



**EΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

Τομέας Μαθηματικών

Πολυτεχνειόπολη - Ζωγράφου ΑΘΗΝΑ - 157 80

ΤΗΛ. : 772 3291, FAX : 772 1775

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 3<sup>ΟΥ</sup> ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΤΙΣ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ**  
2013

**ΖΗΤΗΜΑ ΠΡΩΤΟ:**

α) Να αποδειχθεί ότι αν οι  $y_1(t)$  και  $y_2(t)$  έχουν κοινό ακρότατο στο ίδιο σημείο στο I τότε δεν μπορούν να αποτελούν θεμελιώδες σύνολο λύσεων της διαφορικής εξίσωσης  $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$  σ' αντό το διάστημα. (μον. 0.5)

β) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης  $x^2y'' - 2xy' + 2y = 3x^2 + 2 \ln x, x > 0$ . (μον. 1.25)

γ) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης  $y''' + 3y'' + 3y' + y = g(t), g(t) γνωστή συνάρτηση.$  (μον. 1.25)

**ΖΗΤΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ:**

α) Να προσδιοριστούν τα ιδιάζοντα σημεία της διαφορικής εξίσωσης  $x(x-2)^2y'' + 5x^2y' + 5y = 0$  και αν κάποιο σημείο είναι κανονικό ιδιάζον να βρεθεί η δείκτρια εξίσωση, οι εκθέτες ιδιομορφίας και το διάστημα σύγκλισης της σε μορφή δυναμοσειράς λύσης. (μον. 0.75)

β) Να λυθεί με χρήση μετασχηματισμού Laplace η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y = f(t) = \begin{cases} 2 \cos t, & 0 \leq t < \pi, \\ 0, & \pi \leq t \end{cases}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0. \quad (\text{μον. 1.25})$$

**ΖΗΤΗΜΑ ΤΡΙΤΟ:**

α) Να λυθεί η δ. ε.  $(x^2y + y + 1)dx + x(1 + x^2)dy = 0$ . (μον. 1)

β) Να βρεθεί η λύση της δ. ε.  $x^2 \frac{dy}{dx} = y^2 + 2xy$ . (μον. 1)

γ) Δίνεται η διαφορική εξίσωση  $y' = \frac{ty}{t^2 + y}$ . Να προσδιοριστούν όλες οι περιοχές του  $t y$  επιπέδου στις οποίες ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης. Να δικαιολογηθεί η απάντησή σας. (μον. 0.5)

**ΖΗΤΗΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ:**

Με τη μέθοδο των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων να βρεθεί η γενική λύση του γραμμικού συστήματος  $\mathbf{x}' = A \cdot \mathbf{x}$  όπου  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ . Να προσδιοριστεί το είδος και η ευστάθεια του κρίσιμου σημείου  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . (μον. 2.5)

Δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

$$L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad L(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}, \quad L(u_a(t)f(t-a)) = e^{-sa}F(s),$$

αν  $F(s) = L(f(t))$  και  $u_a(t) = H(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t \geq a, \end{cases}$

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Καλή επιτυχία