ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΙΙ

1) $y' = \frac{1}{5}y + (2x - \frac{1}{5}x^2)\sin x - x^2\cos x$

$y(0)=0 \quad , 0<x<1$

α) $F(x,y) = \boxed{\frac{1}{5}}y + \dots$ → Lipschitz (γραμμική ως προς y, ομαλή)

$\boxed{L=\frac{1}{5}}$ $\quad |F(x,u) - F(x,v)| = |\frac{1}{5}u - \frac{1}{5}v| = \frac{1}{5}|u-v|$, Από θεώρημα Picard, ∃ μοναδική λύση σε όλο το εύρος του διαστήματος.

▷ Αρκεί $\frac{h}{2} \cdot \frac{e^{\frac{1}{5}(1-0)} - 1}{\frac{1}{5}} \max_{0\le x\le 1} |y''(x)| \le 10^{-5}$ ①

$y'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x$

$y''(x) = 2\sin x + 2x\cos x + 2x\cos x - x^2\sin x = (2-x^2)\sin x + 4x\cos x$

$\|y''(x)\| \le |2-x^2|\,|\sin x| + |4x|\,|\cos x| \le 2+4=6$

① ⇒ $h \le 10^{-5} \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{e^{\frac{1}{5}} - 1} = \frac{0.4}{0.22} \cdot 10^{-5} = 1.82 \cdot 10^{-5}$

$N = \frac{1}{h} = \frac{1}{1.82 \cdot 10^{-5}} = 55000$ βήματα

β) $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1}) \\ y_0 \text{ γνωστό} \end{cases}$, ~~όπου $y_n \simeq y(x_n)$~~

→ $y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1}{5}y_{n+1} + (2x_{n+1} - \frac{1}{5}x_{n+1}^2)\sin x_{n+1} - x_{n+1}^2\cos x_{n+1}\right)$

$\begin{cases} 1 - \frac{h}{5} y_{n+1} = y_n + h \\ y_0 \text{ γνωστό } (y_0 = 0) \end{cases}$

$\left[1 - \frac{0.5}{5}\right. y_n = 0 + 0.5\left[2 \cdot 0 - \frac{1}{5} \cdot 0.5^2\right]\sin 0.5 - \left.(0.5)^2\cos 0.5\right]$

$y_1 = \dots$

2) "Μηδενική Ευστάθεια"

• $y_{n+3} - 2y_{n+2} - y_{n+1} + 2y_n = h(2f_{n+2} + 5f_{n+1})$

-> 3-βηματική

$$p(z) = \sum_{j=0}^{3} \alpha_j z^j = z^3 - 2z^2 - z + 2$$

$$\left(\begin{array}{r|l} & z-1 \\ \hline -z^2-z+2 & z^2-z+2 \\ -2z+2 & \end{array} \right)$$

$p(z) = (z-1)\cdot(z^2-z-2)$

$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 2, \; -1$

$|z_2| = 2 > 1$ (Δεν είναι μηδενικά ευσταθής)

Η μέθοδος δεν είναι συγκλίνουσα

Δεν είναι Α-ευσταθής γιατί είναι άμεση (y_{n+3} — f_{n+2})

• $\underbrace{y_{n+3} - y_{n+2} = h\left(\frac{9}{24} f_{n+3}\right.}_{\text{έμμεση}} \left. + \frac{19}{24} f_{n+2} - \frac{5}{24} f_{n+1} - \frac{1}{24} f_n\right)$

-> $p(z) = z^3 - z^2 = z^2(z-1)$

$z_0 = 0$ (διπλή)

$|z_1| = 1$ (απλή) => μηδενικά ευσταθής

$\sigma(z) = \frac{9}{24} z^3 + \frac{19}{24} z^2 - \frac{5}{24} z + \frac{1}{24}$

"συνεπής" $\rho'(1) = \sigma(1) \neq 0$

$\sigma(1) = \frac{29}{24} - \frac{5}{24} = 1$

} συνεπής & συγκλίνουσα από Dahlquist

$p'(z) = 3z^2 - 2z$

$p'(1) = 1$

Μηδεν. Ευστ. + Συνεπής => Συγκλίνουσα

→ Οι συντελεστές του 2ου πολ/ου δεν παίζουν ρόλο στην γραμμική ανεξαρτησία [illegible] αφορά την [illegible] της $y'=0$

3) $y_{n+1} = y_n + h\left[\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)f_n + \frac{\alpha}{2} f_{n+1}\right]$, $0<x<1$, $\alpha \in [0,1]$

y_0 γνωστό

υπάρχει α ώστε η μέθοδος να είναι συγκλίνουσα;

$\to$ $\rho(z) = z-1$, $z_0 = 1$ (απλή) $\Rightarrow$ Μηδενική ευστάθεια $\forall \alpha \in [0,1]$

$\sigma(z) = \left(1-\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\alpha}{2} z$

$\underbrace{\rho'(1) = 1, \ \sigma(1) = 1}_{\neq 0}$

$\Downarrow$

συνεπής επομένως συγκλίνουσα.

Για $\alpha = 1$ $(h = 0.1)$

$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1}{2} f_n + \frac{1}{2} f_{n+1}\right)$ (Μεθ. ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ)

$y_0 = 1$

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{5} y^3 + \frac{1}{15} y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$F(x,y) = \frac{1}{5} y^3 + \frac{1}{15} y$

$$y_1 = y_0 + h\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} y_0^3 + \frac{1}{15} y_0\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} y_1^3 + \frac{1}{15} y_1\right)\right]$$
$$= 1 + h\frac{2}{15} + \frac{h}{10} y_1^3 + \frac{h}{30} y_1$$

$$g(y_1) = \frac{1}{100} y_1^3 + \left(\frac{1}{300} - 1\right) y_1 + 1 + \frac{2}{150}$$

N.R

$$\begin{cases} y_1^{k+1} = y_1^k - \dfrac{g(y_1^k)}{g'(y_1^k)} \\ y_1^0 = 1 \end{cases}$$

$$g'(y_1) = \frac{3}{100} y_1^2 + \left(\frac{1}{300} - 1\right) \neq 0$$ οπότε εφαρμόζεται η **NR**.

1η επανάληψη $\quad y_1^1 = y_1^0 - \dfrac{g(y_1^0)}{g'(y_1^0)} = 1 - \dfrac{g(1)}{g'(1)} = \dots = 1 + \dfrac{8}{290}$

2η επανάληψη $\quad y_1^2 = y_1^1 - \dfrac{g(y_1^1)}{g'(y_1^1)}$

4) $-\dfrac{d}{dx}\left((e^{-x}+x)\dfrac{du}{dx}\right)+u(x)=(2x-e^{-x})^2+(x^2+e^{-x})(3+e^{-x})$

$u(0)=1,\ u(1)=e^{-1}+1$

$p(x)=e^{-x}+x>0 \quad \forall\, x\in[0,1]$

$p\in C^1[a,b]$ σταθή

$f(x)=(2x-e^{-x})^2+(x^2+e^{-x})(3+e^{-x})$

Η $f\in L^2(a,b)$

$H_E^1(0,1)=\{y\in H^1(0,1)\ |\ y(0)=1,\ y(1)=e^{-1}+1\}$

Έστω ο $v\in H_E^2(0,1)=\{y\in H^2(0,1)\ |\ y(0)=0,\ y(1)=0\}$

$$\int_0^1 \frac{d}{dx}\left((e^{-x}+x)\frac{du}{dx}\right)v(x)+\int_0^1 u(x)v(x)=\int_0^1 f(x)v(x)$$

$$-(e^{-x}+x)\frac{du}{dx}v(x)\Big|_0^1+\int_0^1 (e^{-x}+x)\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}+u(x)v(x)=\int_0^1 f(x)v(x)\,dx$$

Άρα $u\in H_E^1(0,1)$ είναι ασθενής λύση αν ισχύει:

$A(u,v)=\langle f,v\rangle \quad \forall\, v\in H_E^3(0,1)$ όπου

$A(u,v)=\int_0^1 (e^{-x}+x)\dfrac{du}{dx}\dfrac{dv}{dx}+u(x)v(x)\,dx$

είναι συμμετρική διγραμμική μορφή.

$\langle f,v\rangle=(f,v)_{L^2(a,b)}=\int_0^1 f(x)v(x)\,dx$, υπάρχει μοναδική λύση.