Θέμα I. Η δυναμική ενέργεια \( V(x) \) ενός σωματιδίου μάζας \( m \) σε μια διάσταση δίνεται από τη σχέση \( V(x) = Ax \), όπου \( A \) είναι θετική σταθερά. (α) Να εξετάσετε αν το ενεργειακό φάσμα του σωματιδίου είναι συνεχής ή διακριτό. (β) Να υπολογίσετε τη κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου στην αναπαράσταση των ορμών. Το ενεργειακό φάσμα είναι εκφυλισμένο ή μη-εκφυλισμένο; (γ) Γράψτε τη κυματοσυνάρτηση στον χώρο των θέσεων. (δ) Εάν ισχύει για τη δυναμική ενέργεια \( V(x = 0) = \infty \), ποιο επιπλέον συνοριακή συνθήκη επιβάλλουμε; Το ενεργειακό φάσμα τώρα θα είναι συνεχής ή διακριτό; Γιατί;

Θέμα II. (α) Υπολογίστε τις ενεργειακές στάθμες ενός μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή. (β) Υπολογίστε την σχετικοτοπική διόρθωση πρώτης τάξης των ενεργειακών στάθμων ενός αρμονικού ταλαντωτή. Η διόρθωση δίνεται κλασσικά από την σχέση

\[
\Delta E = \sqrt{c^4 m^2 + c^2 p^2} - mc^2 - \frac{p^2}{2m}
\]

Θεωρώντας ότι η ομηρή είναι πολύ μικρότερη της «μάζας», σύμφωνα με τη σχέση \( p << mc \).

Σημείωση: για τον μονοδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή δίνονται οι σχέσεις:

\[
H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2 = \hbar \omega (a^2 + \frac{1}{2}) , \quad a = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2k}} x + \frac{ip}{\sqrt{2m \hbar \omega}} , \quad a^* = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2k}} x - \frac{ip}{\sqrt{2m \hbar \omega}}
\]

\[
\Psi_n = \sqrt{n} \Psi_{n-1} , \quad a^* \Psi_n = \sqrt{n+1} \Psi_{n+1}
\]

Θέμα III. Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή:

\[
H = \frac{\hbar \omega}{2} L_x^2 + \frac{\hbar}{\hbar} (L_x^2 + L_y^2)
\]

Οπού \( \hbar \) είναι θετική σταθερά και \( L_k \) η \( k \) συνιστώσα του τελεστή της στροφομής.

(α) Προσδιορίστε το ενεργειακό φάσμα της \( H \) για ένα σωματίδιο χωρίς σπιν \( I = \frac{1}{2} \).

(β) Θεωρήστε ένα σωματίδιο με κυματοσυνάρτηση \( \psi(\theta, \phi) = N(\sin \phi \cos \theta + \cos \theta) \).

Ποια είναι η μέση τιμή της ενέργειας;

Θέμα IV. Δύο σωματίδια με spin \( S_1 = 1/2, S_2 = 1/2 \) αλληλεπιδρούν τοπικά και η Χαμιλτονιανή που περιγράφει την αλληλεπίδραση είναι:

\[
H = k_1 S_1 S_2 + k_2 S_2
\]

οπό \( k_1, k_2 \) σταθερές με τις κατάλληλες μονάδες.

(α) Υπολογίστε τις δυνατές τιμές της ολικής στροφομής \( S \) των δύο σωματιδίων και τον εκφυλισμό σε κάθε περίπτωση.

(β) Υπολογίστε τις ενεργειακές ιδιωτικότητες του συστήματος και γράψτε τις αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις.

(γ) Εάν το σύστημα τη χρονική στιγμή \( t = 0 \) είναι στην κατάσταση \( |\chi_1^{(1)}, \chi_2^{(2)}\rangle \), ποια είναι η πιθανότητα να βρεθεί στην κατάσταση \( |\chi_1^{(1)}, \chi_2^{(2)}\rangle \) μετά από χρόνο \( t \)?
\[(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{1}{2} n(n-1)\varepsilon^2 + \ldots\]

\[Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_{1,\pm 1} = \pm \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{\pm i\theta} \sin \theta\]

\[|1, 1 \rangle = |\chi_+^{(1)}, \chi_+^{(2)} \rangle, \quad |1, 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\chi_+^{(1)}, \chi_+^{(2)} \rangle + |\chi_+^{(1)}, \chi_+^{(2)} \rangle),\]

\[|1, -1 \rangle = |\chi_+^{(1)}, \chi_-^{(2)} \rangle, \quad |0, 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\chi_+^{(1)}, \chi_-^{(2)} \rangle - |\chi_-^{(1)}, \chi_+^{(2)} \rangle)\]

"Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα, διάρκεια εξέτασης 2 \(\frac{1}{2}\) ώρες, χωρίς βιβλία και άλλα βοηθήματα."