ΣΕΜΦΕ, Κβαντομηχανική ΙΙ

Τελική εξέταση Φεβρουαρίου, 4/02/2013.
Διδάσκων Κ. Φαράκος

Θέμα Ι. (25) Φορτισμένο σωμάτιο μάζας m και φορτίου q το οποίο δέχεται δύναμη $F=-kx$ βρίσκεται μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης $\mathcal{E}_0$. Η δυναμική ενέργεια του σωματιδίου για $x=0$ είναι V_0. Βρείτε (α) τις ενεργειακές στάθμες του σωματίου, (β) την κυματοσυνάρτηση στη θεμελιώδη στάθμη και (γ) τη μέση τιμή της θέσης για τυχαία κατάσταση Ψ_n.

Σημείωση, για τον μονοδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή δίνονται οι σχέσεις:

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}kx^2=\hbar\omega(a^\dagger a+\frac{1}{2}),\ a=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x+\frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}},\ a^\dagger=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x-\frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

$$a\Psi_n=\sqrt{n}\Psi_{n-1}\ ,\quad a^\dagger\Psi_n=\sqrt{n+1}\Psi_{n+1}$$

Θέμα ΙΙ. (30) Η συνάρτηση $\psi(\bar{r})=Nre^{-\frac{r}{2a}}e^{i\phi}\sin\theta$ είναι η κυματοσυνάρτηση μιας στάσιμης κατάστασης ενός φυσικού συστήματος μάζας m το οποίο έχει δυναμική ενέργεια $V(r)=\dfrac{\gamma}{r}$ και ορισμένη στροφορμή ℓ, όπου γ και α σταθερές. Να υπολογίσετε:

α) Την στροφορμή ℓ του συστήματος.
β) Την ενέργεια E του συστήματος.
γ) Την σταθερά γ σαν συνάρτηση των m, $\hbar$ και α.
δ) Την μέση τιμή της κινητικής ενέργειας του συστήματος.

Θέμα ΙΙΙ. (40) Σωματίδιο μάζας m με *spin 1/2* και μαγνητική διπολική ροπή μ εισέρχεται σε ανομοιογενές μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$. Οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου είναι $B_x=0$, $B_y=-ky$ και $B_z=B_0+kz$. Η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t=0$ που εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο είναι της μορφής

$$\Psi(t=0)=\psi(x,y,z)e^{i\frac{p_0}{\hbar}x}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\quad \text{όπου}\quad \int\psi^2d^3x=1\ ,\ \psi\in R \text{ και } |\alpha|^2+|\beta|^2=1.$$

(α) Υπολογίστε τις μέσες τιμές των συνιστωσών της ορμής $<p_x>$, $<p_y>$ και $<p_z>$ για $t=0$. (β) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P_+(z)$, $P_-(z)$ να βρούμε σε μία μέτρηση της προβολής του spin κατά τον άξονα των z την τιμή $\dfrac{\hbar}{2}$ ή $-\dfrac{\hbar}{2}$ αντίστοιχα. (γ) Ομοίως τις πιθανότητες $P_+(y), P_-(y)$ για την μέτρηση της προβολής του *spin* στον άξονα y.

(δ) Εάν $H=\dfrac{p_x^{\ 2}}{2m}+\dfrac{p_y^{\ 2}}{2m}+\dfrac{p_z^{\ 2}}{2m}-\bar{\mu}\cdot\bar{B}$ είναι η Χαμιλτονιανή που περιγράφει την κίνηση του σωματιδίου στο μαγνητικό πεδίο να βρείτε τις μέσες τιμές $<x>_t$, $<y>_t$, $<z>_t$ των συντεταγμένων x, y, z σαν συνάρτηση του χρόνου κίνησης μέσα στο μαγνητικό πεδίο. Να εκφράσετε τις ποσότητες $<y>_t$ και $<z>_t$ μέσω των πιθανοτήτων $P_\pm(z)$ και $P_\pm(y)$.

Θέμα IV. (25) Δύο σωματίδια με spin $S_1=1/2$, $S_2=1/2$ αλληλεπιδρούν τοπικά και η Χαμιλτονιανή που περιγράφει την αλληλεπίδραση είναι: $H=g_1(S_x^{\ 2}+S_y^{\ 2})+g_2S_z$ όπου g_1, g_2 σταθερές με τις κατάλληλες μονάδες.

(α) Υπολογίστε τις δυνατές τιμές της ολικής στροφορμής $\boldsymbol{S}$ των δύο σωματιδίων και τον εκφυλισμό σε κάθε περίπτωση.
(β) Υπολογίστε τις ενεργειακές ιδιοτιμές του συστήματος και γράψτε τις αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις.
(γ) Εάν το σύστημα τη χρονική στιγμή $t=0$ είναι στην κατάσταση $|\chi_+^{(1)},\chi_-^{(2)}\rangle$, ποια είναι η πιθανότητα να βρεθεί στην κατάσταση $|\chi_-^{(1)},\chi_+^{(2)}\rangle$ μετά από χρόνο t.

Δίνονται: $\nabla^2\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Psi)+\frac{1}{r^2}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2})$

$$i\hbar\frac{d<A>}{dt} = <[A,H]> + i\hbar\frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\int_0^\infty r^k e^{-\frac{r}{\alpha}}dr = k!\alpha^{k+1}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2}dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$|1,1>=|\chi_+^{(1)},\chi_+^{(2)}>, \quad |1,0>=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\chi_+^{(1)},\chi_-^{(2)}>+|\chi_-^{(1)},\chi_+^{(2)}>),$$

$$|1,-1>=|\chi_-^{(1)},\chi_-^{(2)}>, \quad |0,0>=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\chi_+^{(1)},\chi_-^{(2)}>-|\chi_-^{(1)},\chi_+^{(2)}>)$$

Διάρκεια εξέτασης $2\frac{1}{2}$ ώρες, χωρίς βιβλία και άλλα βοηθήματα.