

ΣΕΜΦΕ, Κβαντομηχανική ΙΙ

Τελική εξέταση Φεβρουαρίου, 14/02/2011.

Διδάσκων Κ. Φαράκος

Θέμα Ι. Η Χαμιλτονιανή ενός σωματιδίου μάζας m στο χώρο δίνεται από την σχέση

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2) + bx^2yz$$

Όπου b είναι μία σταθερά με κατάλληλες μονάδες.

(α) Να υπολογιστούν οι ενέργειες και οι κυματοσυναρτήσεις του σωματιδίου για $b=0$. Οι αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις του μονοδιάστατου απλού αρμονικού ταλαντωτή θεωρούνται γνωστές.

(β) Εάν $b \neq 0$ και $b \ll m\omega^2$, να υπολογιστούν σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών οι ενέργειες της χαμηλότερης εκφυλισμένης στάθμης του πρώτου ερωτήματος και οι αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις σε μηδενική τάξη.

Θέμα ΙΙ. Οι τελεστές καταστροφής και δημιουργίας για έναν αρμονικό ταλαντωτή μάζας m και συχνότητας ω ορίζονται ως εξής:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{ip_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}}, \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{ip_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

Υπενθυμίζουμε τις ιδιότητες $a\Psi_n = \sqrt{n}\Psi_{n-1}$, $a^\dagger\Psi_n = \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}$ των τελεστών a και a^\dagger , όπου Ψ_n είναι ιδιοσυναρτήσεις του αρμονικού ταλαντωτή.

(α) Αποδείξτε ότι η Χαμιλτονιανή του απλού αρμονικού ταλαντωτή γράφεται ως εξής

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \text{ και βρείτε το ενεργειακό φάσμα.}$$

(β) Βρείτε την μορφή της κυματοσυνάρτησης στην θεμελιώδη στάθμη.

(γ) Υπολογίστε την μέση τιμή της δυναμικής ενέργειας και την μέση τιμή της κινητικής ενέργειας του αρμονικού ταλαντωτή σε μια ιδιοκατάσταση Ψ_n .

Θέμα ΙΙΙ. Σωματίο μάζας m κινείται υπό την επίδραση κεντρικού δυναμικού $V(r)$

$$\text{όπου, } V(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < a \\ V_0 & a < r \end{cases}$$

(α) Γράψτε την Χαμιλτονιανή του σωματιδίου σε σφαιρικές συντεταγμένες και ξεχωρίστε τον όρο της στροφορμής.

(β) Προσδιορίστε το V_0 έτσι ώστε το σύστημα να έχει για στροφορμή μηδέν μόνο τρεις δέσμιες καταστάσεις.

Θέμα ΙV. Το ηλεκτρόνιο σε ένα άτομο υδρογόνου την χρονική στιγμή $t=0$ είναι στην κατάσταση $\Psi(\vec{r}, t=0) = N\Psi_{211}\chi_+$

όπου χ_\pm είναι οι καταστάσεις σπίν και Ψ_{nlm} οι ιδιοσυναρτήσεις του ατόμου του υδρογόνου H_0 με συγκεκριμένη ενέργεια. Το ηλεκτρόνιο βρίσκεται υπό την επήρεια ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου $\vec{B} = B_0\hat{z}$ για $t > 0$, $H = H_0 + H_B$.

(α) Έστω $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ η ολική στροφορμή. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές της ολικής στροφορμής για αυτό το σύστημα?

(β) Αποδείξτε για την ολική στροφορμή την σχέση

$$J^2 = L^2 + S^2 + 2L_z S_z + L_+ S_- + L_- S_+$$

- (γ) Υπολογίστε τα $J_z \Psi$ και $J^2 \Psi$. Σε ποια τιμή της ολικής στροφορμής αντιστοιχεί η κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου;
- (δ) Βρείτε την κατάσταση του συστήματος για $t > 0$.
- (ε) Εάν μετρήσουμε το σπιν του ηλεκτρονίου στον άξονα z τι τιμές θα πάρουμε και με τι πιθανότητα;

Θέμα IV. (α) Υπολογίστε τους μεταθέτες των συνιστωσών του διανύσματος θέσης \mathbf{r} και της ορμής \mathbf{p} με τις συνιστώσες της στροφορμής L_k .

(β) Να δείξετε ότι $[\hat{L}_x, \hat{H}] = 0$, $[\hat{L}_y, \hat{H}] = 0$ και $[\hat{L}_z, \hat{H}] = 0$ όταν το δυναμικό είναι συνάρτηση του μέτρου $r = |\mathbf{r}|$ μόνο και $\hat{H} = \frac{\bar{p}^2}{2m} + V(r)$, $\bar{p}^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$.

$$\text{Δίνονται: } s_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, s_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, s_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \Psi) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \right), \quad \bar{\mu}_s = -g \frac{e}{2m} \bar{S}$$

$$H_B = -\bar{\mu} \cdot \bar{B}, \quad J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα, γράψτε τέσσερα από τα πέντε θέματα.

Διάρκεια εξέτασης $2 \frac{1}{2}$ ώρες, χωρίς βιβλία και άλλα βοηθήματα.