ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ (Θέματα Εξέτασης Φεβρουαρίου 2013)
ΕΜΠ - Τομέας Φυσικής - ΣΕΜΦΕ, Αναπλ. Καθ. Γ. Βαρελογιάννης

Μέρος Α:

Α.1: Για ένα κλασσικό σωματίδιο μάζας m περιορισμένο σε δοχείο όγκου V η συνάρτηση επιμερισμού στο κανονικό σύνολο γράφεται $Z = V/\lambda^3$ όπου $\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mkT}}$ είναι το θερμικό μήκος κύματος *DeBroglie*. Τι αναπαριστά το λ και ποιό το νόημα της Z στην περίπτωση αυτή ; Να βρείτε την εσωτερική ενέργεια U και την εντροπία S. Τι θα άλλαζε στα αποτελέσματα αυτά εάν το σωματίδιο ήταν περιορισμένο σε **διδιάστατο** δοχείο επιφάνειας Σ ;

Α.2: Δείξτε ότι για τα συστήματα σε ισορροπία ισχύει η σχέση $dS = k\sum_i \lambda_i d\langle \widehat{X}_i \rangle$. Από τη σχέση αυτή σχολιάστε το φυσικό νόημα των πολλαπλασιαστών *Lagrange* καθώς και **την προσθετικότητά τους.**

Α.3: Παρατηρούμε σε μια **σιδηρομαγνητική** μετάβαση φάσης ότι στο σημείο της μετάβασης η παράμετρος τάξεως μεταβάλλεται συνεχώς σαν την τετραγωνική ρίζα της απόκλισης από την κρίσιμη θερμοκρασία ενώ η ειδική θερμότητα είναι **ασυνεχής.**
παραμαγνητικής
α) Θα υπάρχει συνύπαρξη της κανονικής και της σιδηρομαγνητικής φάσης στο σημείο της μετάβασης ;
β) Θα υπάρχουν περιττές δυνάμεις στο ανάπτυγμα *Landau* της ελεύθερης ενέργειας ως προς την παράμετρο τάξεως ;
γ) Μπορούμε να προβλέψουμε τη συμπεριφορά της επιδεκτικότητας ως προς την παράμετρο τάξεως στο σημείο της μετάβασης;
δ) Αν τις ίδιες παρατηρήσεις κάναμε κατα τη διάρκεια μιας υπεραγώγιμης μετάβασης φάσεων τι θα άλλαζε στα ερωτήματα **α) - γ)** ;

Α.4: Εξετάζουμε μια **υπεραγώγιμη** μετάβαση.
α) Ποιά είναι η συμμετρία που σπάει κατά την υπεραγώγιμη μετάβαση ;
β) Γιατί πρόκειται για **μακροσκοπικό** κβαντικό φαινόμενο ;
γ) Ποιά η απλούστερη παράμετρος τάξεως στα πλαίσια μιας θεωρίας *Landau* ;
δ) Ποιό το πείραμα που οδήγησε τον *Landau* στο συμπέρασμα αυτό ;

Μέρος Β:

Β.0: Προκαταρκτικό ερώτημα **προαιρετικό.** Ο μοναδιαίος τελεστής *Pauli* $\widehat{\sigma}_x$ στη βάση $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle\}$ έχει την ακόλουθη μορφή πίνακα: $\widehat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Να δείξετε ότι τα ιδιοδιανύσματα $|\phi_+\rangle$ και $|\phi_-\rangle$ του $\widehat{\sigma}_x$ δίνονται από τη σχέση $|\phi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|v_1\rangle \pm |v_2\rangle]$

Β.1: Εστω ένα φυσικό σύστημα του οποίου ο χώρος καταστάσεων έχει 3 διαστάσεις και μπορεί να παραχθεί απο τα διανύσματα βάσης $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. Ο χαμιλτονιανός τελεστής του συστήματος $\widehat{H}$ και δύο παρατηρήσιμα μεγέθη $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ έχουν στη βάση αυτή την ακόλουθη μορφή πίνακα

$$\widehat{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \widehat{A} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \widehat{B} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

όπου a και b είναι θετικές σταθερές. Το σύστημα βρίσκεται στην **καθαρή** κατάσταση $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$

α) Αν μετρήσουμε την **ενέργεια** του συστήματος, ποιές οι δυνατές τιμές και με ποιές αντίστοιχες πιθανότητες ; Υπολογίστε, τις **μέσες τιμές** των $\langle\widehat{H}\rangle$, $\langle\widehat{A}\rangle$ και $\langle\widehat{B}\rangle$.

β) Να ορίσετε τον τελεστή πυκνότητας $\widehat{\rho}$ και να δείξετε ότι ισχύουν οι σχέσεις $\langle\widehat{H}\rangle = Tr\{\widehat{\rho}\widehat{H}\}$, $\langle\widehat{A}\rangle = Tr\{\widehat{\rho}\widehat{A}\}$ και $\langle\widehat{B}\rangle = Tr\{\widehat{\rho}\widehat{B}\}$.

B.2: Θεωρούμε το ίδιο σύστημα όπως στην **B.1** μόνο που τώρα βρίσκεται σε συγκεκριμένο **στατιστικό μείγμα καταστάσεων** έχοντας πιθανότητα $P_{|\Psi\rangle} = 0.4$ να βρίσκεται στην κατάσταση $|\Psi\rangle$ που ορίστηκε στη **B.1:** και πιθανότητα $P_{|u_1\rangle} = 0.6$ να βρίσκεται στην κατάσταση $|u_1\rangle$.

α) Ποιά είναι η **εντροπία** του συστήματος και τι αναπαριστά η ποσότητα αυτή ;

β) Να απαντήσετε στα ερωτήματα **α)** και **β)** της **B.1** υπο τις συνθήκες αυτές. Θα μπορούσαμε να ορίσουμε μια κατάσταση $|\Phi\rangle$ τέτοια ώστε $\langle\Phi|\widehat{H}|\Phi\rangle = \langle\widehat{H}\rangle$, $\langle\Phi|\widehat{A}|\Phi\rangle = \langle\widehat{A}\rangle$ και $\langle\Phi|\widehat{B}|\Phi\rangle = \langle\widehat{B}\rangle$; Σχολιάστε.

κανονικό σύνολο

B.3: θεωρούμε πάλι το ίδιο σύστημα όμως τώρα έχει ανταλλαγές θερμότητας με δοχείο θερμότητας οπότε το αναλύουμε στο **κανονικό** σύνολο.

α) Να βρείτε τη **συνάρτηση επιμερισμού** Z και τον **τελεστή πυκνότητας** $\widehat{\rho}$.

β) Να υπολογίσετε την **εσωτερική ενέργεια** $U = \langle\widehat{H}\rangle$ και να αποδείξετε ότι για τον υπολογισμό της θα αρκούσε η συνάρτηση επιμερισμού Z. Βρείτε την **εντροπία** και την **ελεύθερη ενέργεια** του συστήματος.

γ) Να βρείτε τις μέσες τιμές $\langle\widehat{A}\rangle$ και $\langle\widehat{B}\rangle$. Αρκεί η συνάρτηση επιμερισμού για τον υπολογισμό τους ;

B.4: Εχουμε **ζεύγος** συστημάτων όπως αυτό της **B.3**.

α) Αν τα δύο συστήματα είναι **διακριτά** να βρείτε για το ζεύγος τη **συνάρτηση επιμερισμού** Z, τον **τελεστή πυκνότητας**, την **εσωτερική ενέργεια**, την **εντροπία** καθώς και τις μέσες τιμές των φυσικών ποσοτήτων που αντιστοιχούν στους τελεστές $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$.

β) Να απαντήσετε στα ερωτήματα της **α)** αν τα δύο συστήματα είναι **ταυτόσημα φερμιόνια** (υποθετικά χωρίς σπίν).

B.5: Εχουμε N **διακριτές** παγίδες η καθεμιά από τις οποίες μπορεί να παγιδεύσει **έως δύο ταυτόσημα φερμιόνια** οπως αυτά (μπορεί να είναι άδεια, να παγιδεύσει ένα φερμιόνιο ή να παγισδεύσει δύο). Οι παγίδες είναι σε επαφή με δοχείο φερμιονίων χημικού δυναμικού μ, και με δοχείο θερμότητας.

α) Να βρείτε τη **συνάρτηση επιμερισμού** Z_1, και τον **τελεστή πυκνότητας** της μίας παγίδας. Να βρείτε τη συνάρτηση επιμερισμού Z_{tot} των N διακριτών παγίδων.

β) Να βρείτε το μέσο αριθμό των παγίδων που έχουν παγιδεύσει δύο ταυτόσημα φερμιόνια. Βρείτε το μέσο αριθμό των παγιδευμένων φερμιονίων.