

Στροφορμή

- Στην Κβαντομηχανική δεν μπορούμε να γνωρίζουμε τα πάντα για την στροφορμή \vec{J} ενός σωματιδίου σε κάποια χρονική στιγμή. Μπορούμε να γνωρίζουμε συγχρόνως μόνο τα J^2 και J_z με ιδιοτιμές

$$J^2\psi = [j(j+1) \hbar^2] \psi$$

$$J_z\psi = (m_j \hbar) \psi$$

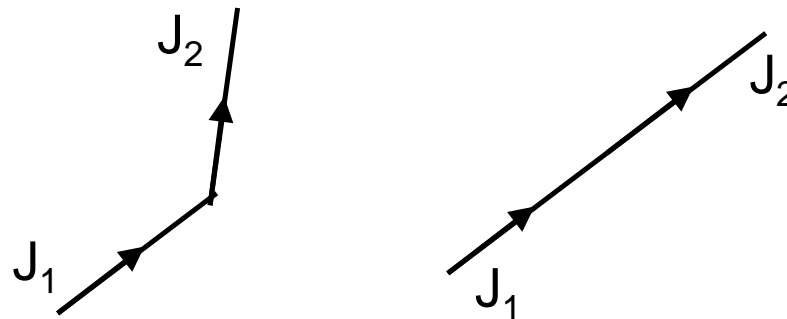
- αυτός ο φορμαλισμός ισχύει και για την τροχιακή στροφορμή \vec{L} και την ιδιοστροφορμή (spin) \vec{S}

Πρόσθεση Στροφορμής

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$

- από τη στιγμή που δεν γνωρίζουμε την κάθε συντεταγμένη των \mathbf{J}_1 και \mathbf{J}_2 το μόνο που μπορούμε να πούμε για το \mathbf{J} είναι ότι

$$m=m_1+m_2 \text{ και } |j_1 - j_2| \leq j \leq |j_1 + j_2|$$



- αν γνωρίζουμε το \mathbf{J} με δεδομένα τα j_1 και j_2 θέλουμε να καθορίσουμε τα m_1 και m_2 έχουμε τους περιορισμούς

$$m_1+m_2=m, |m_1| \leq j_1, |m_2| \leq j_2$$

Συντελεστές Clebsch-Gordan

$$|j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{(j_1+j_2)} C_{m m_1 m_2}^{j j_1 j_2} |j m\rangle, \quad \text{όπου } m = m_1 + m_2$$


 συντελεστές
Clebsch-Gordan

$$\begin{aligned}
 C_{m m_1 m_2}^{j j_1 j_2} &= \delta_{m_1+m_2, m} \sqrt{(j+m)!(j-m)!(2j+1)} \\
 &\times \sqrt{(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!} \\
 &\times \sqrt{\frac{(j+j_1-j_2)!(j-j_1+j_2)!(j_1+j_2-j)!}{(j+j_1+j_2+1)!}} \\
 &\times \sum_n \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{(j_1+j_2-j-n)!(j_1-m_1-n)!} \\
 &\times \frac{1}{(j_2+m_2-n)!(j-j_2+m_1+n)!(j-j_1-m_2+n)!}
 \end{aligned}$$

Συντελεστές Clebsch-Gordan

35. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

J	J	\dots
M	M	\dots
m_1	m_2	\dots
m_1	m_2	\dots
\dots	\dots	\dots
\dots	\dots	\dots
Coefficients		

$1/2 \times 1/2$

	1		
$+1/2$	$+1/2$	1	0
$+1/2$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$
$-1/2$	$+1/2$	$1/2$	$-1/2$
	$-1/2$	$-1/2$	1

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$$

$2 \times 1/2$

	$5/2$	$5/2$	$3/2$
$+2$	$+1/2$	1	$+3/2$
$+2$	$-1/2$	$1/5$	$4/5$
$+1$	$+1/2$	$4/5$	$-1/5$
	$5/2$	$3/2$	$5/2$
	$3/2$	$5/2$	$3/2$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi}$$

$1 \times 1/2$

	$3/2$	$3/2$	$1/2$
$+1$	$+1/2$	1	$+1/2$
$+1$	$-1/2$	$1/3$	$2/3$
0	$+1/2$	$2/3$	$-1/3$
	$3/2$	$1/2$	$3/2$
	$1/2$	$3/2$	$1/2$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2\theta - \frac{1}{2} \right)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta e^{2i\phi}$$

$3/2 \times 1/2$

	2	2	1
$+3/2$	$+1/2$	1	$+1$
$+3/2$	$-1/2$	$1/4$	$3/4$
$+1/2$	$+1/2$	$3/4$	$-1/4$
	2	1	2
	1	2	1

2×1

	3	3	2
$+2$	$+1$	1	$+2$
$+2$	0	$1/3$	$2/3$
$+1$	$+1$	$2/3$	$-1/3$
	3	2	1
	1	1	1

$3/2 \times 1$

	$5/2$	$5/2$	$3/2$
$+3/2$	$+1$	1	$+3/2$
$+3/2$	0	$2/5$	$3/5$
$+1/2$	$+1$	$3/5$	$-2/5$
	$5/2$	$3/2$	$5/2$
	$3/2$	$5/2$	$3/2$

1×1

	2	2	1
$+1$	$+1$	1	$+1$
$+1$	0	$1/2$	$1/2$
0	$+1$	$1/2$	$-1/2$
	2	1	0
	1	0	0

$3 \times 2 \times 1$

	3	2	1
$+3$	2	1	0
$+3$	0	$1/5$	$2/5$
$+1/2$	$+1$	$3/5$	$-2/5$
	3	2	1
	1	1	1

$5/2 \times 3/2$

	$1/10$	$2/5$	$1/2$
$+1/2$	-1	$3/5$	$1/15$
$+1/2$	0	$3/5$	$-1/15$
$-1/2$	$+1$	$3/10$	$-8/15$
	$5/2$	$3/2$	$5/2$
	$3/2$	$5/2$	$3/2$

$1 \times 1/2$

	$1/6$	$1/2$	$1/3$
$+1$	-1	$1/6$	$1/2$
0	0	$2/3$	0
-1	$+1$	$1/6$	$-1/2$
	2	1	0
	1	0	0

3×2

	$2/5$	$1/2$	$1/10$
0	-1	$8/15$	$-1/6$
-1	0	$8/15$	$-1/6$
-2	$+1$	$1/15$	$-1/3$
	3	2	1
	1	1	1

$5/2 \times 3/2$

	$3/10$	$8/15$	$1/6$
$-1/2$	0	$3/5$	$-1/15$
$-3/2$	$+1$	$1/10$	$-2/5$
	$5/2$	$3/2$	$5/2$
	$3/2$	$5/2$	$3/2$

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d_{m,0}^\ell = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m e^{-im\phi}$$

$$\begin{aligned} & \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M \rangle \\ & = (-1)^{J-j_1-j_2} \langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M \rangle \end{aligned}$$

Spin $\frac{1}{2}$

- Σε πολλές περιπτώσεις έχουμε να κάνουμε με Spin $\frac{1}{2}$ (λεπτόνια, κουάρκ, βαρυόνια ...)
- μπορούμε να έχουμε δύο καταστάσεις $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$, $|\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle$ ή spin \uparrow spin \downarrow
- τα συμβολίζουμε και σαν διανύσματα-στήλες 2 στοιχείων ή spinors

$$\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- μια οποιοδήποτε κατάσταση με spin $\frac{1}{2}$ μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των 2 spinors

$$\chi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

τα α , β είναι 2 μιγαδικοί αριθμοί. $|\alpha|^2$ η πιθανότητα για $S_z = +\frac{1}{2}\hbar$ ενώ $|\beta|^2$ η πιθανότητα για $S_z = -\frac{1}{2}\hbar$
επίσης $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

Spin $\frac{1}{2}$

- Ορίζουμε $\mathbf{S} = (\hbar/2)\boldsymbol{\sigma}$, όπου σ οι πίνακες Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$$

Isospin

- Μετά την ανακάλυψη του νετρονίου (1932) ο Heisenberg παρατήρησε ότι εκτός από το φορτίο το νετρόνιο είναι σχεδόν ίδιο με το πρωτόνιο ή θα μπορούσαμε να το θέσουμε ότι για τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις το πρωτόνιο και το νετρόνιο είναι το ταυτόσημα. Έχοντας υπ' όψη τα spinors μπορούμε να ορίσουμε τα spinors του νουκλεονίου

$$N = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{έχοντας} \quad p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Η ισχυρή αλληλεπίδραση είναι αναλλοίωτη σε στροφές στο χώρο του isospin \Rightarrow σύμφωνα με το θεώρημα Noether το isospin διατηρείται σε όλες τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις.
- αδρόνια που αποτελούνται από u και d κουάρκ είναι καταστάσεις του isospin

$$\begin{aligned} p &= |1/2 \ 1/2\rangle & n &= |1/2 \ -1/2\rangle & \Delta^{++} &= |3/2 \ 3/2\rangle & \Delta^+ &= |3/2 \ 1/2\rangle \\ \pi^+ &= |1 \ 1\rangle & \pi^0 &= |1 \ 0\rangle & \pi^- &= |1 \ -1\rangle & \Delta^0 &= |3/2 \ -1/2\rangle & \Delta^- &= |3/2 \ -3/2\rangle \\ & & & & \Lambda &= |0 \ 0\rangle & & & & \text{πολλαπλότητα} = 2I+1 \end{aligned}$$

Γ. Τσιπολίτης

Isospin

- Η I_3 σχετίζεται με το φορτίο του σωματιδίου και δίνεται από τη σχέση Gell-Mann - Nishijima

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(B+S)$$

- Τα u και d κουάρκ αποτελούν μια "isospin doublet"

$$u = \left| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\rangle, \quad d = \left| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\rangle$$

- Το isospin δεν κάνει απλά ταξινόμηση. Μας δίνει πολλές πληροφορίες για την δυναμική των αντιδράσεων.
- πχ. έχουμε 2 νουκλεόνια. χρησιμοποιώντας τους κανόνες πρόσθεσης της στροφορμής μπορούμε να κάνουμε τη σύνθεση του isospin. Από τους συντελεστές CG για $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ βρίσκουμε τιμές $I=0, 1$

$$\left| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\rangle \left| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\rangle = |11\rangle$$

$$\left| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\rangle \left| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle$$

$$\left| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\rangle \left| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle$$

$$\left| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\rangle \left| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\rangle = |1 -1\rangle$$

Isospin

- άρα υπάρχουν τρεις $I=1$ και μια $I=0$ καταστάσεις

$$|11\rangle = \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$|11\rangle = pp$$

$$|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (pn + np)$$

$$|1-1\rangle = \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$|1-1\rangle = nn$$

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (pn - np)$$

- πειραματικά το νετρόνιο και το πρωτόνιο κάνουν μόνο μια δέσμια κατάσταση, το δευτέριο. Άρα το δευτέριο είναι isosinglet

Ισοσπιν - σκέδαση νουκλεονίων

- a) $p + p \rightarrow d + \pi^+$
- b) $p + n \rightarrow d + \pi^0$
- c) $n + n \rightarrow d + \pi^-$

- το δευτέριο είναι $|00\rangle$ άρα οι καταστάσεις του ισοσπιν στο δεξί μέρος είναι $|11\rangle |10\rangle |1-1\rangle$. Οι καταστάσεις του ισοσπιν στο αριστερό μέρος είναι

$$\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = |11\rangle$$

$$\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle$$

$$\left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = |1-1\rangle$$

μόνο οι καταστάσεις με $I=1$ συνεισφέρουν άρα τα πλάτη σκέδασης (scattering amplitudes) είναι

$$\mathcal{M}_a : \mathcal{M}_b : \mathcal{M}_c = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : 1$$

$$\Rightarrow \sigma_a : \sigma_b : \sigma_c = 2 : 1 : 2$$

Isospin - $\pi N \rightarrow \pi N$

- a) $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$
- b) $\pi^0 + p \rightarrow \pi^0 + p$
- c) $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$
- d) $\pi^+ + n \rightarrow \pi^+ + n$
- e) $\pi^0 + n \rightarrow \pi^0 + n$
- f) $\pi^- + n \rightarrow \pi^- + n$
- g) $\pi^+ + n \rightarrow \pi^0 + p$
- h) $\pi^0 + p \rightarrow \pi^+ + n$
- i) $\pi^0 + n \rightarrow \pi^- + p$
- j) $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$

ελαστικές

ανταλλαγή φορτίου

$\pi^+ + p : |11\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle \mathcal{M}_3$

$\pi^0 + p : |10\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$

$\pi^- + p : |1 -1\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$

$\pi^+ + n : |11\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$

$\pi^0 + n : |10\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$

$\pi^- + n : |1 -1\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{3}{2} -\frac{3}{2} \right\rangle \mathcal{M}_3$

$$\left. \begin{array}{l} I_\pi = 1 \\ I_N = \frac{1}{2} \end{array} \right\} I = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

\mathcal{M}_3 για $I = \frac{3}{2}$

\mathcal{M}_1 για $I = \frac{1}{2}$

$\mathcal{M}_a = \mathcal{M}_f = \mathcal{M}_3$

Γ. Τσιπολίτης

Isospin - $\pi N \rightarrow \pi N$

- a) $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$
- b) $\pi^0 + p \rightarrow \pi^0 + p$
- c) $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$
- d) $\pi^+ + n \rightarrow \pi^+ + n$
- e) $\pi^0 + n \rightarrow \pi^0 + n$
- f) $\pi^- + n \rightarrow \pi^- + n$
- g) $\pi^+ + n \rightarrow \pi^0 + p$
- h) $\pi^0 + p \rightarrow \pi^+ + n$
- i) $\pi^0 + n \rightarrow \pi^- + p$
- j) $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$

$$\pi^+ + p : |11\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle$$

$$\pi^0 + p : |10\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\pi^- + p : |1 -1\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\pi^+ + n : |11\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\pi^0 + n : |10\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\pi^- + n : |1 -1\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{3}{2} -\frac{3}{2} \right\rangle$$

$$\mathcal{M}_3 \quad \text{για} \quad I = \frac{3}{2}$$

$$\mathcal{M}_1 \quad \text{για} \quad I = \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{M}_c = \frac{1}{3} \mathcal{M}_3 + \frac{2}{3} \mathcal{M}_1$$

$$\mathcal{M}_j = \frac{\sqrt{2}}{3} \mathcal{M}_3 - \frac{\sqrt{2}}{3} \mathcal{M}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{M}_c \\ \mathcal{M}_j \end{array} \right\} \mathcal{M}_{if} = \langle \psi_f | H | \psi_i \rangle$$

Γ. Τσιπολίτης

Isospin - $\pi N \rightarrow \pi N$

- a) $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$
- b) $\pi^0 + p \rightarrow \pi^0 + p$
- c) $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$
- d) $\pi^+ + n \rightarrow \pi^+ + n$
- e) $\pi^0 + n \rightarrow \pi^0 + n$
- f) $\pi^- + n \rightarrow \pi^- + n$
- g) $\pi^+ + n \rightarrow \pi^0 + p$
- h) $\pi^0 + p \rightarrow \pi^+ + n$
- i) $\pi^0 + n \rightarrow \pi^- + p$
- j) $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$

$$\mathcal{M}_a = \mathcal{M}_3$$

$$\mathcal{M}_c = \frac{1}{3}\mathcal{M}_3 + \frac{2}{3}\mathcal{M}_1$$

$$\mathcal{M}_j = \frac{\sqrt{2}}{3}\mathcal{M}_3 - \frac{\sqrt{2}}{3}\mathcal{M}_1$$

$$\sigma_a : \sigma_c : \sigma_j = 9|\mathcal{M}_3|^2 : |\mathcal{M}_3 + 2\mathcal{M}_1|^2 : 2|\mathcal{M}_3 - \mathcal{M}_1|^2$$

Isospin - $\pi N \rightarrow \pi N$

a) $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$

c) $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$

j) $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$

$$\sigma_a : \sigma_c : \sigma_j = 9 |\mathcal{M}_3|^2 : |\mathcal{M}_3 + 2\mathcal{M}_1|^2 : 2 |\mathcal{M}_3 - \mathcal{M}_1|^2$$

πειραματικά βρέθηκε ο συντονισμός $\Delta(1232 \text{ MeV})$. Ξέρουμε ότι $I_\Delta = 3/2$.

άρα $M_3 \gg M_1$

$$\Rightarrow \sigma_a : \sigma_c : \sigma_j = 9 : 1 : 2$$

$$\frac{\sigma_{tot}(\pi^+ + p)}{\sigma_{tot}(\pi^- + p)} = 3$$

Isospin - $\pi N \rightarrow \pi N$



$$\frac{\sigma_{tot}(\pi^+ + p)}{\sigma_{tot}(\pi^- + p)} = 3$$

