Επαναληπτική εξέταση, Σεπτέμβριος 2012.
Διδάσκων Κ. Φαράκος Κουλούρης Αιμιλιανός

<u>Θέμα I.</u> Η δυναμική ενέργεια $V(x)$ ενός σωματιδίου μάζας m σε μία διάσταση δίνεται από τη σχέση $V(x) = Ax$, όπου το A είναι θετική σταθερά. (α) Να εξεταστεί αν το ενεργειακό φάσμα του σωματιδίου είναι συνεχές ή διακριτό. (β) Να υπολογιστεί η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου στην αναπαράσταση των ορμών. Το ενεργειακό φάσμα είναι εκφυλισμένο ή μη-εκφυλισμένο; (γ) Γράψτε τη κυματοσυνάρτηση στον χώρο των θέσεων. (δ) Εάν ισχύει για τη δυναμική ενέργεια $V(x=0)=\infty$, ποια επιπλέον συνοριακή συνθήκη επιβάλλουμε; Το ενεργειακό φάσμα τώρα θα είναι συνεχές ή διακριτό; Γιατί;

Πως δίνεται αυτό το ΚΕΡΑΤΟ?

<u>Θέμα II.</u> (α) Υπολογίστε τις ενεργειακές στάθμες ενός μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή. (β) Υπολογίστε την σχετικιστική διόρθωση πρώτης τάξης των ενεργειακών σταθμών ενός αρμονικού ταλαντωτή. Η διόρθωση δίνεται κλασσικά από την σχέση

$$\Delta E = \sqrt{c^4 m^2 + c^2 p^2} - mc^2 - \frac{p^2}{2m}$$

Θεωρώντας ότι η ορμή είναι πολύ μικρότερη της «μάζας», σύμφωνα με τη σχέση $p << mc$.

Σημείωση, για τον μονοδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή δίνονται οι σχέσεις:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}),\ a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}},\ a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

$$a\Psi_n = \sqrt{n}\Psi_{n-1},\quad a^\dagger\Psi_n = \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}$$

<u>Θέμα III.</u> Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή: $H = \frac{\varepsilon}{\hbar}L_z + \frac{\varepsilon}{\hbar^2}(L_x^2 + L_y^2)$

Όπου το ε είναι θετική σταθερά και L_k η k συνιστώσα του τελεστή της στροφορμής.
(α) Προσδιορίστε το ενεργειακό φάσμα της H για ένα σωματίδιο χωρίς σπιν με $\ell=1$.
(β) Θεωρήστε ένα σωματίδιο με κυματοσυνάρτηση $\psi(\theta,\phi) = N(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta)$.
Ποία είναι η μέση τιμή της ενέργειας;

<u>Θέμα IV.</u> Δύο σωματίδια με spin $S_1=1/2$, $S_2=1/2$ αλληλεπιδρούν τοπικά και η Χαμιλτονιανή που περιγράφει την αλληλεπίδραση είναι: $H=k_1\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 + k_2S_z$
όπου k_1, k_2 σταθερές με τις κατάλληλες μονάδες.
(α) Υπολογίστε τις δυνατές τιμές της ολικής στροφορμής $\mathbf{S}$ των δύο σωματιδίων και τον εκφυλισμό σε κάθε περίπτωση.
(β) Υπολογίστε τις ενεργειακές ιδιοτιμές του συστήματος και γράψτε τις αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις.
(γ) Εάν το σύστημα τη χρονική στιγμή $t=0$ είναι στην κατάσταση $|\chi_-^{(1)},\chi_+^{(2)}\rangle$, ποια είναι η πιθανότητα να βρεθεί στην κατάσταση $|\chi_+^{(1)},\chi_-^{(2)}\rangle$ μετά από χρόνο t;

$-\infty$

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{1}{2}n(n-1)\varepsilon^2 + \ldots$$

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},\ Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,\ Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{\pm i\phi}\sin\theta$$

$$|1,1> = |\chi_+^{(1)},\chi_+^{(2)}>,\quad |1,0> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\chi_+^{(1)},\chi_-^{(2)}> + |\chi_-^{(1)},\chi_+^{(2)}>),$$

$$|1,-1> = |\chi_-^{(1)},\chi_-^{(2)}>,\quad |0,0> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\chi_+^{(1)},\chi_-^{(2)}> - |\chi_-^{(1)},\chi_+^{(2)}>)$$

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα, διάρκεια εξέτασης $2\frac{1}{2}$ ώρες, χωρίς βιβλία και άλλα βοηθήματα.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + Ax^4 = E$$

$$H = E \rightarrow E = f(x) \quad -b\frac{x}{[illegible]} + a\frac{1}{x^2}$$

$$e^{ap - \frac{p^3}{b}}$$