  μετά από χρόνο  $t$ .

$$\text{Δίνονται: } \int_0^\infty r^k e^{-\frac{r}{a}} dr = k! a^{k+1}, \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-az^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Psi) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \right)$$

$$|1, 1\rangle = |\chi_+^{(1)}, \chi_+^{(2)}\rangle, \quad |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\chi_+^{(1)}, \chi_-^{(2)}\rangle + |\chi_-^{(1)}, \chi_+^{(2)}\rangle),$$

$$|1, -1\rangle = |\chi_-^{(1)}, \chi_-^{(2)}\rangle, \quad |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\chi_+^{(1)}, \chi_-^{(2)}\rangle - |\chi_-^{(1)}, \chi_+^{(2)}\rangle)$$

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα, διάρκεια εξέτασης  $2 \frac{1}{2}$  ώρες, χωρίς βιβλία και άλλα βοηθήματα.