23/5/2014

Άσκηση 1

α) Έστω $a,b \in (G,\cdot)$ Δ.ο. $\exists!\ x \in G$ τ.ω. $ax=b$

Ποια αξιώματα χρησιμοποιήθηκαν σε κάθε βήμα?

Λύση

λόγω της διμελούς πράξης έχω πάλι ισότητα

• $\exists\ a^{-1}$ οπότε $ax=b \overset{\times a^{-1}}{\Longleftrightarrow} a^{-1}(ax)=a^{-1}b$

$\overset{\text{προσεταιρ.}}{\Longleftrightarrow} (a^{-1}a)x=a^{-1}b \overset{\text{ιδιότητα αντ.}}{\Longleftrightarrow} e\cdot x=a^{-1}b \overset{\text{ιδιότ. ουδετέρου}}{\Longleftrightarrow} x=a^{-1}b$

β) Συμπληρώστε τον πίνακα πολ/μού για την $G=\{1,a,b,c\}$

$\cdot$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a			
b	b			
c	c			

Πως χρησιμοποιείται το α στη συμπλήρωση του πίνακα.

Έστω ότι $\exists\ x,y$: $ax=b$
$ay=b$

$ax=ay \Rightarrow a^{-1}ax=a^{-1}ay \Rightarrow x=y$

Άρα σε μία γραμμή (αντίστοιχα στήλη) δεν μπορεί να είναι το ίδιο στοιχείο.

γ) $g^2=g$ δ.ο. το μοναδικό τέτοιο g είναι το e

$g^2=g \Leftrightarrow g\cdot g=g\cdot e \Leftrightarrow g=e$

δ) $|G|=p$ πρώτος. Δ.ο. η G κυκλική

Σελ. 115

$\exists$ στοιχείο $a \in G$ με $a \neq e$

$\langle a \rangle \leq G$ από Θ. Lagrange $|\langle a \rangle| \mid |G|=p \Rightarrow$

$|\langle a \rangle|=p \Rightarrow \langle a \rangle = G$

Πόσες διαφορετικές δομές ομάδων υπάρχουν τάξης p?

1 (από το θεώρημα ταξινόμησης των κυκλικών ομάδων)

ε) Βρείτε όλους τους επιμορφισμούς $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{10}$.

$\varphi: x \longmapsto x \pmod{10} = \bar{x} \in \mathbb{Z}_{10}$

$\varphi(x+y) = \overline{x+y} \pmod{10} = (\bar{x}+\bar{y}) \pmod{10} = \bar{x} \pmod{10} + \bar{y} \pmod{10}$

$= \varphi(x) + \varphi(y)$

Άρα η φ είναι ομομορφισμός

~~Προφανώς είναι επί~~

~~Άρα η φ είναι επιμορφισμός~~

Τώρα πρέπει να βρω όλους τους δυνατούς

Η $\mathbb{Z}$ είναι κυκλική (με 2 γεννήτορες $\langle 1 \rangle$, $\langle -1 \rangle$)

Αν ορίσω την εικόνα του γεννήτορα θα έχω επιμορφισμό

Πρέπει λοιπόν το 1 να το αντιστοιχίσω σε ένα γεννήτορα της $\mathbb{Z}_{10}$

$1 \longmapsto \bar{k}$ (Αυτό είναι πάντα ομομορφισμός γιατί αφού 1 γεννήτορας $\varphi(m) = \varphi(\underbrace{1+\dots+1}_{m\text{-φορές}}) = \underbrace{\varphi(1)+\dots+\varphi(1)}_{m\text{-φορές}}$)

Για να είναι επί το $\bar{k} \in \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}\}$ (Οι γεννήτορες της $\mathbb{Z}_{10}$ δηλ. όσοι είναι πρώτοι προς αλλήλους με το 10)

Άρα έχω 4 δυνατούς επιμορφισμούς

Πρέπει ν.δ.ο. οτιδήποτε άλλο δεν είναι δυνατή επιλογή.

$\varphi(\mathbb{Z}) = \operatorname{Im}\varphi \leq \mathbb{Z}_{10}$ κυκλική (οι υποομάδες κυκλικών είναι κυκλικές)

Άρα κ' $\operatorname{Im}\varphi$ κυκλική κ' για να είναι επί

θα πρέπει $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{Z}_{10}$ κ' άρα $\operatorname{Im}\varphi$ θα πρέπει να έχει έναν από αυτούς τους γεννήτορες.

στ) Δ.ο. το κέντρο $Z(G)=\{z\in G \mid z\cdot g = g\cdot z \ \ \forall g\in G\}$

$Z(G) \trianglelefteq G$

(Για να είναι υποομάδα θέλω να είναι
- κλειστό ως προς την πράξη
- κλειστό ως προς τον αντίστροφο
- κ να είναι μη κενό (δείχνω ότι περιέχει το ουδέτερο))

- Έστω $z_1, z_2 \in Z(G)$

κ έστω $g\in G$

$$(z_1z_2)g \underset{\text{προσ.}}{=} z_1(z_2 g) \underset{z_2\in Z(G)}{=} z_1(g z_2) \underset{\text{προσ.}}{=} (z_1 g) z_2 \underset{z_1\in Z(G)}{=} (g z_1) z_2 \underset{\text{προσ.}}{=} g(z_1 z_2)$$

Άρα $z_1z_2 \in Z(G)$

- $zg=gz \overset{\times z^{-1}}{\iff} g = z^{-1}gz \overset{z^{-1}\times}{\iff} gz^{-1} = z^{-1}g$ Άρα $z^{-1}\in Z(G)$

Άρα $Z(G)\leq G$

~~Κριτήριο κανονικότητας~~

Κανονική: $N \trianglelefteq G \iff aN = Na \ \ \forall a\in G \iff \forall h\in N$ να ισχύει $g^{-1}hg\in N$
$\forall g\in G \iff \forall h\in N$ να $\exists h'\in N : g^{-1}hg = h' \iff hg = gh' \ \ \forall h\in N \, g\in G$

Κριτήριο κανονικότητας: $\forall h\in N$ κ $\forall g\in G$ $\exists h'$:

Έστω $x\in Z(G)$ κ $g\in G$ θ.δ.ο. $\exists x'\in Z(G)$ τέτοιο ώστε $xg=gx'$

Όμως $xg \underset{\text{ιδιότητα κέντρου}}{=} gx$ άρα αρκεί να πάρω x' το x

δηλ ισχύει για $x'=x$

(Το κέντρο είναι πάντα αβελιανή)

(Η S_3 δεν είναι ~~αβελιανή~~ κανονική αλλά όλες οι υποομάδες της είναι κανονικές)

Φεβρουάριος 2013

1° Θέμα

σελ 99

1) $G=\langle a \rangle$, $H \le G$ Δ.ο. η H κυκλική

Έστω m ο ελάχιστος φυσικός τ.ω. $a^m \in H$

Θ.δ.ο. $\forall a^s \in H = (a^m)^k$ τότε $\langle a^m \rangle = H$ άρα H κυκλική

$s = qm + r$, $r = 0, \dots, m-1$

$\rightsquigarrow a^s = a^{qm} a^r \rightsquigarrow a^r = a^s (a^m)^{-q} \in H$ Άτοπο γιατί υπέθεσα ότι m ελάχιστο κ' $r < m$ εκτός κ' αν $r=0$

2) Βρείτε μια $H \le \mathbb{Z}_{108}$ έτσι ώστε $|H| = 6$

$H = \langle \overline{18} \rangle = \{ \overline{18}, \overline{36}, \overline{54}, \overline{72}, \overline{90}, \overline{0} \}$

$\mathbb{Z}_6 \not\le \mathbb{Z}_{108}$ αλλά $H \cong \mathbb{Z}_6$

($\frac{108}{6}$ = γεννήτορας
αν δεν είναι ακέραιος τότες είναι πρώτοι προς αλλήλους κ' είναι γεννήτορας)

3) Δώστε παράδειγμα $H \trianglelefteq G$ ώστε G/H να μην είναι ισομορφική με οποιαδήποτε υποομάδα της G.

($Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$)

Η κανονικότητα διατηρείται μέσω ισομορφισμών

Η κάθε υποομάδα της $\mathbb{Z}$, $H \le \mathbb{Z}$ είναι

$H = n\mathbb{Z} = \{ kn \mid k \in \mathbb{Z} \} = \{$πολ/σια του $n\}$ $\quad |H| = \infty$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$ πεπερασμένη άρα δεν μπορεί να είναι ισομορφικά

4) Παραδείγματα $|G| = 2n$ που να περιέχει κυκλική ομάδα τάξης n. ~~2 παραδείγματα~~

- $G = D_n$ $\quad \Sigma_n =$ η υποομάδα των στροφών (ξέρω ότι έχει τάξη n)

• $\mathbb{Z}_{2n}$ $H = \langle \bar{2} \rangle$

• Για $n=3$ $|S_3| = 6$ $A_3 = \langle (123) \rangle$

2° Θέμα

$\boxed{I}$ a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & a & 3 & 8 & 5 & 1 & b \end{pmatrix} \in S_8$ να βρεθούν τα a, b ώστε η σ να είναι κύκλος

$a, b \in \{2, 6\}$

$a = 2 \Rightarrow (14327)(586)$ Δεν μου κάνει

Άρα $a = 6$ $b = 2$ (Ελέγχω κ' αν δεν κάνει λέω ότι ∄)

β) Έστω $\tau = (135)(36821)(7216)(48) \in S_8$

Αναλύστε τη σε γινόμενο ξένων κύκλων κ' σε γινόμενο αντιμεταθέσεων

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 2 & 1 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\tau = (18425)(367)$ γινόμενο ξένων κύκλων

$\tau = (15)(12)(14)(18)(37)(36)$ γινόμενο αντ/σεων

(τύπος το (1° με το τελευταίο)(1° με προτελευταίο) κ.ο.κ.)

(→ Όταν οι κύκλοι είναι ξένοι αντιμετατίθενται.

$(12)(13) = (132)$ ενώ $(13)(12) = (123)$)

Βρείτε τον αντίστροφο τ^{-1}

$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 7 & 8 & 2 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ [από την τ βάζω αντίστροφα βελάκια από κάτω προς πάνω]

β' τρόπος από το γινόμενο των ξένων κύκλων.

$z^{-1} = (5\ 2\ 4\ 8\ 1)(7\ 6\ 3)$

→ Βρείτε την τάξη της z $\left(ord(z) = |\langle z \rangle|\right)$

$z = (1\ 8\ 4\ 2\ 5)(3\ 6\ 7)$

μήκος 5   μήκος 3

$z(1) = 8$
$z^2(1) = 4$
$z^3(1) = 2$
$z^4(1) = 5$
$z^5(1) = 1$

Για κύκλο μήκους m πρέπει να τον εφαρμόσω m φορές

Άρα z^5 z^3 κ' η τάξη είναι το Ε.Κ.Π. των μηκών των κύκλων

Άρα $ord(z) = 15$

→ $ord(z^6) = ?$

$z^{15} = id$ το 6 δεν πολ/ζεται με ακέραιο ποτέ για να φτάσει το 15 όμως ×5 φτάνει στο 30 το ελάχιστο πολλαπλάσιο του 15 που το πιάνει η 6. Άρα

$ord(z^6) = 5$

Αλλιώς γράφω αναλυτικά τους κύκλους της z^6.

$\boxed{\text{II}}$ a) Διατυπώστε το Θ. ταξινόμησης Π.Π.Α.Ο.

είναι Π.Π.Α.Ο $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$, $\mathbb{Z}_n = \langle \bar{1} \rangle$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$\langle (1,1) \rangle = \{(\kappa,\kappa)\}$ ενώ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(\kappa,\lambda) \mid \kappa,\lambda \in \mathbb{Z}\}$ γεννήτορες $(\bar{1},\bar{0})$ κ' $(\bar{0},\bar{1})$

$(\kappa,\lambda) = (\kappa,0) + (0,\lambda) = \kappa(1,0) + \lambda(0,1) = \underbrace{(1,0) + \dots + (1,0)}_{\kappa\text{-φορές}} + \underbrace{(0,1) + \dots + (0,1)}_{\lambda\text{-φορές}}$

Άρα $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle (1,0), (0,1) \rangle$

άλλο παράδειγμα ΠΠΑΟ

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_3 = \langle (1,0,\bar{0}), (0,1,\bar{0}), (0,0,\bar{1}) \rangle$

π.χ αβελιανής που δεν είναι Π.Π.Α.Ο.

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$\boxed{\Theta}$: Κάθε ΠΠΑΟ είναι ισομορφική με

$G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{r_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{r_2}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_t^{r_t}} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ # Betti

p_i πρώτοι όχι αναγκαστικά διαφορετικοί ανά δύο

π.χ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^3} \times \mathbb{Z}_{5^2} \times \mathbb{Z}_{5^3} \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Ⓐ) Δώστε όλες τις μη ισομορφικές ΠΠΑΟ αβελιανές τάξης 108 κ συμπτύξτε τες κατά το δυνατόν. (Σελ. 127)

$108 = 2^2 3^3$

- $\mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_{3^3}$
- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{3^3}$

} Μη ισομορφικές γιατί το * ΜΚΔ των 2 με το 2^2 δεν είναι το 1.

*

$\mathbb{Z}_{2^2} \cong \mathbb{Z}_{2^2} \times \{0\}$ είναι υποομάδα της $\mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_{3^3}$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \{0\}$ " " $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{3^3}$

κ από Θ. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_{2^2}$ αν κ μόνο αν $(2,2^2)$, $(2,2^2)$ είναι πρώτοι προς αλλήλους, που εδώ δεν ισχύει.

- $\mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$
- $\mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{3^2}$
- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{3^2}$ ← Περιέχει στοιχείο τάξης 9 το $(\bar{0},\bar{0},\bar{1})$
- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ ← αυτή δεν μπορεί να έχει στοιχείο τάξης 9. Άρα μη ισομ.

<u>Σύμπτυξη</u>

$\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{m \times n} \iff (m,n) = 1$

- $\mathbb{Z}_{2^2}\times\mathbb{Z}_{3^3} \cong \mathbb{Z}_{2^2\cdot 3^3} = \mathbb{Z}_{108}$
- $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{3^3} \cong \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{2\cdot 3^3} = \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{54}$
- $\mathbb{Z}_{2^2}\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$
- $\mathbb{Z}_{2^2}\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_{3^2} \cong \mathbb{Z}_{2^2\cdot 3}\times\mathbb{Z}_{3^2} \cong \mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_{2^2\cdot 3^2}$
- $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_{3^2} \cong \mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_{18}$
- $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_3$

δ) Βρείτε μία μη κυκλική υποομάδα της $\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_{18}$ τάξης 9

$\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_{18}$ $\quad 9=3\cdot 3$ (του ένα παράγοντα από το $\mathbb{Z}_6$ κ' του άλλο από το $\mathbb{Z}_{18}$)

$\langle\bar{2}\rangle\times\langle\bar{6}\rangle \cong \mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$ μη κυκλική διότι δεν είναι ισομορφική με την $\mathbb{Z}_9$

Θέμα 3ο

α) G ομάδα κ' $N\leq G$. Δ.ο. $N\triangleleft G$ αν ~~∃ ομομορφισμός~~ ∃ G' κ' ομομορφισμός $f: G\to G'$ τ.ω. $N=\ker f$.

$g^{-1}\underbrace{h}_{\in \ker f}\cdot g \in \ker f$

$f(g^{-1}hg) \underset{\text{ομ.}}{=} f(g^{-1})\cdot f(h)\cdot f(g) = (f(g))^{-1}\cdot e'\cdot f(g) = e'$

Άρα $g^{-1}h\cdot g \in \ker f$

β) Δ.ο. η εναλλάσσουσα υποομάδα A_n της S_n είναι κανονική της S_n, εφαρμόζοντας το α). $A_n\triangleleft S_n$

$f: S_n \longrightarrow$ ____ ώστε $\ker f = A_n$

$\frac{S_n}{A_n} \cong \mathbb{Z}_2$ (Επειδή η A_n έχει # στοιχείων $\frac{n!}{2}$ κ' S_n $n!$)

$\sigma \longmapsto \bar{0}$ σ άρτια

$\longmapsto \bar{1}$ σ περιττή

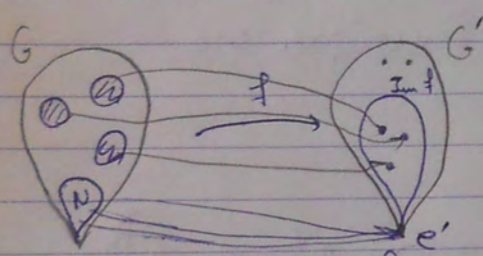
SOS

Δ.ο. 2 σύμπλοκα μιας υποομάδας έχουν πάντα του ίδιο αριθμό στοιχείων

$$f(\sigma\tau) = \begin{cases} \bar{0}, & \sigma \text{ άρτια}, \tau \text{ άρτια} \Rightarrow \sigma\tau \text{ άρτια} \\ \bar{1}, & \sigma \text{ άρτια}, \tau \text{ περιττή} \Rightarrow \sigma\tau \text{ περιττή} \\ \bar{0}, & \sigma \text{ περιττή}, \tau \text{ περιττή} \Rightarrow \sigma\tau \text{ άρτια} \end{cases}$$

$\bar{0} = \bar{0} + \bar{0} = f(\sigma) + f(\tau)$
$\bar{1} = \bar{0} + \bar{1} = f(\sigma) + f(\tau)$ Άρα ομομ. σε κάθε περίπτωση
$\bar{0} = \bar{1} + \bar{1} = f(\sigma) + f(\tau)$

γ) G πεπ. $N \trianglelefteq G$ $f : G \xrightarrow{ομ.} G'$ με $\ker f = N$
Κατασκευάστε μια 1-1 απεικόνιση από τα αριστερά σύμπλοκα της G στο $Im f$



Αν a, a' στο ίδιο σύμπλοκο $f(a) = f(a')$

Από $L_N \xrightarrow{\gamma} Im f$

$\gamma : aN \mapsto f(a)$
Θ.δ.ο. γ καλά ορισμένη κ' ότι γ 1-1

Έστω $a' \underset{L}{\sim} a$ δηλ $a'N = aN$ Θ.δ.ο. $\gamma(a'N) = \gamma(aN) \Leftrightarrow f(a') = f(a)$
Πράγματι $a' \underset{L}{\sim} a \Leftrightarrow a^{-1}a' \in N \overset{N=\ker f}{\Leftrightarrow} f(a^{-1}a') = e' \overset{ομ.}{\Leftrightarrow}$
$f(a^{-1}) \cdot f(a') = e' \overset{ομ.}{\Leftrightarrow} (f(a))^{-1} \cdot f(a') = e' \Leftrightarrow f(a') = f(a)$

Έστω $bN \neq aN$ Θ.δ.ο. $\gamma(bN) \neq \gamma(aN) \Leftrightarrow f(b) \neq f(a)$
Έστω $f(b) = f(a) \Leftrightarrow$
$f(a)^{-1} f(b) = e' \Leftrightarrow f(a^{-1}b) = e' \Leftrightarrow a^{-1}b \in \ker f = N \trianglelefteq G$
~~Άρα~~ $\Leftrightarrow a \underset{L}{\sim} b$ Άτοπο

δ) Δ.ο. δεν υπάρχει μη τετριμμένος ομομορφισμός ~~[illegible]~~
$f : \mathbb{Z}_{35} \to \mathbb{Z}_{12}$

Έστω ότι υπάρχει

- $\ker f \le \mathbb{Z}_{35} \xRightarrow{\Theta.L} |\ker f| \,\big|\, 35 \Rightarrow |\ker f| \in \{1, 5, 7, \cancel{35}\}$

  Αν $|\ker f| = 35$ όλα πάνε στο 0 κ' είναι τετριμμένος

- $\mathrm{Im} f \le \mathbb{Z}_{12} \xRightarrow{\Theta.L.} |\mathrm{Im} f| \,\big|\, 12 \Rightarrow |\mathrm{Im} f| \in \{\cancel{1}, 2, 3, 4, 6, 12\}$

  Αν $|\mathrm{Im} f| = 1$ μονοσύνολο τετριμμένος

Από Θεμελιώδες Θ. Ομομορφισμού

Από γ) $\mathbb{Z}_{35}/\ker f \cong \mathrm{Im} f \Rightarrow \left|\dfrac{\mathbb{Z}_{35}}{\ker f}\right| = |\mathrm{Im} f|$

$\dfrac{35 \text{ στοιχεία}}{7 \text{ ή } 5 \text{ ή } 1}$ το πηλίκο δεν υπάρχει στο

το πλέγμα, κυκλικές οι n-στές ρίζες της μονάδας